

有理型関数の Borel 変換

信大 理学部 浅田 明

§ 0. 正則関数の Borel 変換

$\mathcal{O}^n$ を $\mathbb{C}^n$ の原点での正則関数 (の芽) の環, $\varphi(z) = \sum a_I z^I \in \mathcal{O}^n$, $I = (i_1, \dots, i_n)$, とした時その Borel 変換 $\mathcal{B}[\varphi]$ は

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathcal{B}[\varphi] &= \sum (a_I / I!) z^I, \quad I! = i_1! \cdots i_n!, \\ &= 1 / (2\pi\sqrt{-1})^n \int_{\gamma} \varphi(\xi) / \xi \cdot \exp(z/\xi) d\xi, \\ \gamma &= \{z \mid |z_i| = \varepsilon_i\}, \quad z/\xi = z_1/\xi_1 + \cdots + z_n/\xi_n, \end{aligned}$$

で与えられる.

例 1. $\mathcal{B}[(1 - a\xi^m)^{-1}] = E_m(az^m)$, $E_m(z) = \sum_n z^n / (m n)!$ は m 次 Mittag-Leffler 関数 ([3], Chap. XVIII).

例 2. $\mathcal{B}[e^{a\xi}] = J_0(\sqrt{2as})$, $J_0(z)$ は 0 次 Bessel 関数.

例 3. $\mathcal{B}[\log(\xi + \lambda)] = \gamma + \log z - E_1(-z/\lambda)$, γ は Euler 数で $E_1(-z) = \int_z^\infty e^{-t} t^{-1} dt = \gamma + \log z + \sum (-z)^n / n! n$.

定義から $\mathcal{B}$ は線形で関数の tensor 積を tensor 積に移すか、更に次の諸性質がある.

$$(2) \quad \mathcal{B}[\varphi \cdot \psi] = \mathcal{B}[\varphi] \# \mathcal{B}[\psi],$$

$$f \# g = \partial^n / \partial z_1 \cdots \partial z_n \int_0^{z_1} \cdots \int_0^{z_n} f(z-t) g(t) dt,$$

$$(3) \quad \partial / \partial z_i \mathcal{B}[\varphi] = \mathcal{B}[\zeta_i^{-1} \varphi], \quad \int_0^{z_i} \mathcal{B}[\varphi] d\zeta_i = \mathcal{B}[\zeta_i \varphi],$$

$$(4) \quad \zeta_i \mathcal{B}[\varphi] = \mathcal{B}[z_i \varphi + z_i^2 \partial \varphi / \partial z_i].$$

(2) から, $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}^n$ の指数型関数全体に $\#$ 積を入れた環とした時, $\mathcal{B}$ は $\mathbb{C}^n$ と $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ の (局所環としての位相を含めた) 環同型を与える.

尚 φ 及び超関数 T が適当な条件をみたせばこれらの Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と Borel 変換との間には

$$\mathcal{F}[T] = \mathcal{B}[\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} T_\zeta(\frac{1}{(1+2\pi\sqrt{-1}z\zeta)})],$$

$$\mathcal{B}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} J_0(\sqrt{-4\pi\sqrt{-1}x\zeta}) \mathcal{F}[\varphi](\zeta) d\zeta,$$

の関係がある. この第 2 の式から適当な超関数の class に対しても $\mathcal{B}[T]$ を

$$\mathcal{B}[T](f) = (2\pi\sqrt{-1})^n \mathcal{F}[T](H_0(f(x^2/4\pi\sqrt{-1})/x^2)(\sqrt{x})),$$

H_0 は 0 次の Hankel 変換, として Borel 変換が定義出来る.

§ 1. 有理型関数の Borel 変換.

Borel 変換の積分による定義は, φ が必ずしも正則でなくても意味がある. しかし積分の結果は積分路の取り方に因る. 例えば $\varphi = z_1 z_2 / (z_1 + z_2)$ とすれば

$$= 1/4\pi^2 \int_{\gamma} \varphi / \zeta \cdot \exp(z/\zeta) d\zeta = z_2,$$

$$- 1/4 \pi^2 \int_{\gamma_2} \varphi/\xi \cdot \exp(z/\xi) d\xi = z_1,$$

$\gamma_1 = \{ |z_i| = \varepsilon_i, \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \}, \quad \gamma_2 = \{ |z_i| = \varepsilon_i, \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \},$ となる.

φ を原点の近傍 U で有理型, $\varphi/z_1 \cdots z_n$ の特異点集合を Y , 原点での $U - Y$ の局所 homology 群を $H_{0,n}(U - Y, \mathbb{C})$ と書く. γ を $H_{0,n}(U - Y, \mathbb{C})$ の生成元の代表とする時, γ に関する φ の Borel 変換 $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ を

$$(5) \quad \mathcal{B}_\gamma[\varphi] = 1/(2\pi \sqrt{-1})^n \int_\gamma \varphi(\xi)/\xi \cdot \exp(z/\xi) d\xi,$$

で定義する. この時 $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ は指数型整関数であり, 固定された γ に対して (2), (3), (4) が成り立つ.

