

$H^\infty(D)$ の二, 三の話題

和歌山大 教育 賞志 一男

§ 0. 序.

次の (1) ~ (3) について述べる.

(1) Lindelöf の定理. 関数 $f \in H^\infty(D)$ の境界関数 $f^*(e^{i\theta})$ とする. もし $\theta \rightarrow 0^+$ (または 0^-) のとき $\text{ess lim } f^*(e^{i\theta}) = 0$ ならば, 原点を 1 とする任意の Stolz 角領域 A に対して $\lim_{\substack{z \in A \\ z \rightarrow 1}} f(z) = 0$ となる. この定理の uniform algebra 的解釈について ([6]).

(2) 単位開円板 D の境界点 1 に近づく D の部分集合からなるフィルター Γ (例えば点 1 に nontangential に近づくことに対応するフィルター Γ_A) にそっての $H^\infty(D)$ の関数の極限について ([2]).

(3) $H^\infty(D)$ の極大イデアル空間の点 1 の $\check{V}$ の fiber 中にある Gleason part に関係する話について.

§ 1. Harmonic measure.

D 上で有界な正則関数の全体からなる Banach algebra を $H^\infty(D) = H^\infty$ で表わし, H^∞ の極大イデアル空間 $M(H^\infty)$ を $\bar{D}$ で表わす. D は $\bar{D}$ で稠密である. D 上の連続関数 f が $\bar{D}$ 上の連続関数に拡張できるとき, この拡張した関数を $\hat{f}$ で表わす. u を D 上の調和関数で上方(または下方)に有界であるとし, v を u の共役調和関数とすると, $f = \exp(u + iv)$ (または $1/f$) が H^∞ に属する. この事から u は $\bar{D}$ の実数値連続関数 $\hat{u}$ に拡張される.

集合 $A \subset \bar{D}$ の $\bar{D}$ における閉包を $\bar{A}$ で, また $\bar{A} \cap (\bar{D} - D)$ を A' で表わす. 特に $D' = \bar{D} - D$. また identity function $f(z) = z$ に対して, $\{z \in D : \hat{f}(z) = 1\} = D_1$ を点 1 上の fiber という.

単位円周 C 上の Lebesgue 測度 $d\theta$ による $L^\infty(d\theta) = L^\infty(C)$ で, $L^\infty(C)$ の極大イデアル空間を X で表わすと, $X \subset D'$ で H^∞ の Silov 境界と同一視される. $X_1 = X \cap D_1$ とおく. 関数 $u^* \in L^\infty(C)$ の Poisson 積分

$$u(z) = P_z(u^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\theta$$

$$(z = re^{i\varphi}, \quad 0 \leq r < 1)$$

は D 上の有界な複素調和関数である. $u^* \mapsto u^s = \hat{u}|_X$ なる写像によって $L^\infty(C)$ と $C(X)$ は Banach algebra として同型になる.

特に $u^* = \chi_A$ を $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 可測集合 A の特性関数とすると, u^s は X 上の clopen 集合 $A^s (= \{x \in X : \hat{\chi}_A = 1\})$, $\hat{\chi}_A$ は $\chi_A \in L^\infty(\mathbb{C})$ の Gelfand 表現) の特性関数になる.
 $u^* = \chi_A$ の Poisson 積分 $u(z) = \mu(z, A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_A(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} d\theta$
 $(z = re^{i\phi}, 0 \leq r < 1)$ は A の harmonic 測度である.

一般に $u^* \in L^\infty(\mathbb{C})$ に対しては

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} u^*(\xi) \mu(z, d\xi), \quad z \in \mathbb{D}$$

とせよ. (u^*, u, u^s) と $z \in \bar{\mathbb{D}}$ に対して, 写像 $u^s \mapsto \hat{u}(z)$ は $\mathbb{C}(X)$ 上の線形汎関数であって, X 上の確率測度 $\nu(z, \cdot)$ によって

$$\hat{u}(z) = \int_X u^s(\xi) \nu(z, d\xi) = \int_X \hat{u}(\xi) \nu(z, d\xi), \quad z \in \bar{\mathbb{D}}$$

と表わされる. 測度 $\nu(z, \cdot)$ は $(X$ 上の測度の vague 位相で) $z \in \bar{\mathbb{D}}$ の連続関数である.

