

# 組合せ論と Lie 環論のある種の関係

(R. P. Stanley, R. A. Proctor らの最近の結果  
の紹介)

東大 理

岩堀長慶 Nagayoshi Iwahori

中邨博之 Hiroyuki Nakamura

岡田聰一 Soichi Okada

§1. 1985年8月に名大の松村英之教授が organizer となつて、代数幾何学と組合せ論との関連を主題とする研究集会が京大数理解析研で開催され、R. P. Stanley, D. Eisenbud 達を招き興味ある講演が多々なされた。Stanley を中心とするグループは組合せ論と他の諸分野(代数幾何学・半順序集合・旗多様体のセル分割・Lie 環論など)との関連について精力的な活動を展開中である。ここでは特に Lie 環論との関係について Stanley 達がやっている興味あるいくつかの事実を紹介したい。

先づ必要な定義や記号を述べておく。有限半順序集合  $P$  が ranked とは、 $P$  の部分集合  $P_0, P_1, \dots, P_r$  の disjoint union として  $P$  が書かれ、次の性質を満たすことをいう：「 $x \in P_i$ ,  $y \in P$  が「 $x > y$ 」を満たし、かつ  $x > z > y$  なる  $z \in P$  が存在しない」ならば(これを「 $x$  が  $y$  を cover する」という),

$y \in P_{i-1}$  となる。以下かある  $P$  を *ranked poset* と呼ぶ。  
 $P$  の部分集合  $A$  が *anti-chain* をなすとは,  $A$  の相異なる  
 2 元  $a, b$  について  $a > b$  も  $b > a$  も成立しない (i.e.  
 $a$  と  $b$  は比較不能) — という性質をもつことをいう。以下  
 集合  $X$  の元の個数を  $|X|$  と書く。ranked poset  $P (= \bigcup_{i=0}^r P_i)$   
 が *Sperner 的* であるとは ( $r$  を  $P$  の長さという)

$$\max_{A: \text{anti-chain}} |A| \leq \max(|P_0|, |P_1|, \dots, |P_r|)$$

が成立することをいう。 $P$  が *strong Sperner 的* であるとは, 各自然  
 数  $k$  に対して, どのような  $k$  個の *anti-chain*  $A_1, \dots, A_k$  を  
 とっても  $|A_1 \cup \dots \cup A_k| \leq |P_{i_1} \cup \dots \cup P_{i_k}|$  が成立すること  
 いう。ただし,  $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$  は何れも  $|P_{i_j}| = \max_{0 \leq i \leq r} |P_i|$  を満  
 たすものとする。 $P$  が *rank-symmetric* とは,  $0 \leq i < r/2$  な  
 る各番号  $i$  に対して  $|P_i| = |P_{r-i}|$  となることである。 $P$  が  
*rank-unimodal* (i.e. rank が単一峰型) であるとは,  
 或る番号  $k$  が存在して,

$$|P_0| \leq |P_1| \leq \dots \leq |P_k| \geq |P_{k+1}| \geq \dots \geq |P_r|$$

となることをいう。 $P$  が *Peck 的* であるとは, ① *strong Sperner 的*,  
 ② *rank-symmetric*, ③ *rank-unimodal* — の 3 条件を満たすことをいう。

さて, ranked poset  $P$  の元を基底とする複素数体  $\mathbb{C}$  上

のベクトル空間を  $\mathbb{C}P$  と書く。  $\mathbb{C}P$  から  $\mathbb{C}P$  への  $\mathbb{C}$ -linear な写像全体を  $\text{End}(\mathbb{C}P)$  と書く。これは bracket 積

$$[X, Y] = XY - YX \quad (X, Y \in \text{End}(\mathbb{C}P))$$

に関し  $\mathbb{C}$  上の Lie 環となる。  $X \in \text{End}(\mathbb{C}P)$  に対して次の定義をする: ( $P_{-1} = \phi$ ,  $P_{r+1} = \phi$  とおく)

(1)  $X$  が  $P$  の lowering 作用素  $\Leftrightarrow X(\mathbb{C}P_i) \subseteq \mathbb{C}P_{i-1}$ , ( $\forall i$ )

