

射影幾何上の QUADRIC と 3-DESIGN

早大 理工 藤原 良
群馬高専 須田 健二

1. 序論

$PG(n, S)$, S は奇素数の中, 上で次のように 2 次形式を 0 としたときの解の集合を QUADRIC Q_n とする.

$$Q_n = \{x; x'Ax = 0\}$$

x は $PG(n, S)$ 上の点のベクトル表現,

A は $GF(S)$ 上の $(n+1) \times (n+1)$ 行列.

もし, A に両辺から正則な行列をかけることにより, 正則な対角行列に変換できるなら,

$$T'AT = \begin{bmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{n+1} \end{bmatrix}$$

Q_n は NON-DEGENERATE QUADRIC と呼ぶ. そうでないとき DEGENERATE QUADRIC とする.

任意の $P \in Q_n$ に対し, TANGENT SPACE を次のように定義する.

$$\pi(P) = \{ x; x'(A+A')P=0, x \in PG(m, S) \}$$

$\mathbb{Q}_m$ が NON-DEGENERAT のとき TANGENT SPACE は $PG(m, S)$ 上の $(m-1)$ -flat となる。

$PG(2k-1, S)$ 上の NON-DEGENERAT QUADRIC が $(k-1)$ -flat を含み, それ以上の次元の flat を含まないとき, それを HYPERBOLIC (RULED) QUADRIC と呼ぶ。又 $(k-2)$ -flat を含み, それ以上の flat を含まないとき ELLIPTIC (NON-RULED) といふ。

NON-DEGENERAT QUADRIC に含まれる P -flat の数は次のような式で表わせる [1]。

$PG(2k, S)$ 上の QUADRIC z'' は

$$\prod_{r=0}^P \frac{(S^{2(k-P+r)} - 1)}{(S^{P+1-r} - 1)}, \quad P \leq k-1$$

$PG(2k-1, S)$ 上の ELLIPTIC z'' は

$$\prod_{r=0}^P \frac{(S^{2k-1-2P+2r} + S^{k-P+r-1} - S^{k-P+r} - 1)}{(S^{P+1-r} - 1)}, \quad P \leq k-2$$

$PG(2k, S)$ 上の HYPERBOLIC z'' は

$$\prod_{r=0}^P \frac{(S^{2k-1-2P+2r} - S^{k-P+r-1} + S^{k-P+r} - 1)}{(S^{P+1-r} - 1)}, \quad P \leq k-1$$

2. 定理

$\mathbb{Q}_n$ のどの3点も $PG(n, S)$ 上の同一直線上にない, ことと任意の $P \in \mathbb{Q}_n$ に対して $\pi(P) \cap \mathbb{Q}_n = \{P\}$ であることは同値である。

証明

$\mathbb{Q}_n$ のどの3点も同一直線上にないとする。 $\mathbb{Q}_n$ 上の任意の2点 P_0, P_1 に対して。

$\overline{P_0 P_1}$ 上の他の点を

$$P_\lambda = P_0 + \lambda P_1, \quad \lambda \neq 0$$

とすると, P_λ は $\mathbb{Q}_n$ 上にはないので

$$P_\lambda' A P_\lambda = P_0' A P_0 + \lambda (P_0' (A + A') P_1) + \lambda^2 P_1' A P_1 \neq 0$$

である。

$$P_0' A P_0 = P_1' A P_1 = 0$$

であるので

$$P_0' (A + A') P_1 \neq 0$$

となり, $P_0 \notin \pi(P_1)$ である。すなわち 2つ以上の $\mathbb{Q}_n$ の点が同一の TANGENT SPACE に含まれることはない。

逆に, 任意の $P_0 \in \mathbb{Q}_n$ に対して $\pi(P_0) \cap \mathbb{Q}_n = \{P_0\}$ であるとすると, どの $P_1 \in \mathbb{Q}_n, P_1 \neq P_0$ に対しても。

$$P_1' (A + A') P_0 \neq 0$$

であるので, $\overline{P_0 P_1}$ 上の他の点を $P_\lambda = P_0 + \lambda P_1, \lambda \neq 0$ と

すると

$$R_\lambda' A R_\lambda \neq 0$$

となる。ゆえに Q_n 上のどの3点も同一直線上にはない。□

3. 定理

Q_n を $PG(n, S)$ 上の NON-DEGENERATE QUADRIC とすると、任意の $P \in Q_n$ に対し、 $\pi(P)$ に含まれないで、 P を通る $PG(n, S)$ 上の他の全ての直線上には、 P 以外に必ず1つ Q_n と共有する点がある。

証明

$\pi(P)$ 上にない1つの点を P_1 とする。 $\overline{PP_1}$ 上の P 以外の点を

$$R_\lambda = P_1 + \lambda P$$

と表わすと

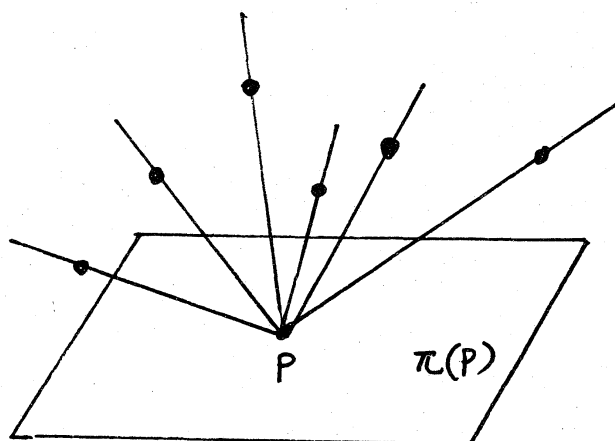
$$\begin{aligned} R_\lambda' A R_\lambda &= P_1' A P_1 + \lambda P_1' (A + A') P + \lambda^2 P' A P \\ &= P_1' A P_1 + \lambda P_1' (A + A') P \end{aligned}$$