$A^s (\subset X)$ が clopen 集合であるときは $\nu(\cdot, A^s) | \mathbb{D} = \mu(\cdot, A)$ は $\mathbb{D}$ 上の調和関数で, $\bar{\mathbb{D}}$ の連続関数 $\nu(\cdot, A^s) = \hat{\mu}(\cdot, A)$ に拡張される.

$f \in H^\infty$ に対して

$$\log |f(z)| \leq \int_{\mathbb{C}} \log |f^*(\xi)| \mu(z, d\xi), \quad z \in \mathbb{D}$$

または,

$$\log |\hat{f}(z)| \leq \int_X \log |\hat{f}(\xi)| \nu(z, d\xi), \quad z \in \bar{\mathbb{D}}$$

§ 2. Cluster sets.

Γ を D の部分集合 からなる filter で, ユークリッド極限 1 をもつものとする. $f \in H^\infty$ に対して $\bigcap_{A \in \Gamma} f(A)^-$ ($f(A)^-$ は $f(A)$ の閉包) を 1 における f の Γ cluster values の集合という. 特に f が identity function のときは $\Gamma' = \bigcap_{A \in \Gamma} f(A)^- = \bigcap_{A \in \Gamma} \bar{A}$ は D_1 のコンパクト集合である. Γ' の点を Γ 点という. $f \in H^\infty$ に対して, $\alpha \in \bigcap_{A \in \Gamma} f(A)^- \iff \alpha \in \hat{f}(\Gamma')$ であり, また $\lim_{\Gamma} f = \alpha \iff \hat{f}|_{\Gamma'} = \alpha$ である. B を D_1 の閉部分集合とするとき, B の $\bar{D}$ 近傍の D 上の trace からなる filter を $\Gamma(B)$ で表わす. このとき $B = \Gamma(B)'$ である. 一般に $\Gamma(\Gamma') \subset \Gamma$ であるが $\lim_{\Gamma} f = \alpha \iff \lim_{\Gamma(\Gamma')} f = \alpha$ が成り立つ.

§3. Lindelöf の定理.

Lindelöf の定理. $f \in H^\infty(D)$ の境界関数を $f^*(e^{i\theta})$ とする. もし $\theta \rightarrow 0^+$ (または 0^-) のとき $\text{ess lim } f^*(e^{i\theta}) = 0$ であるとする. このとき厚点を 1 とする任意の Stolz 角領域 S に対して $\lim_{\substack{z \in S \\ |z| \rightarrow 1}} f(z) = 0$ とする.

(注. 任意正数 ε に対して円周 C 上の 1 の任意の近傍 $U(1)$ が存在して $m(\{ |f^*| < \varepsilon \} \cap \{ M^+ \cap U(1) \}) = m(M^+ \cap U(1))$ となることは $\text{ess lim}_{\theta \rightarrow 0^+} f^*(e^{i\theta}) = 0$ を意味する. ただし, M^+ は C 上の弧 $i e^{i\theta_0}$ ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$) である.)

定理の解釈. $\mathcal{L} = \{ z \in D_1 - X_1 : \text{ess } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f^*(e^{i\theta}) = 0 \text{ (or } \theta \rightarrow 0^-) \Rightarrow \hat{f}(z) = 0 \}$ とおき, $\mathcal{L}$ の点を Lindelöf 点 といふ. また頂点を 1 とする Stolz 角領域 S と点 1 の (ユークリッド) 近傍系 $\mathcal{U}$ に対して, $\{S \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ によって生成される filter を $\mathcal{S}^\Gamma$ で表わし $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta} (\mathcal{S}^\Gamma)'$ ($= \bigcup_{\beta} S'$) とおき, $(\mathcal{S}^\Gamma)' = S'$ となることは容易にわかる). $\mathcal{S}$ に属する点を Stolz 点 といふ. 関数 $f \in H^\infty$ に対して

$$\lim_{\substack{z \in S \\ z \rightarrow 1}} f = \alpha \iff \lim_{\mathcal{S}^\Gamma} f = \alpha \iff \hat{f}|_{(\mathcal{S}^\Gamma)'} = \alpha \iff \hat{f}|_{\mathcal{S}'} = \alpha$$

であるから, 任意の Stolz 角領域 S に対して $\lim_{\substack{z \in S \\ z \rightarrow 1}} f = \alpha$ ということと $\hat{f}|_S = \alpha$ ということとは同値である. よって,

Lindelöf の定理は $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ と書き換えることができる.

