

制御系の可観測性について

京大工 得丸英勝

〃 足立紀彦

§ 1. はしがき

内部の構造が不明なシステム、いわゆる Black Box があ
り、我々が観測できる量は入力および出力とよばれる量だけ
であるとする。この入力と出力の関係を記述するために
システムの状態という概念を導入する。“状態”はシステムの
過去の挙動を集約したものであり、現時点での状態と以後の
入力が与えられるならば出力は一意的に決定される。この
状態・入力・出力の関係を表現するものがいわゆる制御系の
方程式である。この表現形式は系の特性と実際上の要求によ
って種々考えられる。入力と出力に関する情報によって、与
えられた系に一定の方程式に Identity される。今、何らかの
方法で制御方程式が得られたとする。このとき、得られた
方程式が与えられたシステムを表現するのに必要十分なもの
であるかということが問題となる。

"十分性"は状態方程式の解の一意性によって保証される。他方, "必要性"を検討するための一つの有効な概念が制御系の可制御性 (Controllability), 可観測性といった概念であると考えられる。これらはともに, システムを記述するのに導入された状態空間が必要以上に広くとられていないかを問題とするものである。簡単にいえば可制御性ということは状態空間のうち過去の入力の情報を含んでいない部分が存在するかどうかを問題とし, 可観測性は状態空間のうち出力に影響を及ぼさない部分が存在するかどうかを問題とするものである。状態方程式の解の一意性と, 可制御性, 可観測性が成立しているならば制御方程式け与えられたシステムを表現するのに"必要十分"であることが保証されるのである。

この可制御性, 可観測性の概念は R.E. Kalman によって導入されたもので現在では System theory の重要な分野となっている⁽¹⁾。これらの概念, キルが非線型系, あるいは Stochastic システムにどのような意義をもち, 拡張されるべきかということは問題であるが, ここでは主として可観測性をとり上げて, 最初に線型系について知られている結果を簡単に紹介して, つぎに非線形系への拡張の試みを述べることにする。以後取扱うシステムの常微分方程式によって表わされているものとする。

§ 2 線形系の可観測性

制御方程式は以下の如くである。

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (2.1)$$

$$y = C(t)x \quad (2.2)$$

ここで $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x \in R^n$ は状態ベクトル, $u \in R^r$ は操作入力, $y \in R^p$ は出力ベクトルである。可観測性を考える場合操作入力の項は本質的な問題としないので以下

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.3)$$

$$y = C(t)x \quad (2.4)$$

なるシステムについて考える。観測時間は一定として

$T = \{t: t_0 \leq t \leq t_1\}$ において出力 $y(t)$ が観測された時のデータによってシステムの $t=t_0$ における状態を決定できるかを考える。(2.3)の初期条件 $x(t_0) = x_0$ のもとでの解を $x(t; x_0)$ と表わすと

$$x(t; x_0) = X(t)x_0 \quad t \in T$$

ただし $n \times n$ 行列 $X(t)$ は (2.3) の基本行列である。すなわち

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = I$$

によって定義される。

システム (2.3), (2.4) の可観測性を以下の如く定義する。

定義 1 与えられた状態空間にたいしてある $\bar{x}$ が存在して

$$C(t)X(t;\bar{x}) \equiv C(t)X(t;\bar{x}) \quad t \in T$$
 が成り立つとき $\bar{x} = \bar{x}(t)$ とき状態空間は $(T$ に於て) 可観測であるという。全ての $\bar{x} \in R^n$ が可観測であるときシステム (2.3), (2.4) は可観測であるという。

この定義よりただちに、線形系に於ては原点 0 が可観測ならばシステムは可観測であることが分る。すなわち、

システムは $C(t)X(t)\bar{x} = 0 \quad t \in T$ が成り立つのは $\bar{x} = 0$ に限るときその時のみ可観測である。行列 $C(t)X(t)$ の n 個の列ベクトルが T 上で一次独立であることが可観測であるための必要十分条件である。この条件を別の形で述べれば $n \times n$ 行列 $M(t_0, t_1)$ を

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X'(t) C'(t) C(t) X(t) dt \quad (2.5)$$