(2)  $X$  が  $P$  の raising 作用素  $\Leftrightarrow X(\mathbb{C}P_i) \subseteq \mathbb{C}P_{i+1}$ , ( $\forall i$ )

(3)  $X$  が  $P$  の order-raising 作用素  $\Leftrightarrow$  各  $i$  と各  $a \in P_i$

に対して,  $Xa$  は  $a$  を cover する元の一次結合

\* \* \*

さて単純 Lie 環  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{trace}(Z) = 0\}$  の基底  $h, x, y$  を次のようにとる: ( $M_2(\mathbb{C}) =$  (2次複素行列の全体))

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,  $[h, x] = 2x$ ,  $[h, y] = -2y$ ,  $[x, y] = h$  である。

周知のように  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  は各自然数  $d+1$  に対して  $d+1$  次元の既約表現を (同値を除いて) 唯一つもつ。これは表現空間  $V$  の基底  $v_0, v_1, \dots, v_d$  を適当にとれば次のように与えられる:  $h \mapsto H$ ,  $x \mapsto X$ ,  $y \mapsto Y$ ; ただし

$$Hv_j = (2j - d)v_j \quad (0 \leq j \leq d)$$

$$Xv_j = v_{j+1} \quad (0 \leq j \leq d-1)$$

$$Yv_j = j(d-j+1)v_{j-1} \quad (1 \leq j \leq d)$$

とかく。

**[定義]** 長さ  $r$  の ranked poset  $P = \bigcup_{j=0}^r P_j$  が  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の表現を うせている (carry) とは,  $V = \mathbb{C}P$  を表現空間とする  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の表現  $h \mapsto H, x \mapsto X, y \mapsto Y$  が存在して,  $Y$  は  $P$  の lowering 作用素であり, かつ  $X$  は  $P$  の order-raising 作用素となることをいう。

さて Stanley は [1] 中で, <sup>(長さ  $r$  の)</sup> ranked poset  $P$  が Peck 的であるための必要十分<sup>性</sup>を決った形で与えている:  $\mathbb{C}P$  上の order-raising 作用素  $X$  が存在して, 各  $i$  ( $0 \leq i < r/2$ ) に対して, 線型写像  $X^{r-2i}: \mathbb{C}P_i \rightarrow \mathbb{C}P_{r-i}$  が linearly isomorphic となること。Proctor [3] はこの条件が  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  を用いてより美しく述べられることを示した。すなわち

ranked poset  $P$  が Peck 的  $\iff P$  が  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の表現をうせている

という定理である。 $\iff$  を示すのに Proctor は Stanley の結果を用いているが, この形の方が印象的である。Proctor はこの定理の応用として, Peck 的な ranked poset  $P, Q$  の直積も Peck 的であるという定理の簡単な美しい証明を得ている。これはもとは E.R. Canfield (Linear and Multilinear Alg. 9, 1980, 151-157) や Proctor-Saks-Sturtevant

(Discrete Math 30, 1980, 173-180)で示されたが、もちろん Stanley の上の結果を用いている。

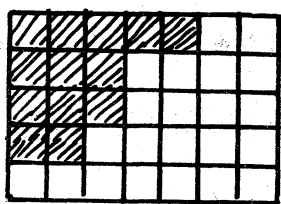
半単純 Lie 環の Weyl 群  $W$  上には Bruhat 半順序と呼ばれる半順序が定義されている。(詳しい定義は略する。例えば Stanley [1] 参照。) Stanley [1] は上の結果と、代数幾何学で hard Lefschetz Theorem と呼ばれている定理とを併用して、Bruhat poset が Peck 的なことを示した。

Proctor [3] は  $sl(2, \mathbb{C})$  の Bruhat poset 上の表現を具体的に作って、上記の Stanley の結果を combinatorial に (代数幾何を使わずに) 再現した。その後 hard Lefschetz Theorem を示すのに  $sl(2, \mathbb{C})$  の表現論が使えることが認識されるようになった。(ついでに、Peck 的な ranked poset  $P, Q$  の直積が Peck 的となる — という事実の Proctor の解釈は、これが  $sl(2, \mathbb{C})$  の表現のテンソル積の話になるというものである。また  $P_i$  は weight space の base に他ならぬという解釈である。) Proctor [3] 中の面白い定理をもう一つ述べておこう。