注意. $(\varphi/\xi) e^{z/\xi} d\xi$ を $U - Y$ の n 次微分形式, $H_{0,n}(U - Y, \mathbb{C})$ の生成元を $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, その双対形式を ω_i とすれば

$$(\varphi/\xi) e^{z/\xi} d\xi = \sum \mathcal{B}_{\gamma_i}[\varphi] \omega_i + d\alpha$$

と書ける.

次に $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ を φ の級数展開から計算する為には, φ の Laurent 展開について調べる. 最初に $H_{0,n}(U - Y, \mathbb{C})$ は Stein 多様体の homology 群の極限となるから (適当な座標変換によって) $\gamma = \{ w \mid |w_i| = \varepsilon_i \}$ と書ける事, 及び $\gamma = \{ w \mid |w_i| = \varepsilon_i \}$ と $\gamma' = \{ w \mid |w_i| = \varepsilon'_i \}$ が homologous, 且 $\varepsilon_i > \varepsilon'_i, 1 \leq i \leq n$, であれば φ は $\{ w \mid \varepsilon_i > |w_i| > \varepsilon'_i \}$ で (w の級数として) Laurent 展開出来る事を注意する. z と w の間には正則変換だから, w による Laurent 展開から z による (一般には 2^n 種類の)

Laurent 展開が得られる. w による Laurent 展開がどれだけ表はれるかは次の補題から解る.

補題 1. $f(z)$ が $U - Y$ で正則の時, Y で定まる U の部分開集合 $V \ni 0$ と V の $(2m-1)$ 次元定解折的部分集合 Γ とがあって, $V - \Gamma$ の連結成分は有限個, 且 D_i が $V - \Gamma$ の連結成分なら $0 \in \overline{D_i}$ で f はどの D_i の上でも同じ変数で Laurent 展開可能になる.

証明. Y は $w_n^m + g_1(w_1, \dots, w_{n-1})w_n^{m-1} + \dots + g_m(w_1, \dots, w_{n-1}) = 0$ で与えられると仮定して良い. f が $U - Y$ で有理型の時補題は $1/(w_n^m + \dots + g_m)$ の Laurent 展開について Γ, D_i が定まれば正しい. g_i は正則だから帰納法の都合で $f = 1/(w_n^m + h_1 w_n^{m-1} + \dots)$, $h_1, \dots, h_m$ は $w_1, \dots, w_{n-1}$ について有理型, の時 Γ, D_i が定まる事を示す.

$n=1$ の時補題は正しいから $n=k-1$ 迄正しいとし $n=k$, $m=1$ とする. この時

$$\begin{aligned} f &= w_k^{-1} (1 + w_k^{-1} g_1)^{-1}, & |w_k| > |g_1|, \\ &= g_1^{-1} (1 + w_k g_1^{-1})^{-1}, & |w_k| < |g_1|, \end{aligned}$$

だから $\mathbb{C}^{k-1}$ で g_1 の零点及び特異点集合に対し定められた補題

の条件をみたす集合を V', Γ' とし, $B_\varepsilon = \{w_k \mid |w_k| < \varepsilon\}$ を

$V' \times B_\varepsilon \subset U$ となる様取れば, $V = V' \times B_\varepsilon$,

$\Gamma = \Gamma' \times B_\varepsilon \cup \{w \mid |w_k| = |g_1|\}$ とし補題が成立する. $m \leq$

$l-1$ 迄正しくとし, $w_k^l + h_s w_k^{l-1} + \dots + h_k = w_k^l + h_s u$, h_s キ 0 と置く. 仮定から $h_s u$ の零点及び特異点集合については補題は正しく, 集合 $V' \subset U$ 及び $\Gamma' \subset V'$ が定まる. この時

$$f = w_k^{-l} (1 + w_k^{-l} h_s u)^{-1}, \quad |w_k|^l > |h_s u|,$$

$$= (h_s u)^{-1} \{1 + w_k^l (h_s u)^{-1}\}^{-1}, \quad |w_k|^l < |h_s u|,$$

だから $V = V'$, $\Gamma = \Gamma' \cup \{w \mid |w_k|^l = |h_s u|\}$ と取れば補題が成立する (U の γ に特異点を持つ有理型関数に対して).