と定義するとき、

補題 1 制御系 (2.3), (2.4) が可観測であるための必要十分条件は行列 $M(t_0, t_1)$ が Nonsingular なることである。

もし可観測でないならば R^n の部分空間 N を

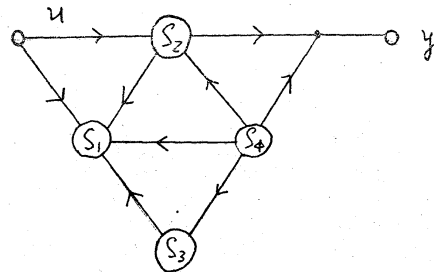
$$N \equiv \{x; C(t)X(t)x = 0 \quad t \in T\}$$

と定義し N による商空間 R^n/N を新しく $t=t_0$ における状態空間とすることができ、ときような条件のもとで R^n/N を状態空間とした制御方程式を考えることができる。

同様のことは可制御性についても考えることができる。たとえば time-invariant なシステムについては状態空間は可制御、可観測の組合せにたつて

$$R^m = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4$$

と表わされ、これらの関係は図式的に下の様に表示される。⁽¹⁾



この図より入-出力関係を記述するには必要十分な空間 R^m の部分空間 S_2 であることが分る。なお可制御性と可観測性については双対的関係があることが知られており、もとのシステムにたいして dual system が定義されて、もとのシステムの可制御、可観測という性質は dual system の可観測、可制御という性質になる。

5.3 線型系の $\{r, y\}$ -可観測性

前節では $y(t)$ が $[t_0, t_1]$ において連続的に観測可能なものと仮定してきたが実際の問題としては $y(t)$ は特定の瞬間にサンプリングによって観測可能な場合がある。このような $y(t)$ のサンプリングによってシステムの状態を決定できるかという問題を考える。

T における連続な n 次元ベクトル関数による空間を C^n とし
て C^n から R^m への変換 $P: C^n \rightarrow R^m$ を

$$P x(\cdot) = \{ y(z_1), \dots, y(z_m) \} \quad (3.1)$$

と定義する。ただし $z_i \in T$ ($i=1, 2, \dots, m$) は与えられた
 $\gamma = \Gamma = \Gamma$ の時刻である。

定義 2 $x \in R^m$ を与えられた状態として、ある $\bar{x} \in R^m$ には

$$P x(\cdot; \bar{x}) = P(x(\cdot; \bar{x}))$$

ならば $\bar{x} = \bar{x}$ の時 $\bar{x}$ は $\{z_i\}$ -可観測であるという。今 $\bar{x} \in R^m$ が $\{z_i\}$ -可観測ならばシステムが $\{z_i\}$ -可観測であるという。

ある $n \times n$ 行列 $Q(t)$ と定数ベクトル $c \in R^m$ には

$$\bar{P}: C^{n \times n} \rightarrow R^m$$

$$\bar{P} Q(\cdot) c = P(Q(\cdot) c)$$

によって定義すると上の定義よりたゞに次の結果を得る。

補題 2 制御系 (2.3), (2.4) が $\{z_i\}$ -可観測なるための必要十分条件は

$$\text{Det } \bar{P} x(\cdot) \neq 0 \quad (3.2)$$

である。

$\bar{P} x$ の具体的な形は

$$\bar{P} x = \begin{pmatrix} (z_1) x(z_1) \\ \vdots \\ (z_m) x(z_m) \end{pmatrix}$$

となる。

先の定義では $\{z_i\}$ は与えられたものと考えたが、逆に、 $\{z_i\}$ -可観測なる z_i ($i=1, \dots, n$) が存在するかどうかという問題が残る。これは n -可観測という概念で取扱われている。(2)