[定義] 型  $1^{k_1} 2^{k_2} \dots m^{k_m}$  ( $k_1, \dots, k_m$  は整数で  $\geq 0$ ) を一つ定める。 $k_1 + \dots + k_m = n$  とし、自然数を成分とする  $n$  次元ベクトル  $(a_1, \dots, a_n)$  であって、<sup>(成分)</sup> 1 が  $k_1$  個、2 が  $k_2$  個、 $\dots$ 、 $m$  が  $k_m$  個であるようなものの全体のなす集

合を  $\Omega$  とおく。次のように定義される半順序を  $\Omega$  中に導入する。 $\mathcal{P}a = (a_1, \dots, a_n)$  において,  $j > i$  かつ  $a_j \leq a_i$  なる  $i, j$  があれば,  $a$  の成分のうち  $a_i$  と  $a_j$  とを取りかて得られるベクトル  $a'$  は  $a' \geq a$  とおく。この操作をくりかえして  $\Omega$  中に半順序をいれたとき,  $\Omega$  を  $1^{k_1} \dots m^{k_m}$  上の Shuffle poset という。

[例.]  $1^m 2^n$  上の Shuffle poset は, サイズ  $n \times m$  <sup>の矩形</sup> を  $nm$  個の合同な小正方形に仕切って, 此の矩形中の Young diagram の全体に包含関係を用いて半順序をいれたものである。(左図)



( $\Omega$  の最大元は  $\underbrace{1 \dots 1}_{k_1} \underbrace{2 \dots 2}_{k_2} \dots \underbrace{m \dots m}_{k_m}$  である。)

すると Proctor の得た定理は "Shuffle poset は恒に Peck 的である" というものである。

§ 2. Stanley の他の興味ある定理 (原形は Dynkin の論文 [4] にある。これのもつ意味が Stanley [2] に豊富な例と共に述べてある) を紹介しよう。複素数体  $\mathbb{C}$  上の単純リー環  $\mathfrak{g}$  (従って型は  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$  の何れか) を考え,  $\mathfrak{g}$  のある Cartan 部分環  $\mathfrak{f}$  をとり,  $\mathfrak{g}$  の  $\mathfrak{f}$  に関するルート系を  $\Delta$  とおく。 $\Delta$  の基本ルート系 (i.e. 単純ルート系)  $\Pi$  を一つ固定し,

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

とおく。  $\Pi$  に関する  $\Delta$  中の正ルートの全体を  $\Delta^+$  とおき、各  $\beta \in \Delta^+$  に対して

$$\beta = \nu_1 \alpha_1 + \nu_2 \alpha_2 + \dots + \nu_n \alpha_n$$

( $\nu_1, \dots, \nu_n$  は非負整数) と表わしたとき、係数  $\nu_i$  を

$$\nu_i = k_i(\beta) \quad (1 \leq i \leq n)$$

と書く。そして  $n$  変数多項式  $P_\Delta(x_1, \dots, x_n)$  を

$$P_\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\beta \in \Delta^+} (1 - x_1^{k_1(\beta)} \dots x_n^{k_n(\beta)})$$

で定義する。  $P_\Delta^{-1}$  の中級数展開の係数が B. Kostant の分割関数である。これらの特徴づけ及びこれらを持つ種々の興味ある性質は雨宮-岩堀-小池 [6] に述べられている。Stanley [2] にある定理を以下証明を付けて紹介しよう。

定理 自然数  $m_1, \dots, m_n$  に対し、変数  $q$  の関数  $Q_\Delta$  を

$$Q_\Delta(q; m_1, \dots, m_n) = \frac{P_\Delta(q^{m_1}, \dots, q^{m_n})}{P_\Delta(q, \dots, q)}$$

により定義すると、  $Q_\Delta$  は  $q$  の多項式  $C_0 + C_1 q + \dots + C_r q^r$  の形となる。しかもここで  $C_0, \dots, C_r$  は非負整数であり、かつ

$$\begin{cases} \text{対称性: } C_i = C_{r-i} \quad (0 \leq i \leq r) \text{ 及び} \\ \text{unimodality: ある番号 } s \text{ が存在して } C_0 \leq \dots \leq C_s \geq C_{s+1} \geq \dots \geq C_r \end{cases}$$