$\gamma = \{w \mid |w_k| = \varepsilon_k\}$, $\gamma' = \{w \mid |w_k| = \varepsilon'_k\}$ が共に D_0 に含まれ, U の γ に特異点を持つ全ての有理型形式 ω について $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$ だから γ と γ' は homologous で之より $U - \gamma$ で正則な関数は D_0 で w によって Laurent 展開出来る. 又 $\gamma \in D_0$, $\gamma' \in D_k$, $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$ なら $\int_\gamma \omega \neq \int_{\gamma'} \omega$ となる有理型形式が存在するから γ と γ' は homologous でない.

系. f が $U - \gamma$ で正則の時 f の原点の近傍での w による Laurent 展開は高々 $\dim \text{Hom}(U - \gamma, \mathbb{C})$ 種類である.

$\gamma \in D_0$ の時 D_0 を D_γ と書く. D_γ での f の w による Laurent 展開の係数は $a_{i_1 \dots i_n} = (2\pi\sqrt{-1})^{-n} \int_\gamma w_1^{-i_1-1} \dots w_n^{-i_n-1} f dw$ で与えられる. この f の Laurent 展開 $\sum a_{i_1 \dots i_n} w_1^{i_1} \dots w_n^{i_n}$ に対し

$$f_{0,\gamma} = \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} w_1^{i_1} \dots w_n^{i_n},$$

と置く. 特に $w = z$ であれば $\mathcal{B}_\gamma[f] = \mathcal{B}[f_{0,\gamma}]$ である.

同じ関数の異なる路に関する Borel 変換などの様な関係に

あるかは良く解らない。この問題は(定式化も充分ではないが)次の二つの問題と関係すると思はれる。

問題1. D_1 で収束する Laurent 級数が原点の近傍での有理型関数(又は μ - γ の正則関数)の Laurent 展開である爲の条件を求めよ。

問題2. D_1 と D_2 で収束する Laurent 級数が、同じ関数の Laurent 展開である爲の条件を求めよ。

1変数の時、[4] に有理関数になる爲の必要十分条件、[5] に有理型関数になる爲の必要条件がある事を、その他の文献と共に吉野氏から教えて頂いた。感謝します。

§2. 多価関数の Borel 変換

多価関数の Borel 変換を (2), (3), (4) をみたす様定義する事を目標とする。特に $\mathcal{B}[\log \xi] = y$ がその様に定義出来たとすれば $z y = \mathcal{B}[\log \xi] + z$ だから (3) により $y + z y' = y + 1$ となり $y = \log z + c$ となる。c は補題2からきまる。

補題2. γ を Euler 数とした時 (6) が成り立つ。

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n / n! (\log z)^{\#n} = e^{-\gamma t} / \Gamma(1+t) \cdot z^t.$$

証明. 最初 $\log \Gamma(1+t) = -\gamma t + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \zeta(m) / m t^m$ から

$$(7) \quad e^{-\gamma t} / \Gamma(1+t)$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{[n/2]} \sum_{2 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s, j_1 + \dots + j_s = n} (-1)^{n-s} \frac{\zeta(j_1) \dots \zeta(j_s)}{j_1 \dots j_s} \right\} t^n$$

となる事, 及び $2 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s$, $j_1 + \dots + j_s = n$ となる $j_1, \dots, j_s$ を固定した時

$$(8) \quad \sum_{\sigma \in \gamma_s} \frac{1}{j_{\sigma(1)} (j_{\sigma(1)} + j_{\sigma(2)}) \dots (j_{\sigma(1)} + \dots + j_{\sigma(s)})} = \frac{1}{j_1 j_2 \dots j_s}$$

となる事を注意する. (8) は $s=1$ の時正しいから帰納法に

$$\text{より } \sum_{\sigma(s)=k} \frac{1}{j_{\sigma(1)} \dots (j_{\sigma(1)} + \dots + j_{\sigma(s)})} = \frac{1}{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_s (j_{\sigma(1)} + \dots + j_{\sigma(s)})} = \frac{1}{n \cdot j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_s}$$

となり $\sum_{k=1}^n \frac{1}{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_s} = (j_1 + \dots + j_s) / j_1 \dots j_s$ から成立する.

$$\int_0^x \log(x-t) (\log t)^{n-1} dt = \log x \int_0^x (\log t)^{n-1} dt - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot x^{m/n}.$$

$\int_0^x t^m (\log t)^{n-1} dt$ だから $\log x \# (\log x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n a_{n,k} (\log x)^k$ と置けば

$$a_{n,n} = 1, \quad a_{n,n-1} = 0, \quad a_{n,0} = (-1)^{n-1} (n-1)! \zeta(n),$$

$$a_{n,k} = (n-1)! / k! (n-k-1)! \cdot a_{n-k,0}, \quad 2 \leq k \leq n-1,$$

となる. 之から $(\log x)^{\#n} = \sum_{k=0}^n b_{n,k} (\log x)^k$ と置けば

$$b_{n,n} = 1, \quad b_{n,n-1} = 0, \quad b_{n,k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} b_{n-k,0}, \quad 2 \leq k \leq n-1,$$

$$b_{n,0} = \sum_{s=1}^{[n/2]} \sum_{j_i \geq 2, j_1 + \dots + j_s = n} (-1)^{n-s} \frac{n! \zeta(j_1) \dots \zeta(j_s)}{j_1 (j_1 + j_2) \dots (j_1 + \dots + j_s)}, \quad n \geq 2,$$