§4 非線形系の局所的可観測性

簡単のため time-invariant 系

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1)$$

$$y = c(x), \quad f(0)=0, \quad c(0)=0 \quad (4.2)$$

x : n vector, y : p vector, $f(x)$, $c(x)$ は連続微分可能な関数とする。

定義3 ある定数 $\varepsilon > 0$ が存在して $|z| < \varepsilon$, $|\bar{z}| < \varepsilon$ にはいる (4.1) の解を $x(t; z)$, $x(t; \bar{z})$ とおくと $t \in T$ にはいて

$$c(x(t; z)) = c(x(t; \bar{z}))$$

ならば $z = \bar{z}$ であるときシステム (4.1), (4.2) は局所的可観測であるという。

補題3 システム (4.1), (4.2) は

$$\text{rank} [H', A'H', \dots, A'^{m-1}H'] = n$$

ならば局所的可観測である。

たとえば $H = \frac{\partial c(0)}{\partial x}$, $A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$ である。

これは (4.1), (4.2) を原点のまわりで線形化してシステムが可観測ならばこのシステムは局所的可観測なことを意味する。

§ 5 準線形系の可観測性

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon \psi(x, t) \quad (5.1)$$

$$y = C(t)x, \quad (5.2)$$

によって表わされるシステムを考える。

記号を以下の如く定める。

$$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad |A| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|x(\cdot)\| = \max_t \{|x(t)|; t \in T\}, \quad \|A(\cdot)\| = \max_t \{|A(t)|; t \in T\}$$

C^n : 連続な n 次元ベクトル関数の空間 (ノルムは

$\|x(\cdot)\|$ によって定義される。

$C^{n \times n}$: T 上に定義された連続な $n \times n$ 行列の空間

(ノルムは $\|A(\cdot)\|$ によって定義される。

$D_0 \subset R^n$ をある領域として, D_0 における可観測性を以下の如く定義する。

定義4. $\bar{x}$ を与えられた状態として, ある $x \in D_0$ にたいして

$$C(t)x(t; \bar{x}) = C(t)x(t; x) \quad t \in T$$

ならば $\bar{x} = x$ の時 $\bar{x}$ は D_0 に於て可観測であるという。

任意の $x \in D_0$ が D_0 に於て可観測のときシステムは D_0 に於て可観測であるという。

定理1

システム (5.1), (5.2) の初期状態の領域を D_0 とし,

領域 D を 任意 $x \in D_0$ にたいして $x(t; x) \in D \quad t \in T$ なるよう

とする. (5.1), (5.2) は以下の条件を満足するものとする.

(i) ある定数 L が存在して, 任意の $x_1, x_2 \in D$ において,

$$|\varphi(x_1, t) - \varphi(x_2, t)| \leq L |x_1 - x_2| \quad t \in T,$$

(ii) 線形系
$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ y = C(t)x \end{cases}$$

は T において可観測である.

この時

$$\varepsilon \cdot \eta < \frac{2}{abd m \tau_0^2 L} \quad (5.3)$$

ならば システム (5.1), (5.2) は D_0 において可観測である. ここで, 定数 η, a, b, d, m は, 次のように定義されている.

$$\|X(\cdot)\| = a, \quad \|X^T(\cdot)\| = b, \quad \int_T |X^T(t)| dt = c, \quad \tau_0 = t_1 - t_0$$

$$|M(t_1, t_0)| = m, \quad \|H(\cdot)\| = d, \quad \eta = \exp(\varepsilon a c L)$$

$$H(t) = X^T(t) C^T(t) C(t) X(t)$$

証明 (5.1) の線形部分の基本行列を $X(t)$, とすると $x(t_0) = z$

$$\text{なる解は} \quad x(t; z) = X(t) \left\{ z + \varepsilon \int_{t_0}^t X^T(s) \varphi(x(s; z), s) ds \right\} \quad (5.4)$$

と表わされる. 今 $z, \bar{z} \in D_0$, $z \neq \bar{z}$ が存在して $z, \bar{z}$ は

対応する $y(t)$ が T に於て一致していると仮定する.

$$\begin{aligned}
& c(t) X(t) \left\{ \bar{z} + \varepsilon \int_{t_0}^t X^T(s) \psi(x(s; \bar{z}), s) ds \right\} \\
& = c(t) X(t) \left\{ \bar{z} + \varepsilon \int_{t_0}^t X^T(s) \psi(x(s; \bar{z}), s) ds \right\} \quad t \in T \quad (5.5)
\end{aligned}$$