$\mathcal{L}$ について. $\mathbb{C}$ 上の可測集合 M に対して $M_1^S = M^S \cap X_1$ とおくと, 任意の $f \in L^\infty(\mathbb{C})$ に対して

$$\hat{f}(M_1^S) = \{ \alpha : m(\{ |f - \alpha| < \varepsilon \} \cap (M \cap N(1))) > 0 \text{ for } \forall \varepsilon > 0, \forall N(1) (\mathbb{C} \text{ 上の点 } 1 \text{ の近傍}) \}$$

とある (ただし m は $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 測度).

$\mathbb{C}$ 上の弧 $M = \{ e^{i\theta} : 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \}$ に対して, $M_1^S = M^S \cap X_1$ を X_1 の上部 といふ. このとき 定理の仮定の部分 ($\text{ess } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f^*(e^{i\theta}) = 0$ as $\theta \rightarrow 0^+$ (or $\theta \rightarrow 0^-$)) は X_1 の上部 M_1^S に対して $\hat{f}(M_1^S) = \{0\}$ (or $\hat{f}(X_1 - M_1^S) = \{0\}$) となることを意味す

る。よって

$$\mathcal{L} = \{ z \in D_1 - X_1 : \hat{f} \equiv 0 \text{ on } M_1^S \text{ or } X_1 - M_1^S \Rightarrow \hat{f}(z) = 0 \}$$

となる。

δ について. $M = i\overline{e^{i\theta_0}}$ ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$) とする. $z_0 \in D$ に対して $\{z \in D : \mu(z, M) = \mu(z_0, M)\} = \beta$ は三点 $1, e^{i\theta_0}, z_0$ を通る円と D の共通部分であり, $z \in \beta$ に対して $\mu(z, M) = \frac{\delta}{\pi} \in (0, 1)$ である. (C. Carathéodory, Funktionentheorie I, Birkhäuser, Basel, 1950) ところで, δ は β と弧 $C - i\overline{e^{i\theta_0}}$ のなす角である. $\beta \cap D_1$ 上にある Stolz 点をとるとすると, ネット $\{z_\alpha\} (C \beta)$ が存在して $z_\alpha \rightarrow z$ となるから, $\mu(z_\alpha, M) \rightarrow \nu(z, M_1^S)$, ゆえに $\nu(z, M_1^S) = \delta/\pi \in (0, 1)$. このことから

$$\mathcal{S} = \{ z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1 \}$$

となる。

Lindelöf の定理の証明, すなわち $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ を示すために次の命題を用いる。

命題. M は $X (= M(\mathbb{D}(C)))$ 上の Borel 集合とする. H^∞ の関数 f が $\|f\| \leq 1$ かつ M 上で $|\hat{f}| \leq \varepsilon$ ならば

$$|\hat{f}(z)| \leq e^{\nu(z, M)} \quad \text{for } z \in \overline{D}$$

特に, M (または $X - M$) 上で $\hat{f} \equiv 0$ ならば, $0 < \nu(z, M) < 1$ なる $z \in \overline{D}$ に対して $\hat{f}(z) = 0$ となる。

証明. $z \in \overline{D}$ とする.

$$\begin{aligned} \log |\hat{f}(z)| &\leq \int_X \log |\hat{f}| \nu(z, d\xi) = \int_M \log |\hat{f}| \nu(z, d\xi) + \int_{X-M} \log |\hat{f}| \nu(z, d\xi) \\ &\leq \int_M \log |\hat{f}| \nu(z, d\xi) \leq (\log \varepsilon) \nu(z, M) = \log \varepsilon^{\nu(z, M)} \\ \therefore |\hat{f}(z)| &\leq \varepsilon^{\nu(z, M)} \quad (\text{終了}) \end{aligned}$$

この命題から直ちに $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ がわかる. (Lindelöf の定理の証明終り).