となるが, (8) により $n \geq 2$ の時 $b_{n,0}/n!$ は $e^{-\gamma t} / \Gamma(1+t)$ の

Taylor 展開の n 次の項の係数に等しい. $e^{-\gamma t} / \Gamma(1+t)$ は

整数だから任意の $c > 0$ に対し $|b_{n,0}/n!| = o(c^n)$ で従って

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n! (\log x)^{\#n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n! \sum_{k=0}^n b_{n,k} (\log x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} k!/n! b_{n,k} t^{n-k} \right) t^k/k! (\log x)^k \\ &= (1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n,0}/n! t^n) \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n/n! (\log x)^n \right) \\ &= e^{-\gamma t} / \Gamma(1+t) x^t \end{aligned}$$

となり (6) が成り立つ.

定義. $\log z$ の Borel 変換を (9) で定義する.

$$(9) \quad \mathcal{B}[\log \zeta] = \log z + \gamma.$$

(9) から $\mathcal{B}[\log \zeta - \gamma] = \log z$, 之と (6) から $\mathcal{B}[e^{-\alpha \gamma} \zeta^{\alpha}] = e^{-\alpha \gamma} z^{\alpha} / \Gamma(1+\alpha)$ となるから

$$(10) \quad \mathcal{B}[\zeta^{\alpha}] = z^{\alpha} / \Gamma(1+\alpha), \quad \alpha \neq -1, -2, \dots,$$

である. 尚 $z^a \# z^b = \Gamma(a+1) \Gamma(b+1) / \Gamma(a+b+1) \cdot z^{a+b}$ から

$$(z^{1/p})^{\#p} = \{\Gamma(1+1/p)\}^p z \text{ となり (10) から}$$

$$(11) \quad (\mathcal{B}[\zeta^{1/p}])^{\#p} = \mathcal{B}[\zeta]$$

である.

又 (9) と (3) から正の整数 n に対し (12) が得られる.

$$(12) \quad \mathcal{B}[(-1)^{n-1}/(n-1)! \zeta^{-n} \log \zeta] = z^{-n}.$$

(9) は形式的な定義だが例 3 により $\operatorname{Re} \lambda z > 0$ であれば

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{B}[\log(\zeta + \lambda)] = \log z + \gamma,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{B}[(-1)^{n-1}/(n-1)! (\zeta + \lambda)^{-n} \log(\zeta + \lambda)] = z^{-n}$$

となり, この収束は $\arg \lambda$ が一定の時 $\{z \mid |z| > \varepsilon, \theta \leq \arg z \leq \theta'\}$, $\varepsilon > 0$, $-\pi/2 < \theta < \theta' < \pi/2$, で一様である.

又 [3] に従って $\int_{\alpha}^{(0,+)} f(s) ds$ で α から始まって原点を正の向きに一周し α に終る道の上での f の積分を表はせば公式

$$z^s / \Gamma(1+s) = 1/2\pi\sqrt{-1} \int_{\infty \exp i\delta}^{(0,+)} s^{s-1} \exp(z/s) ds,$$

$$\pi/2 + \delta < \arg z < 3/2\pi + \delta, \quad \delta \leq \arg s \leq 2\pi + \delta,$$

が成立するから (10) も或程度実質的な意味がある.

注意. (3) との関連で $f = \mathcal{B}[\varphi]$ の時 $(d/dz)^\alpha f = \mathcal{B}[s^{-\alpha}\varphi]$, $\log(d/dz)f = -\mathcal{B}[\log s \cdot \varphi]$ と定義出来る. 特にこの定義で

$$(d/dz)^\alpha z^n = n! / \Gamma(n-\alpha+1) z^{n-\alpha},$$

$$\log(d/dz) z^n = -z^n [\log z + \{\gamma - (1 + 1/2 + \dots + 1/n)\}],$$

だから $\lim_{h \rightarrow 0} 1/h \{(d/dz)^h z^n - z^n\} = \log(d/dz) z^n$ となる.

$$\text{例 4. } d/dz^\nu J_0(2\sqrt{z})|_{z=(x/2)^2} = (x/2)^{-\nu} J_{-\nu}(x),$$

$$(\log d/dz) J_0(2\sqrt{z})|_{z=(x/2)^2} = -\pi/2 \cdot Y_0(x) + J_0(x) \log(1/2 x).$$