(5.5) を書き直して

$$c(t) X(t) \left\{ (z - \bar{z}) + \varepsilon \int_{t_0}^t X^T(s) \left\{ \psi(x(s; z), s) - \psi(x(s; \bar{z}), s) \right\} ds \right\} = 0$$

両辺に $X'(t) c'(t)$ をかけ $t_0 \rightarrow t_1$ で積分すると

$$M(t_0, t_1) (z - \bar{z}) + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} X'(s) c'(s) c(s) X(s) \left\{ \int_{t_0}^s X^T(s) \left\{ \psi(x(s; z), s) - \psi(x(s; \bar{z}), s) \right\} ds \right\} ds = 0$$

定理の条件 (ii) に $\varepsilon > 0$ $M(t_0, t_1)$ は Nonsingular だから (補題 1)

$$z - \bar{z} = \varepsilon M^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^s H(s) X^T(s) \left\{ \psi(x(s; z), s) - \psi(x(s; \bar{z}), s) \right\} ds ds$$

条件 (i) $\varepsilon > 0$

$$|z - \bar{z}| \leq L \varepsilon |M^{-1}(t_0, t_1)| \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^s |H(s)| |X^T(s)| |x(s; z) - x(s; \bar{z})| ds ds$$

より $|x(t; z) - x(t; \bar{z})|$ を評価すると

$$|x(t; z) - x(t; \bar{z})| \leq a |z - \bar{z}| + \varepsilon \int_{t_0}^t L a |X^T(s)| |x(s; z) - x(s; \bar{z})| ds$$

$$\text{より, } |x(t; z) - x(t; \bar{z})| \leq a |z - \bar{z}| \exp \left\{ \varepsilon L a \int_{t_0}^t |X^T(s)| ds \right\}$$

$$\leq a |z - \bar{z}| \exp(\varepsilon L a c)$$

$$= \eta a |z - \bar{z}|$$

(5.6)

(5.6) より

$$|z - \bar{z}| \leq \varepsilon L a m m |z - \bar{z}| \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^s |H(s)| |X^T(s)| ds ds$$

$$\leq \frac{1}{2} m \varepsilon \eta \cdot a b d L \tau_0^2 |x - \bar{x}|$$

$$= \alpha |x - \bar{x}| \quad \text{for } \tau_0^2, \quad \alpha = \frac{1}{2} m \varepsilon \eta a b d L \tau_0^2$$

結局 $|x - \bar{x}| \leq \alpha |x - \bar{x}|$

(iii) $|x| > 1$ $0 < \alpha < 1$, $x \neq \bar{x}$ $\therefore$ 最初の仮定

に反する.

証明終り.

Ex. 1.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + \varepsilon(x_1^3/3) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \varepsilon(x_2^3/3) \end{cases} \quad (5.17)$$

$$y = x_1, \quad |x| < 10^{-2}$$

$$T = \{t: 0 \leq t \leq 2\pi\} \quad \text{と } \mathbb{R}.$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$M(0.2\pi) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$$

$$D_0 = \{x: |x| < 0.2\}, \quad D = \{x: |x| < 1\} \quad \text{と } \mathbb{R} \text{ と}$$

$$a = b = 2\sqrt{2}, \quad c = 16, \quad m = \frac{2}{\pi}, \quad d = 2, \quad \tau_0 = 2\pi, \quad L = 1$$

$$\eta \equiv \exp(\varepsilon a c L) < 1.57$$

≈ 1.57

$$|\varepsilon| < 3.2 \times 10^{-3}$$

より $D_0 = \{x: |x| < 0.2\}$ は $\mathbb{R}$ 上の可観測となる.