$M = \bigcap e^{i\theta_0}$ ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$) とする. z を $\overline{D}$ の点として, z の表現測度の (閉) support を $\mathcal{S}(z)$ で表わす.

$$\begin{aligned} z \in \text{hull } M_1^S &= \{z \in D_1 : |\hat{f}(z)| \leq \sup_{M_1^S} |\hat{f}| \text{ for } \forall f \in M^\infty\} \\ &\iff \mathcal{S}(z) \subset M_1^S \end{aligned}$$

よって,

$$z \notin \text{hull } M_1^S \iff 0 \leq \nu(z, M_1^S) < 1$$

$$\begin{aligned} z \notin \text{hull } (X_1 - M_1^S) &\iff 0 \leq \nu(z, X_1 - M_1^S) < 1 \\ &\therefore 0 < \nu(z, M_1^S) \end{aligned}$$

$$\therefore z \in (\text{hull } M_1^S)^c \cap (\text{hull } (X_1 - M_1^S))^c \iff 0 < \nu(z, M_1^S) < 1$$

$$\text{よって, } \mathcal{S} = (\text{hull } M_1^S)^c \cap (\text{hull } (X_1 - M_1^S))^c \text{ である.}$$

$\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{L}$ であることが証明されてゐる. (cf. [6])

§4. Nontangential points と Tangential points

D の部分集合 U が点 1 の削除された (deleted) nontangential

近傍であるとは、点 1 を頂点としたすべての Stolz 角領域 S に対して、点 1 を中心とする十分小さい円板内にある S の部分を U が含むときをいう。点 1 の削り取れた近傍からなる filter を $\mathcal{A}$ で表わす。 Γ_A' の点を non-tangential point という。

定理. (1) Stolz 点の集合 $\mathcal{S}$ の $\overline{D}$ における閉包は Γ_A' である。
したがって $\Gamma_A' = \mathcal{L}$ となる。

(2) $D' - D_1$ の $\overline{D}$ における閉包と Γ_A' は交わらない。

(3) $\mathcal{S} \subset D_1$ は D' の開集合である。

(4) Γ_A' は連結集合である。

証明. (1) 省略

(2) $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ を考えよと、 $D' - D_1$ 上では $|\hat{f}(z)| = 1$ であるから、 $\overline{D' - D_1}$ 上でも $|\hat{f}(z)| = 1$ となる。一方 $\mathcal{S}$ 上では $\hat{f} = 0$ であるから Γ_A' 上でも $\hat{f} = 0$ となる。

(3) $(\mathcal{S} \subset) \Gamma_A'$ は D' の開集合 $D' - (\overline{D' - D_1})$ に含まれ、また $\mathcal{S}$ は D_1 の開集合であることも既にみているから、

(4) 省略

(証了)。

D における調和変数 $u(z) = \arg(1-z)$ ($-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$) と考える。 D の部分集合 B が点 1 において C に接するとは

$\lim_{\substack{z \in B \\ z \rightarrow 1}} |u| = \frac{\pi}{2}$ ($\Leftrightarrow D-B$ が点 1 の削りかた nontangential 近傍である) のときを云う. また D_1 の点 z が tangential であるとは点 1 において C に接するある集合 B に対して, $z \in B'$ となっていることである. tangential points の集合を $\mathcal{T}$ で表わす.

定理. $D_1 = \Gamma_A' \cup \mathcal{T}$ かつ $\Gamma_A' \cap \mathcal{T} = \emptyset$ である.

定理. A を点 1 における削りかた nontangential 近傍とすると, $A \cup D_1$ は ($\bar{D}$ における) Γ_A' の近傍である. よって $\Gamma_A = \Gamma(\Gamma_A')$ である.

証明. A を点 1 における削りかた nontangential 近傍とすると $(D-A)'$ は tangential 点のみからなり, $\overline{D-A} \cap \Gamma_A' = \emptyset$ となる. また $\overline{D-D_1} \cap \Gamma_A' = \emptyset$ であることを証明しているから. (証明).

$\lim_{\Gamma_A} f = \alpha$ まうは " $\exists B \in \Gamma_A$, $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in B}} f(z) = \alpha$ となること が証明出来る. (このことを Γ_A は安定収束 (convergence stable) であるという). " $f \in H^\infty$ に対して $\lim_{\Gamma_A} f = \alpha$ とする. そうすると $\hat{f}|_{\Gamma_A'} = \alpha$ となる. $\Gamma_A' = \Gamma(\Gamma_A')$ であつたから, Γ_A' のある $\bar{D}$ 近傍 $U(\Gamma_A')$ があつて, $U(\Gamma_A')$ の D 上の trace $T = U(\Gamma_A') \cap D$ に対して $\lim_{\substack{z \in T \\ z \rightarrow 1}} f = \alpha$, よって $\hat{f}|_T = \alpha$. しかるに $T \supset U(\Gamma_A') \cap D$ であるから, Γ_A' の D_1 に向するある近傍上で $\hat{f} \equiv \alpha$ となる.