§ 3. 代数型関数の Borel 変換

φ を原点の近傍で代数型とすれば, φ の特異点及び分岐点の集合を Υ とした時 $\mathbb{C} - \Upsilon$ に補題 1 を使之, 之と $\{z \mid |z| = \varepsilon\}$ の基本群が $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ となる事から φ は各 D_i の上で Puiseux 展開出来る. (10) から Puiseux 級数 $\sum a_i z^{i/p}$, $i/p = (i/p_1, \dots, i_n/p_n)$ の Borel 変換は形式的に

$$(13) \quad B[\sum a_i \xi^{1/p}] = \sum a_i / \Gamma(1/p + 1) z^{1/p},$$

となる筈だが、 φ の $\gamma = \{z \mid |z| = \varepsilon\}$ の上での Puiseaux 展開が負の巾を含まなければ、Mittag-Leffler 函数を用いて φ の γ に関する (13) の意味の) Borel 変換 $B_\gamma[\varphi]$ は

$$(14) \quad B_\gamma[\varphi] = 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \int_\gamma \xi^{-1} \varphi(\xi_1^{1/p}, \dots, \xi_n^{1/p}) \prod_{i=1}^n E_{1/p_i}(z^{1/p_i}/\xi_i) d\xi,$$

と積分表示され、 $B_\gamma[\varphi]$ は (γ の上の Puiseaux 展開が負の巾を含まない時) 全平面に解析接続され、各分枝について $|B_\gamma[\varphi](x)| = O(e^{C\|x\|})$ となる。

(14) を負の巾を含む Puiseaux 級数に逆拡張する為、形式的巾級数 $\sum_{n \geq 0, p \nmid n} 1/\Gamma(1-n/p) x^n = \sum_{n \geq 0, p \nmid n} 1/\pi \Gamma(n/p) \sin(\pi n/p) x^n$ が $1/\pi \sum_{r=1}^{p-1} \sin(\pi r/p) \int_0^\infty t^{r/p-1} 1/(1+tx^p) e^{-t} dt$ の漸近展開になる事を利用する。 $t^{\alpha-1}/(1+t)$ の Laplace 変換は $\Gamma(\alpha) e^s \Gamma(1-\alpha, s)$, $\Gamma(1-\alpha, s) = \int_s^\infty e^{-t} t^{-\alpha} dt$, だから

$$\begin{aligned} & 1/\pi \sum_{r=1}^{p-1} \sin(\pi r/p) \int_0^\infty t^{r/p-1} 1/(1+tx^p) e^{-t} dt \\ &= 1/\pi \sum_{r=1}^{p-1} \sin(\pi r/p) \Gamma(r/p) \Gamma(1-r/p, x^{-p}) \exp(x^{-p}), \end{aligned}$$

となり、之は原点を除いて一価正則で原点に本性特異点を持つ函数に解析接続される。

定義. 正整数 p に対し

$$\begin{aligned} & E_{-1/p}(x) \\ &= 1/\pi \sum_{r=1}^{p-1} \sin(\pi r/p) \Gamma(r/p) \Gamma(1-r/p, x^{-p}) \exp(x^{-p}), \\ & F_p(x) = E_{1/p}(x) + E_{-1/p}(1/x), \end{aligned}$$

と定義する.

定義から

定理 1. 代数型関数 φ が $\gamma = \{z \mid |z_i| = \varepsilon_i\}$ の上で Puiseux 展開され, $\varphi(z_1^{p_1}, \dots, z_n^{p_n})$ が γ の上で一価正則であれば, φ の γ に関する ((13) の意味の) Borel 変換 $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ は

$$(15) \quad \mathcal{B}_\gamma[\varphi] = 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \int_\gamma s^{-1} \varphi(\xi_1^{p_1}, \dots, \xi_n^{p_n}) \prod_{i=1}^n F_p(z_i^{1/p_i}/\xi_i) d\xi$$

と積分表示される.

系. $\mathcal{B}_\gamma[\varphi]$ は全空間 (の Zariski 閉集合) に解析接続され, 各分枝について $|\mathcal{B}_\gamma[\varphi](x)| = O(e^{C\|x\|})$, $\|x\| \rightarrow \infty$, である.

有理型関数の場合と同様に, 代数型関数の Borel 変換も $H_{0,n}(U-\gamma, \mathbb{C})$ の生成元 γ の取り方に関係するが, この関係の仕方は良く解らない. この問題は有理型関数と同じ問題 1, 2 (但し Laurent 級数を Puiseux 級数に変える) を調べる必要があると思われる.