§6 非線形系の可観測性

記号は §5 と同様に定義されてゐるものとする。

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (6.1)$$

$$y = c(t)x \quad t \in T \quad (6.2)$$

定義 5 $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ が与えられた時 x が領域

$$D_\varepsilon = \{ \bar{x} : |x - \bar{x}| < \varepsilon \}$$

に於て可観測のとき x は ε -可観測であるという。

定理 2 (6.1) に於て

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \quad (i, j, k = 1, \dots, n)$$

が $T \times R^n$ に於て連続, とする。

$$(i) \quad \alpha(t) = \sup \{ |A(t, x)| : x \in R^n \} \quad (6.3)$$

$$\beta_k(t) = \sup \{ |b(t, x)| : |x| < k \} \quad (6.4)$$

が T に於て積分可能, かつ

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_T \beta_k(t) dt = 0 \quad (6.5)$$

ならば,

$$A(t, x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad b(t, x) \equiv f(t, x) - A(t, x)x$$

(ii) ある τ_j ($j=1, \dots, m$) に於て, 線形系

$$\frac{dx}{dt} = A(t, y(t))x \quad (6.6)$$

$$y(t) = c(t)x(t) \quad (6.7)$$

は任意の $y(\cdot) \in C^n$ に $t_2 \dots t_1 \in [t_1, t_2]$ - 可観測である.

$$(iii) \quad \varepsilon < \frac{1}{M} \exp\left(-\int_T \alpha(t) dt\right)$$

に $t_2 \dots t_1$

$$M = \left\{ ab(1 + ac\|P\|) \int_T |\bar{\beta}_k| dt \right.$$

$$\bar{\beta}_k^i(t) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \right| : |x| < K \right\}$$

$$P : C^n \rightarrow R^m \quad Px(\cdot) = (y(z_1), \dots, y(z_m))$$

$$\|P\| = \sup \{ \|Px(\cdot)\| : \|x\| \leq 1 \}$$

$$\max_{y \in C^n} \|X(\cdot; y(\cdot))\| = a, \quad \max_{y \in C^n} \|X^T(\cdot; y(\cdot))\| = b$$

$$\max_{y \in C^n} |(\bar{P}X(\cdot; y(\cdot)))^T| = c$$

$X(t; y(\cdot))$ は (6.6) の基本行列である.

また K は

$$a\|y\| + (1 + ac\|P\|)ab \int \beta_k(t) dt < K \quad (6.8)$$

$$(y_i = c(t_i)x(t_i; z) \quad i=1, \dots, m)$$

ただし $t_2 \dots t_1$ と $t_2 \dots t_1$ のときとする.

以上の条件が満足されるならば状態空間は ε -可観測

である.

証明 $x(t; y) = x^*(t)$ と記す.

$$\left. \begin{aligned} \text{境界値問題} \quad & \dot{x} = A(t, x)x + b(t, x) \\ & Px(0) = y \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

1) $\|x^*(\cdot) - x(\cdot)\| < \frac{1}{M}$ なる領域に於て $x^*(\cdot)$ 以外に解を持たないことを示す. $y(\cdot) \in C^n$ に $x(\cdot) \in C^n$ を対応させる写像 $S: C^n \rightarrow C^n$ を

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A(t, y(t))x + b(t, y(t)) \\ Px(0) &= y \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

により S を定義すると条件 (ii) により S は任意 $y(\cdot) \in C^n$ に対し S を定義される. (6.10) の解は

$$x(t) = X(t; y(\cdot)) \left[\bar{P}X(t) \right]^{-1} (Y - PX_0(t)) + x_0(t) \quad (6.11)$$

$$x_0(t) = X(t; y(\cdot)) \int_0^t X^T(s; y(\cdot)) b(s, y(s)) ds$$

と表わされる. 存在条件 (i), (ii) により

$$\max \|X(\cdot; y(\cdot))\|, \max \|X^T(\cdot; y(\cdot))\|$$

$$\max \|\bar{P}X\|^{-1} \quad \text{は存在する} \quad \text{と証明できる.}^{(3)}$$

したがって (6.11) より

$$\|x(\cdot)\| \leq aC \|y\| + (1+aC)ab \int_0^T |b(s, y(s))| ds$$

条件 (i) より (6.8) が成り立つように選ぶことができる

そのための K にたいして S は

$$D \equiv \{ y(\cdot) \in C^n; \|y\| \leq K \}$$

をそれ自身に移す写像となる.