§5. L minimal filter と L maximal filter

Γ を D の部分集合からなる filter で ユークリッド 極限 1 をもつものとする. Γ が L minimal であるとは Γ より真に粗い ユークリッド 極限 1 をもつ filter Γ_1 で, $f \in H^\infty$ に対して $\lim_{\Gamma} f$ が存在するならば $\lim_{\Gamma_1} f$ も存在する という Γ_1 が存在しない ことである.

H^∞ の関数 f に対して, $\lim_{\Gamma} f = \alpha$ であることと $\lim_{\Gamma(\Gamma')} f = \alpha$ であることと 同値であるから, Γ が L minimal であるならば $\Gamma(\Gamma') = \Gamma$ となる.

D_1 の部分集合 A が L maximal であるとは, $A \subseteq A_1$ かつ $f \in H^\infty$, $f|_A = c$ (定数) ならば $f|_{A_1} = c$ となる A_1 が存在しない ことである. 次のことが成り立つ.

$$\Gamma: L \text{ minimal} \iff \Gamma = \Gamma(\Gamma'), \Gamma': L \text{ maximal}$$

任意個数の L maximal 集合の共通部分はまた L maximal 集合である. 有限個の L maximal 集合の和集合はまた L maximal 集合である.

定理 u を D 上の有界な調和関数で $a = \inf u < b = \sup u$ であるとする. このとき

$$\{z \in D_1; a < \hat{u}(z)\}^-, \{z \in D_1; \hat{u}(z) < b\}^- \\ \{z \in D_1; a < \hat{u}(z) < b\}^-$$

は L -maximal が空集合である。

D 上の調和関数 $u(z) = \arg(1-z)$ ($-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$) を考える。
 $\inf u = -\frac{\pi}{2}$, $\sup u = \frac{\pi}{2}$ で, $\{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\}^-$
 $= \bar{A}'$ であるから $\bar{A}'$ は L -maximal, よって $\bar{A}$ は L -minimal
 である。

§ 6. Fiber D_1 中にある Gleason part.

(一般論) コンパクトなハウスドルフ空間 X 上の uniform algebra A の極大イデアル空間 $M(A)$ の点 m を通る Gleason part $P(m)$ が nontrivial であるとする。さらに m の表現測度がただ一つであると仮定する。そうすると $P(m)$ の各要素 φ の表現測度もただ一つであるので, それをまた φ で表わすことにする。 A の $L^p(m)$ ノルムによる閉包を $H^p(m)$ ($p=\infty$ のときは w^* 閉包) で表わす。また Wermer の embedding function Z についての多項式の $L^p(m)$ ノルム閉包 ($p=\infty$ のときは w^* 閉包) を $\mathcal{H}^p$ で表わす。また $I^p = \{f \in H^p(m) : \int \bar{Z}^n f d\mu = 0, n=0, 1, 2, \dots\}$ とおく。このとき

$$H^p(m) = \mathcal{H}^p \oplus I^p$$

となる。ただし $\oplus$ は代数的直和である。

写像 $\sum_{n=1}^k a_n e^{in\theta} \mapsto \sum_{n=1}^k a_n Z^n$ は古典的 Hardy space

$H^p(d\theta)$ から $\mathcal{H}^p$ への isometrically isomorphic map に移した後

来る。

$\hat{Z}(\varphi) (= \int Z d\varphi)$ は $P(m)$ から D 上への一対一写像であり,
その逆写像 $\tau(z)$ は連続で, 関数 $f \in H^\infty(m)$ に対して

$$\hat{f}(\tau(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \int \bar{Z}^n f dm$$

となる (Wermer の定理)

このとき (集合として)

$$\hat{H}^\infty(m)|_{\tau(D)} = \mathcal{H}^\infty(\tau(D)) = H^\infty(D)$$

となる. (Cf. S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain invariant subspace of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebra, Pacif. J. Math. 30 (1969), 463—474) (一般論終り)

$\hat{H}^\infty(D)$ を fiber D_1 に制限することによって得られる algebra を A_1 で表わす.