尚補題 1 により $U-\gamma \cup V-\Gamma = \cup D_\gamma$ とした時, $D_\gamma + \lambda = \{z + \lambda \mid z \in D_\gamma\}$ と書いて路 $\lambda = \lambda(t)$ が固定された路 γ について $0 \in D_\gamma + \lambda$, $0 < t < \varepsilon$, となる様選ばれれば, 例 3 により $\operatorname{Re} \lambda_1 z_1 > 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n z_n > 0$, $\lambda = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ の時

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{B}[\varphi(z + \lambda(t))] = \mathcal{B}_\gamma[\varphi]$$

となる. 又 $\gamma = \{z \mid z_1 \cdots z_n = 0\}$ であれば $\mathcal{B}[\varphi]$ は一意的に定まるが, 特に領域 $\{z \mid \pi/2 + \delta_i < \arg z_i < 3/2\pi + \delta_i\}$ では

$$\mathcal{B}[\varphi](z) = 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \int_{\infty \exp F \delta_1}^{(0,+)} \cdots \int_{\infty \exp F \delta_n}^{(0,+)} \varphi(\xi)/\xi \cdot \exp(z/\xi) d\xi,$$

と書ける.

注意. §2の定義から必ずしも代数型でない φ に対しても, Borel変換が定義出来る事がある. 例之は $\operatorname{Re} \alpha > 0$ の時 $\mathcal{B}[(1-\xi^\alpha)^{-1}] = E_\alpha(z^\alpha)$, α は Mittag-Leffler 函数, 又 f が指数型整函数なら $\mathcal{B}[f(\xi^{-1}) \log \xi] = \mathcal{B}^{-1}[f(-\xi)](z^{-1}) \cdot z^{-1}$ となる. 但し $\mathcal{B}^{-1}[f]$ は f の Borel 逆変換像である.

§4. 逆 Borel 変換.

指数型整函数 f に対しては逆 Borel 変換 $\mathcal{B}^{-1}[f]$ が

$$(16) \quad \mathcal{B}^{-1}[f] = \int_{\mathbb{R}_{n+}} e^{-t} f(zt) dt,$$

で与えられる事が知られており, 更に必ずしも指数型でない函数に対しても

$$\int_0^\infty e^{-t} \log(zt) dt = \log z - \gamma,$$

$$\int_0^\infty e^{-t} / (1 - \alpha zt) dt = 1/\alpha z \exp(-1/\alpha z) \operatorname{Ei}(1/\alpha z),$$

等の式が成立する. この第1式は (9) と矛盾しない.

(16)の右辺の積分が f に対して収束しなくても, 例之は $(\partial^I/\partial z^I)F = f$ で F に対しては $\mathcal{B}^{-1}[F]$ が定義出来れば $\mathcal{B}[z^{-I}\mathcal{B}^{-1}[F]] = f$ だから, f の Borel 逆像は $z^{-I}\mathcal{B}^{-1}[F]$ で与えられる事も $\mathcal{B}^{-1}[f]$ と書く. この時は $\mathcal{B}^{-1}[f]$ は一意的ではない.

例5. $\mathcal{B}^{-1}[(1-\alpha\zeta)^{-m}] = (-1)^{m-1}/(m-1)! (\alpha z)^m e^{-(1/\alpha z)} E_1(1/\alpha z)$,
 $\mathcal{B}^{-1}[1/(\zeta-\alpha)] = -1/z e^{-\alpha/z} E_1(\alpha/z)$, $\alpha \neq 0$. 他方 $\alpha = 0$ の時
 $\mathcal{B}^{-1}[1/\zeta] = \log z/z$ で之は α について不連続だが

$$-1/z e^{-\alpha/z} E_1(\alpha/z) = \log z/z - (\gamma + \log(-\alpha))/z + O(|\alpha|),$$

であり $\mathcal{B}[(\gamma + \log(-\alpha))/\zeta] = 0$ だから $\text{mod. Ker } \mathcal{B}$ で連続になる.

同様に $\mathcal{B}^{-1}[\zeta^\alpha] = \Gamma(1+\alpha) z^\alpha$, $\mathcal{B}^{-1}[\zeta^{-m}] = (-1)^{m-1}/(m-1)! z^{-m} \log z$
 とすれば

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{-1}[\zeta^{-m+\varepsilon}] &= \pi / \Gamma(m-\varepsilon) \sin \pi(m-\varepsilon) z^{-m} + \\ &\quad + \pi \varepsilon / \Gamma(m-\varepsilon) \sin \pi(m-\varepsilon) z^{-m} \log z + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

だから $\mathcal{B}^{-1}$ は α について $\text{mod. Ker } \mathcal{B}$ で連続になる.

注意. $f(z)$ が有理型の場合は $\mathcal{B}^{-1}[\mathcal{B}_\gamma[f]] = f_{0,\gamma}$ で必ずしも f ではない.