を満たす。

証明のための準備として若干の記号を導入する。ルート系  $\Delta$  の <sup>(元の)</sup> 実係数の一次結合の全体を  $E$  とし,  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式が定める  $E$  の内積を  $(\xi, \eta)$  ( $\xi, \eta \in E$ ) と書く。  $E$  中の weight の全体をなす lattice を  $\Lambda$  とおく:

$$\Lambda = \{ \lambda \in E \mid 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z} (= \text{整数環}) \}$$

すると周知のように ( $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタ)

$$2(\lambda_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

で定まる  $\Lambda$  の元  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (いわゆる基本 weight w.r.t.  $\Pi$ ) が  $\Lambda$  の  $\mathbb{Z}$ -基底となる。  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  の非負整数係数の一次結合全体をなす  $\Lambda$  の部分集合を  $\Lambda^+$  とおく。すると周知のように: 各  $\lambda \in \Lambda^+$  に対し,  $\lambda$  を最高 weight にもつ  $\mathfrak{g}$  の複素既約表現  $\rho_\lambda$  が同値を除いて一意に存在する。  $\rho_\lambda$  の表現空間を  $V(\lambda)$  とおく。

さて  $\Lambda$  の  $\mathbb{Z}$  上の群環  $\mathbb{Z}[\Lambda]$  を考える。但し  $\lambda \in \Lambda$  に対応する  $\mathbb{Z}[\Lambda]$  の元 (基底の一部) を  $e^\lambda$  と書く。いま  $\lambda \in \Lambda^+$  に対応する  $\mathfrak{g}$  の既約表現  $\rho_\lambda$  に対し, その weight  $\mu$  の重複度を  $m_\lambda(\mu)$  と書く。そして  $\mathbb{Z}[\Lambda]$  の元

$$\text{ch } V(\lambda) = \sum_{\mu} m_\lambda(\mu) e^\mu \quad (\text{有限和!})$$

を  $\mathfrak{g}$  の表現  $\rho_\lambda$  (又は  $V(\lambda)$ ) の formal character という。

さて表現  $V(\lambda)$  の weight  $\mu$  は  $\lambda - (k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n)$  の形 ( $k_1, \dots, k_n$  は非負整数) に一意に表わされることも周知

である。便宜上  $k_1 + \dots + k_n \in \mu$  の level と呼び、level が  $j$  となる  $V(\lambda)$  の weight 全体の集合を  $L_\lambda(j)$  と書く。そして

$$A_j = \sum_{\mu \in L_\lambda(j)} m_\lambda(\mu)$$

とおく。すると変数  $q$  の多項式

$$\dim_q V(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \geq 0} A_j q^j$$

が生まれる。これを  $V(\lambda)$  の  $q$ -次元と呼ぶ。  $q=1$  ときくと  $q$ -次元は通常次元  $\dim V(\lambda)$  となる。

さて目標の定理は次の2つの命題から直ちに得られる。

[命題1]  $\dim_q V(\lambda) = A_0 + A_1 q + \dots + A_r q^r$  の係数  $A_0, \dots, A_r$  は対称性と unimodality を満たす。(E.B. Dynkin, [4], [5])

[命題2]  $\dim_q V(\lambda)$  は既約表現の次元公式の  $q$ -version ( $q$ -類似) となっている。即ち

$$\dim_q V(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - q^{\langle \lambda + \delta, \alpha \rangle}}{1 - q^{\langle \delta, \alpha \rangle}}$$

但し,  $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Delta^+} \beta = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ , また

$$\langle \xi, \eta \rangle = 2(\xi, \eta) / (\eta, \eta)$$

(V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Progress in Math. 44, 1983, Birkhäuser 社, 128頁参照)