D_1 の任意の一点 m の表現測度の閉 support $S(m)$ は A_1 の peak sets の積集合で $A = A_1|_{S(m)}$ とおくと $\log |A^{-1}| = C_R(S(m))$ となる. また m を通る Gleason part $P(m)$ の D_1 における閉包と $S(m)$ は交わらない.

D_1 の中に次のような m が存在する.

- (1) m を通る Gleason part $P(m)$ が nontrivial である.
- (2) Wermer の embedding function Z が $H^\infty(D)$ の関数であって, $\tau: D \rightarrow P(m)$ が同相写像である.

(3) 任意の $H^\infty(D)$ の関数 f に対して $\hat{f}|_D$ が $H^\infty(D)$ の関数であり, 逆に任意の $H^\infty(D)$ の関数 f に対してある関数 $g \in H^\infty(D)$ が存在して $\|g\| = \|f\|$, $\hat{g}|_D = f$ とする. 亦ち亦ち $A|P = H^\infty(D)$ とする. 逆に次の定理が成り立つ

定理 $A|P = H^\infty(D)$ のときは P と D は同相になる.

証明. $m \in P$ をとり, A の $L^\infty(m)$ の w^* 閉包を $H^\infty(m)$ で表わす. $\varphi \in P$ のとき $H^\infty(m) = H^\infty(\varphi)$ である.

$$\tilde{\varphi}(f) = \int f d\varphi, \quad f \in H^\infty(m)$$

によ, $\tilde{\cdot}$ 定義され $\tilde{\varphi}$ は $M(H^\infty(m))$ の要素で,

$$\mathcal{J}_0 = \{ \tilde{\varphi} : \varphi \in P(m) \}$$

は $M(H^\infty(m))$ の Gleason part である.

$$\begin{aligned} H^\infty(D) = A|P &= A|\mathcal{J}_0 \subset H^\infty(m)|\mathcal{J}_0 \\ &= \mathcal{H}^\infty|\mathcal{J}_0 = H^\infty(D) \end{aligned}$$

$$\text{から } A|\mathcal{J}_0 = \mathcal{H}^\infty|\mathcal{J}_0 \quad \therefore A|\mathcal{J}_0^- = \mathcal{H}^\infty|\mathcal{J}_0^-.$$

$\Phi \in M(H^\infty(m))$ に対して $\pi\Phi = \Phi|A$ によって π を定義すると, π は連続で,

$$\pi \mathcal{J}_0^- = \bar{P}$$

となる. ゆえに

$$\mathcal{H}^\infty|\mathcal{J}_0^- = A|\mathcal{J}_0^- = A|\pi\mathcal{J}_0^- = A|\bar{P}$$

となるから, π は $\mathcal{J}_0^-$ から $\bar{P}$ 上への一対一連続な写像である.

よって π は $\mathcal{D}$ から P 上への同相写像になる。一方 D と $\mathcal{D}$ とは同相であることが知られているから $\tau: D \rightarrow P$ は同相写像である。(証了)。

よって P と D が同相であることは $A(P) \cong H^\infty(D)$ とする。そのよりよい例は ([4], p. 109) にある。

文献

- [1] T. K. Boehme, M. Rosenfeld and Max. L. Weiss.
Relations between bounded analytic functions and
their boundary functions. J. London Math. Soc. (2),
1 (1969), 609-618.
- [2] J. L. Dool, Boundary approach filters for
analytic functions. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973),
187-217.
- [3] K. Hoffman, Banach space of analytic functions,
Prentice Hall 1962.
- [4] ———, Bounded analytic functions and
Gleason parts, Ann. Math. 86 (1967), 74-111.
- [5] M. Rosenfeld and Max. L. Weiss, Bounded
analytic functions tending radially to zero. Proc.
London Math. Soc. (3), 18 (1968), 714-726.

[6] M. Rosenfeld and Max. L. Weiss, A function algebra approach to a theorem of Lindelöf, J. London Math. Soc. (2) 2 (1970), 209 - 215.

[7] I. J. Scharf, Maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions, J. Math. Mech., 10 (1961), 735 - 746.