このとき、 $P_1' (A + A') P \neq 0$ であるので $R_\lambda' A R_\lambda = 0$ となるような λ が唯一1つ存在する。

$$\lambda = P_1' A P_1 (P_1' (A + A') P)^{-1}$$

ゆえに $\overline{PP_1}$ 上には P 以外に、必ず1つ Q_n と共有する点 R_λ

が存在する。□



3.1 系

$PG(3, S)$ 上の ELIPTIC QUADRIC E_3 には TANGENT SPACE 以外の全ての平面には, 必ず $S+1$ 個の E_3 と共有する点が存在する。

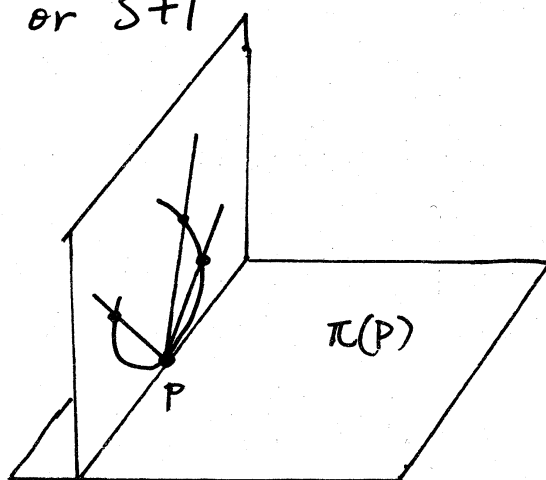
証明

H を $PG(3, S)$ 上の平面とすると, $E_3 \cap H \neq \emptyset$ なるとき, 系 3.1 より

$$|E_3 \cap H| = 1 \text{ or } S+1$$

がある。

なぜなら, $PG(3, S)$ 上の ELIPTIC QUADRIC は 2 定理の E_3 のどの 3 点も同一直線上にない性質を満す [2] ので $E_3 \cap \pi(P) = \{P\}$



である。よって, TANGENT SPACE となる平面の数は

E_3 の点の数に等しいから

$$S^2 + 1$$

である. $|E_3 \cap H| = S + 1$ とする平面の数は

$$\binom{S^2+1}{3} / \binom{S+1}{3} = S^3 + S$$

である. この2種類の平面で $S^3 + S^2 + S + 1$ 枚ある. この数は $PG(3, S)$ 上の全ての平面の数に等しいので, この2種の平面で全てである. $\square$

3.2 系.

$PG(3, S)$ 上の ELIPTIC QUADRIC E_3 を, TANGENT SPACE 以外の平面 H とすると, $H \cap E_3$ を 1 つの Block とする $3-(S^2+1, S+1, 1)$ DESIGN を作る.

証明.

系 3.1 より, $|H \cap E_3| = S + 1$ であるので, BLOCK SIZE は一定である. よして, E_3 上の任意の3点を指定するとこれらの点が張る平面が1つ定まる. よしてその上には必ず E_3 と共有する $S + 1$ 個の点が存在する. ゆえに

$$v = |E_3| = S^2 + 1$$

$$k = |E_3 \cap H| = S + 1$$

$$b = (S^3 + S^2 + S + 1) - (S^2 + 1) = S^3 + S$$

なる STEINER 3-DESIGN が構成される.

4. あすび

$PG(n, S)$ 上の QUADRIC は 3-LINEARY INDEPENDENT SET (k -ARC ともしう, k はその集合の濃度), つまり, どの 3 点も同一直線上にない点の集合と密接な関係があると思われる。たとえば, $PG(4, 3)$ 上の NON-DEGENERATE QUADRIC は 40 点, 40 直線からなっており, そのどの点でも 4 直線が交わった構造をもっている。この 40 点の中から半分の 20 点を適当な方法で選んで 20-ARC を作る事ができる。又, $PG(5, 3)$ 上の Elliptic QUADRIC は 112 点, 280 直線からなっており, そして, そのどの点も 10 直線が交わった構造をもつ。この 112 点の中から半分の 56 点を選んで, 56-ARC を作る事ができる。そして, その 56 点の任意の点に属する TANGENT SPACE には, 選ばれた点の内の 11 点が含まれており, その 11 点は, おそらく 4-INDEPENDENT SET となっていると思われる。

5. 参考文献

- [1] RAY-CHAUDHURI, D.K. SOME RESULTS ON QUADRICS IN FINITE PROJECTIVE GEOMETRY BASED ON GALOIS FIELD, CANA. J. OF MATH. VOL. 14 (1962)
- [2] BOSE, R.C. MATHEMATICAL THEORY OF THE SYMMETRICAL FACTORIAL DESIGN SANKHYA 8 (1947)