何故ならば自然数  $m_1, \dots, m_n$  に対し  $\lambda \in \Lambda^+$  を

$$\lambda = \sum_{j=1}^n (m_j - 1) \lambda_j$$

で定めると,  $Q_\Delta(q; m_1, \dots, m_n)$  は命題 2 の右辺の式に他ならぬからである。

### § 3. 命題 1 の証明

B. Kostant の論文 [7] にある <sup>(g)</sup>principal TDS ( $\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ) なる  $\mathfrak{g}$  の Lie subalgebra のうち principal なものをとり, これを  $\mathfrak{a}_0 = \mathbb{C} x_0 + \mathbb{C} e_0 + \mathbb{C} f_0$  とおく。但し,  $x_0 \in \mathfrak{f}$ ,  $\alpha_i(x_0) = 1$  ( $i=1, \dots, n$ ),  $[x_0, e_0] = e_0$ ,  $[x_0, f_0] = -f_0$  である。 $\mathfrak{g}$  の表現  $V(\lambda)$  の  $\mathfrak{a}_0$  の制限を  $\rho$  とし,

$$\text{ch } V(\lambda) = \sum m_\lambda(\mu) e^\mu \quad \text{に対して}$$

$$\text{ch}_\rho(q) = \sum_\mu m_\lambda(\mu) q^{\mu(x_0)}$$

を考える。但し  $\mu(x_0) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  であるから  $\text{ch}_\rho(q)$  は  $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$  の元である。すると  $\dim_{\mathfrak{g}} V(\lambda)$  の定義から

$$\dim_{\mathfrak{g}} V(\lambda) = q^{\lambda(x_0)} \text{ch}_\rho(q^{-1}) \quad \dots (*)$$

を得る。一方  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の表現論で周知のようた

$$\text{ch}_\rho(q) = a_{-m} q^{-m} + a_{-m+1} q^{-m+1} + \dots + a_m q^m$$

( $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ ) の形で, その係数  $a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, a_m$  は

symmetricかつ unimodal である。よって (\*) を用いれば命題 1 が得られる。

### § 4. 命題 2 の証明

Weyl の指標公式から次式が導びかれる。と同様の考え方をする。指標公式は Weyl 群  $W$  を用いて

$$\left( \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\delta} \right) \text{ch } V(\lambda) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\delta)}$$

と書かれる。(  $\varepsilon(w) = \det(w) = (-1)^{\ell(w)}$ ,  $\ell(w)$  は  $W$  の生成元  $w_{\alpha_1}, \dots, w_{\alpha_n}$  に関する  $w$  の長さ。) 上式より

$$e^{-\lambda} \text{ch } V(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\delta) - (\lambda+\delta)}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\delta - \delta}} \dots (1)$$

を得る。今記号  $N_\mu$  ( $\mu \in \Lambda^+$ ) を  $N_\mu = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\mu) - \mu}$  で定義すれば (1) は

$$e^{-\lambda} \text{ch } V(\lambda) = \frac{N_{\lambda+\delta}}{N_\delta} \dots (2)$$

となる。今  $\mathbb{Z}[\Lambda]$  の部分環  $A = \mathbb{Z}[e^{-\alpha_1}, \dots, e^{-\alpha_n}]$  を考える。すると各  $\mu \in \Lambda^+$  と各  $w \in W$  に対して  $\mu - w(\mu)$  は  $\Delta^+$  の元々の和となるから,  $N_\mu \in A$  である。また  $V(\lambda)$  中に登場するどの weight も  $\lambda - (k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n)$  ( $\forall k_i \in \mathbb{Z}_+$ ) の形であつたから, (2) の左辺も  $\in A$  である。そこで環準同型  $F_\lambda: A \rightarrow \mathbb{Z}[q]$  を  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  に対して次式で定義する:

$$F_\lambda(e^{-\alpha_i}) = q^{\lambda_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

( $e^{-\alpha_1}, \dots, e^{-\alpha_n}$  が代数的に独立故, 上の  $F_\lambda$  は well-defined!)  
 特に  $\lambda = (1, \dots, 1)$  の時  $F_\lambda$  を単に  $F$  と書く。  $F$  を (2) の両  
 辺に作用させると, 定義から直ちに

$$F(e^{-\lambda} \operatorname{ch} V(\lambda)) = \dim_{\mathbb{Q}} V(\lambda) \quad \dots (3)$$