$f(z)$ が有理型 (又は代数型) の時, $f(z)$ の特異点 (及び分岐点) の集合を Υ , $\Upsilon \cap \mathbb{C}^* \times \cdots \times \mathbb{C}^*$ から $S^1 \times \cdots \times S^1 = \{z \mid |z|=1\}$ への射影 $\pi: \pi(z) = (z/|z|)$, の像を Γ とすれば, $\arg z \in \Gamma$ の時 $|f(zt)| = O(e^{C\|t\|})$ であれば (16) によって $\mathcal{B}^{-1}[f]$ が定義出来る. $\mathbb{C}^n$ 内の π によって $S^1 \times \cdots \times S^1$ に 1 対 1 に写り Γ と異なる点 $\gamma(1/2)$ で交はる路 $\gamma(t)$ にあった時

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\mathcal{B}^{-1}[f](\gamma(1/2-\varepsilon)) - \mathcal{B}^{-1}[f](\gamma(1/2+\varepsilon))] \\ &= 1/(2\pi\sqrt{-1})^n \text{Res}_{\Upsilon, \gamma(1/2)}^n e^{-t} f(zt), \end{aligned}$$

だから, この時 $\mathcal{B}^{-1}[f]$ は $\mathbb{C}^n$ 上分岐した領域で定義された多価

関数になる. $S' \times \dots \times S' - \Gamma$ が連結でなければ $B^{-1}[f]$ は一意的ではない.

例 6. $B^{-1}[1/(\xi_1 - \xi_2)] = z_1 \log z_1 / (z_1 + z_2)$, 又は $-z_2 \log z_2 / (z_1 + z_2)$, この二種の関数は $\gamma_1 = \{ |z_1| = \varepsilon_1 > |z_2| = \varepsilon_2 \}$, $\gamma_2 = \{ |z_1| = \varepsilon_1 < |z_2| = \varepsilon_2 \}$ とした時

$$B_{\gamma_1}[\xi_1 \log \xi_1 / (\xi_1 + \xi_2)] = 1/(z_1 - z_2),$$

$$B_{\gamma_2}[-\xi_2 \log \xi_2 / (\xi_1 + \xi_2)] = 1/(z_1 - z_2),$$

となる. この意味で $B_{\gamma_1}^{-1}[1/(\xi_1 - \xi_2)] = z_1 \log z_1 / (z_1 + z_2)$, $B_{\gamma_2}^{-1}[1/(\xi_1 - \xi_2)] = -z_2 \log z_2 / (z_1 + z_2)$ と書く.

§ 5 応用例

1. (3) から定数係数偏微分作用素 $P(\partial/\partial z)$ については $P(\partial/\partial z) B_\gamma[\varphi] = B_\gamma[P(\xi^{-1})\varphi]$ となるから $B_\gamma[\varphi] = u$ であれば $B_\gamma[\varphi/P(\xi^{-1})]$ が $P(\partial/\partial z)f = u$ の解になるが γ の選び方は f の初期値と次の様に関係する.

定理 2. $P(\partial/\partial z) = \partial^m/\partial z_1^m + P_1(\partial/\partial z_2, \dots, \partial/\partial z_n) \partial^{m-1}/\partial z_1^{m-1} + \dots + P_m(\partial/\partial z_2, \dots, \partial/\partial z_n)$ とすれば, $1/(z \cdot P(z^{-1}))$ の特異点集合を γ とした時 $H_{0,n}(U - \gamma, \mathbb{C})$ の生成元 γ で, 代表系 $\{z \mid |z_1| = \varepsilon_1\} = \gamma$, 且 $\gamma' = \{z \mid |z_1| = \varepsilon'_1\}$, $\varepsilon'_1 < \varepsilon_1$, $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$, $i \geq 2$, なら γ と γ' は homologous となるものが存在し, この γ については

$$(17) \quad \partial^s/\partial z_1^s B_\gamma[\varphi/P(\xi^{-1})]|_{z_1=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq m-1,$$

である (但し φ は z_1 について正則とする) .

証明. 仮定から $P(z^{-1}) = z_1^{-m}(1 + z_1 P_1(z_2^{-1}, \dots, z_n^{-1}) + \dots + z_1^m P_m(z_2^{-1}, \dots, z_n^{-1})) = z_1^{-m}(1 + z_1 Q(z_1, z_2^{-1}, \dots, z_n^{-1}))$ で不等式 $|z_1 Q(z_1, z_2^{-1}, \dots, z_n^{-1})| < 1$ が $|z_1| = \varepsilon_i$ で成立すれば $|z_1| < \varepsilon_1$, $|z_1| = \varepsilon_i$, $i \geq 2$, でも成立するから γ の存在が解る. この時 φ が z_1 について正則なら $z_1^{-s} \varphi / P(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})$ の γ に属する Laurent 展開は z_1 の負の巾を含まないから, (5) により (16) が成立する.