$$x^*(\cdot) = x(\cdot; \gamma) \in D \quad \gamma \in \Gamma \quad x^0(\cdot) \in D \quad t_2, t_1, \dots, 1, 2$$

$$x^1 = S x^0, \dots, x^n = S x^{n-1}(\cdot), \dots, \quad \text{定義する.}$$

$$\dot{x}^n = A(t, x^{n-1}(t)) x^n + b(t, x^{n-1}(t)), \quad p x^n(\cdot) = \gamma$$

$$\dot{x}^* = A(t, x^*(t)) x^* + b(t, x^*(t)), \quad p x^* = \gamma$$

$$\Delta x^n(t) = x^*(t) - x^n(t) \quad \text{定義する}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{x}^n(t) &= A(t, x^{n-1}(t)) \Delta x^n(t) + \bar{b}^{n-1}(t, \Delta x^{n-1}) \\ p \Delta x^n(\cdot) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

が成り立つ。 $t_2 \in I$

$$\bar{b}_i^{n-1}(t, \Delta x^{n-1}) = \sum_{k,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k} \bigg|_{x=\theta_i} (x_j^* - x_j^{n-1})(x_k^* - x_k^{n-1})$$

$$\theta_i = x^{n-1} + h_i (x^* - x^{n-1})$$

$$|h_i| \leq 1,$$

(6.12) の解は

$$\Delta x^n(t) = X(t; x^{n-1}(\cdot)) \left\{ \left[\bar{P} X(t; x^{n-1}(\cdot)) \right]^{-1} \left[-P \right]_{t_1}^t X(t; x^{n-1}(\cdot)) \right.$$

$$\left. X^{-1}(s; x^{n-1}(\cdot)) \bar{b}^{n-1}(s; \Delta x^{n-1}(s)) \right\} ds$$

$$+ \int_{t_1}^t X(t; x^{n-1}(\cdot)) X^{-1}(s; x^{n-1}(\cdot)) \bar{b}^{n-1}(s; \Delta x^{n-1}(s)) ds$$

$$\|\Delta x^n\| \leq \left\{ (1 + \alpha c \|P\|) \alpha b \int_T |\bar{P}_k| dt \right\} \|\Delta x^{n-1}\|^2$$

$$= M \|\Delta x^{n-1}\|^2$$

$$\|\Delta x_n(\cdot)\| \leq M \|\Delta x_{n-1}\|^2 \dots < \frac{1}{M} \left\{ M \|x^0(\cdot) - x^*\| \right\}^{2^n}$$

1. 仮定より $\|x^0 - x^*\| < \frac{1}{M}$ ならば $x^0(\cdot), \dots, x^n(\cdot) \dots$
 は $x^*(\cdot)$ に収束する。(6.9) の解は S の平衡点である
 から $\|x^* - x\| < \frac{1}{M}$ なる領域に於ては $x^*(\cdot)$ が Unique
 な解である。

さて (6.9) の解 $x(t; \bar{z}), x(t; \bar{z})$ が存在し

$|z - \bar{z}| < \varepsilon$ が成立してゐるとする。

$$|x(t; z) - x(t; \bar{z})| \leq |z - \bar{z}| + \int_T^t \alpha(t) |x(t; z) - x(t; \bar{z})| dt$$

$$\text{よって } \|x(\cdot; z) - x(\cdot; \bar{z})\| \leq |z - \bar{z}| \exp \int_T^t \alpha(t) dt$$

$$\leq \varepsilon \exp \int_T^t \alpha(t) dt$$

$$\leq \frac{1}{M}$$

これは先の $\|x^* - x(\cdot)\| < \frac{1}{M}$ なる領域で解が
 一意的であるという結果に反する。 証明終り

References

- (1) R. E. Kalman Canonical Structure of Linear Dynamical Systems ; Proc. N.A.S. vol. 48 1962
- (2) T. D. GILCHRIST, n -Observability of Linear Systems IEEE Transactions on Ac. vol. AC-11 No. 3 1966
- (3) Z. OPIAL Linear Problems for Systems of N -L D. Eqs. J. of D. Eqs. 3, 1967