を得る。よって命題 2 を示すには次の補題が云えればよい。

[補題]  $\mu \in \Lambda^+$  のとき

$$F(N_\mu) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - q^{\langle \mu, \alpha \rangle})$$

[証明]  $\Delta$  の dual root 系  $\Delta^*$  を考える:

$$\Delta^* = \{\alpha^* \mid \alpha \in \Delta\}, \text{ 但し } \alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$$

すると  $\alpha, \beta \in \Delta$  に対して  $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta) = (\alpha, \beta^*)$  と  
 なる。そして  $\Pi^* = \{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*\}$  は  $\Delta^*$  の基本ルート系  
 となる。  $\delta^* = \frac{1}{2} \sum_{\alpha^* \in (\Delta^*)^+} \alpha^*$  とおく。  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$  を  
 $\langle \lambda_i^*, \alpha_j^* \rangle = (\lambda_i^*, \alpha_j^*) = \delta_{ij}$  で定義する。前と同様に

$$\delta^* = \lambda_1^* + \dots + \lambda_n^*$$

と置く。

$\mu \in \Delta^+, w \in W$  に対して  $\mu - w(\mu) = k_1 \alpha_1 + \dots + k_n \alpha_n$   
 ( $\forall k_i \in \mathbb{Z}_+$ ) とおくと

$$\begin{aligned} F(N_\mu) &= F\left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\mu) - \mu}\right) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{\sum k_j} \\ &= \sum \varepsilon(w) q^{\langle \delta^*, \mu - w(\mu) \rangle} = \sum \varepsilon(w) q^{\langle \mu, \delta^* - w(\delta^*) \rangle} \end{aligned}$$

となる。今  $S = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  に対して 環準同型

$$F_{\Delta}^* : \mathbb{Z}[e^{-\alpha_1^*}, \dots, e^{-\alpha_n^*}] \rightarrow \mathbb{Z}[q]$$

を  $F_{\Delta}^*(e^{-\alpha_j^*}) = q^{\langle \mu, \alpha_j \rangle}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) で定義すれば, 上の  $F(N_{\mu})$  の式の右辺は  $= F_r^* \left( \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\delta^*) - \delta^*} \right)$  となる。但し

$$r = ((\mu, \alpha_1^*), \dots, (\mu, \alpha_n^*)) = (\langle \mu, \alpha_1 \rangle, \dots, \langle \mu, \alpha_n \rangle)$$

である。さて Weyl の分母公式

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\delta)} = e^{\delta} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})$$

をルート系  $\Delta^*$  に適用すると

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\delta^*) - \delta^*} = \prod_{\alpha^* \in (\Delta^*)^+} (1 - e^{-\alpha^*})$$

となる。一方  $(\Delta^*)^+ = (\Delta^+)^*$  故, 上述の  $F(N_{\mu})$  の表示式と  $\Delta^*$  の Weyl の分母公式とから

$$F(N_{\mu}) = F_r^* \left( \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha^*}) \right) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - q^{\langle \mu, \alpha \rangle})$$

が出る。よって証明された。

### [参考文献]

- [1] R. P. Stanley, Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property, SIAM. J. Algebraic and Discrete Methods, 1, 1980, 168-184
- [2] R. P. Stanley, Unimodal sequences arising from Lie algebras, Combinatorics, Representation Theory and statistical methods in Groups, Lecture Notes

- in Pure and Applied Mathematics, 57, 1980,  
Dekker, pp. 127-136
- [3] R. A. Proctor, Representations of  $sl(2, \mathbb{C})$  on  
posets and the Sperner property, SIAM. J. Alg.  
Disc. Meth. 3, 1982, 275-280
- [4] E. B. Dynkin, Some properties of the weight system  
of a linear representation of semisimple Lie group,  
Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 71, 1950, 221-224
- [5] E. B. Dynkin, The maximal subgroups of the  
classical groups, Amer. Math. Soc. Transl. 6, 1957, 245-378
- [6] 雨宮一郎・岩坂長慶・小池和彦, On some generali-  
zation of B. Kostant's partition function, Progress in  
Math. 14, 1981, 1-20
- [7] B. Kostant, The principal three-dimensional sub-  
groups and the Betti numbers of a complex simple  
Lie group, Amer. J. Math. 81, 1959, 973-1032