注意. u が有理型 (又は代数型) であっても $\mathcal{B}_\gamma[\varphi] = u$ であれば $\mathcal{B}_\gamma[\varphi / P(z^{-1})]$ は $P(\partial/\partial z) f = u$ の解を与える. (もしこの時は $z_1^{-s} \varphi / P(z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})$ の γ に属する Laurent 展開 (Puiseux 展開) が z_1 の負の巾を含む事がある (又は $\log z_1$ の項を含む) から (17) は必ずしも成立しない.

尚一般に $P(z^{-1})$ の特異点及び零点集合を W とすると任意の複素数 α について $\{P(z^{-1})\}^\alpha$, 及び $\log \{P(z^{-1})\}$ の特異点 (及び分岐点) 集合は W に含まれるから, $\text{Hom}(U-W, \mathbb{C})$ の生成元 γ を固定した時 $\{P(\partial/\partial z)\}^\alpha \mathcal{B}_\gamma[\varphi] = \mathcal{B}_\gamma[P(z^{-1})^\alpha \varphi]$ で $\{P(\partial/\partial z)\}^\alpha$ が定義出来, $\log \{P(\partial/\partial z)\} \mathcal{B}_\gamma[\varphi] = \mathcal{B}_\gamma[\log \{P(z^{-1})\} \varphi]$ で定義される $\log \{P(\partial/\partial z)\}$ がその生成作用素になる. 但しこの時 u が一価でも非整数の α については $\{P(\partial/\partial z)\}^\alpha u$ は多価になる.

2. $P(\partial/\partial z)$ と r は定理 2 と同じとする. $P(\xi) = \prod_i (\xi_i + \sigma_i)^{r_i}$ とすれば

$$P(\xi^{-1}) = \xi_1^{-m} \prod_{r_1 + \dots + r_t = m} (1 + \xi_1 \sigma_i (\xi_2^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}))^{r_i}$$

だから任意の (特異点を持つ多価) 関数 $\varphi(\xi_2, \dots, \xi_n)$ に対し

$$P(\partial/\partial z) \mathcal{B}_r [(1 + \xi_1 \sigma_i)^{-s} \varphi] = 0, \quad s \leq r_i,$$

$$\partial^k / \partial z_1^k \mathcal{B}_r [(1 + \xi_1 \sigma_i)^{-s} \varphi] |_{z_1=0} = \mathcal{B}_{r'} [(s+k) \dots (k+1) \sigma_i^k \varphi_i],$$

となる. 但し $r = \{z \mid |z_i| = \varepsilon_i\}$ の時 $r' = \{(z_2, \dots, z_n) \mid |z_i| = \varepsilon_i, i \geq 2\}$

である. 従って $\mathcal{B}_{r'}[\varphi_i] = u_i$, $0 \leq j \leq m-1$, の時関数 $\varphi_{i,s}$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq s \leq r_i$, を連立方程式

$$\sum_{i=1}^t \sum_{s=1}^{r_i} (s+k) \dots (k+1) \sigma_i^k \varphi_{i,s} = \psi_k, \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

となる様撰べば (常に可能) $f = \mathcal{B}_r [\sum_{i=1}^t \sum_{s=1}^{r_i} (1 + \xi_1 \sigma_i)^{-s} \varphi_{i,s}]$ が方程式 $P(\partial/\partial z)f = 0$ の初期値 $\partial^j / \partial z_1^j f |_{z_1=0} = u_j$, $0 \leq j \leq m-1$, を満たす解になる. この場合 u_j は特異点 (及び分岐点) を持っても良い.

注意. 正規化定理を使う事により単一未知関数についての過剰決定系 (定数係数) の初期値問題についても同じ結果が得られる.

尚初期値が特異点を持つ時上記の方法で解を計算するには $\mathcal{B}[\xi^\alpha \log \xi]$ を計算する必要があるが, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ の時 $z^\alpha \# \log z = z^\alpha (\log z + 1/(\alpha+1) - \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha+1)/m(m+\alpha+1))$ だから (2) と (9), (10) により

$$(18) \quad B[\xi^\alpha \log \xi] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left\{ \log z + \gamma + \frac{1}{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{m(m+\alpha+1)} \right\},$$

$$\alpha \neq -1, -2, \dots,$$

である。

文献

- [1]. Asada, A.: Some extensions of Borel transformation, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 9 (1974), 71-89.
- [2]. ———: Borel transformation in non-analytic category, ibid. 12 (1977), 1-35.
- [3]. Erdélyi, A, et al.: Higher Transcendental Functions, I ~ III, New York, 1953.
- [4]. Pólya, G., - Szegő, G.: Problems and Theorems in Analysis, II, Berlin, 1976.
- [5]. Pommerenke, C.H.: Hankel determinants and meromorphic functions, Mathematika 16 (1969), 158-166.