

Reflection Principle, Transfinite Induction, and Paris, Harrington Principle.

九大工学部 倉田令 = 邦夫

0. はじめに. Reflection Principle $RP[T]$

T を自然数論 PA にふくむ公理系とするとき

$$RP[T] : \forall x \Pr[T](\ulcorner \psi(x) \urcorner) \rightarrow \forall x \psi(x)$$

ここで x は自然数と重なる variable, $\Pr[T](\ulcorner \psi \urcorner)$ は $T \vdash \psi$ である
 かわる formula, $\psi(x)$ は $x \in \mathbb{N}$ である variable x に関する formula.

$\Pr[T](\ulcorner \psi(x) \urcorner)$ は $\Pr[T](\text{Sub}(\ulcorner \psi(x) \urcorner, \overline{N(x)}))$ である (formalize (7-19)
 ($N(x)$ は numeral $\bar{x}$ の gödel number)

である Reflection Principle である。

$RP[T]$ は次の $RP'[T]$ と同値である。

$$RP'[T] : \forall x (\Pr[T](\ulcorner \psi(x) \urcorner) \rightarrow \psi(x))$$

RP なることは RP' は Theory の soundness を主張する超数学
 的命題と coding の手段によって Theory 自身の中に移した
 ものである。 $RP[T]$ は T の中には証明不可能なことがある (Gödel
 の不完全性定理からわかる)。したがって $RP[T]$ は
 $\text{Con}[T]$ なると同値である (Gödel 的である)。

Hierarchy of $RP[T]$ $RP[T]$ は T に何加える公理である

は Scheme であり、 ψ の型に応じて RP_{Σ_k} , RP_{Π_k} ($k=0, 1, 2, \dots$) と書かれる。この ψ のあり方は hierarchy の構造を ψ によって β で示される。とくに $Con[T]$ は $RP_{\Pi_1}[T]$ に同値である。

Paris, Harrington Principle の位置 Paris principle (P) は Harrington Principle (H) は PA で証明できない。しかし coding による数学的命題として有名である。これは $Con[PA]$ を導くよりも強く、いづれも $RP_{\Sigma_1}[PA]$ と同値であることが §2 で示される。

Transfinite induction と同値 $RP[PA]$ は ε_0 -induction と同値であり、さらに ε_α -induction の場合に拡張される。

超数学の算術化としての $RP[PA]$ が超限帰納法と同視されることは、これは正しいことである。 ε_0 -induction から RP を導くには RP の内容的意味に於ける。証明論的方法によつて、cut-elimination theorem を用いて行なわれる。いわばこれらの結果は Gödelian-Gentzenian の合流である。

RP の上限 $PA_0 = PA$ から出発し、順序数 $\alpha < P_0$ が各々に RP を何回した場合の PA_α の限界が最後に考察される。

b) ある $S^{(n)}(z, x) \in \Pi_n$ があり、任意の $\psi(x) \in \Pi_n$ に対して $\psi \in$
 Σ かつ $Z \vdash \bar{S}^{(n)}(\bar{e}, \bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$

となる。また Σ かつ $RP_{\Pi_n}[T]$ は Σ の sentence

$$\forall z \forall x [Pr[T](S^{(n)}(z, x)) \rightarrow S^{(n)}(z, x)]$$

によって決まることがわかる。

c) a) の φ と b) の Σ の sentence Σ として $RP_{\Pi_n}[T]$ で決まることが
 成り立つ $T + RP_{\Pi_n}[T] + RP_{\Sigma_n}[T] \vdash RP_{\Sigma_n}(T + RP_{\Pi_n})$

かつ $T + RP_{\Pi_n}[T] \vdash RP_{\Sigma_n}[T]$ なることは

$$T + RP_{\Pi_n}[T] \vdash RP_{\Sigma_n}(T + RP_{\Pi_n}) \vdash Con[T + RP_{\Pi_n}]$$

となる。second incompleteness に反する。よって 1.4 が成り立つ。

系 $T + RP[T]$ と $T + RP_{\Sigma_n}[T]$ は決まることがわかる。これは成り立つ。

一般に $T + \Sigma' (\Sigma' \subset \Sigma_n)$ は決まることがわかる。これは成り立つ。

1.5. 1.2, 1.3 より $RP_{\Sigma_1}[T] \rightarrow Con[T]$ は Z で成り立つが 1.4 より

$$T + Con[T] \not\vdash RP_{\Sigma_1}[T]$$

2. Paris-Harrington Principle の位置

2.1. a) Harrington Principle (H)

$\forall e, k, r \exists M (M \xrightarrow{*} (k)_r)$ となるような任意の partition

$p: [M]^e \rightarrow r$ に対して $|H| \geq k, |H| \geq \min(H)$ となる homogeneous

set $H \subset M$ が成り立つ。

b) Paris Principle (P)

m -large の定義。1) M が 0-large とは $|M| \geq \min M$ である。

2.3. PA $\vdash (H)$ の導出

Theory T は次のように定義する。

$+$, $\times$, $<$, constant symbol $c_0, c_1, c_2, \dots$ (infinitely) $\in \mathcal{L}$ Language τ

Axiom (i) $(c_i)^2 < c_{i+1}$

(ii) $i < \aleph_k, \aleph_{k'}$ $\times$ limited formula $\psi(Y, Z)$ に対して

$$\forall Y < c_i [\psi(Y, c(\aleph_k)) \leftrightarrow \psi(Y, c(\aleph_{k'}))] \quad \text{where } \aleph_k, \aleph_{k'} \text{ is the same as } \aleph_k, \aleph_{k'}$$

$$c(\aleph_k) = c_{\aleph_1} \cdots c_{\aleph_k} \approx$$

(iii) $+$, $\times$, $<$ の defining equation $\times$ limited formula に対して induction.

a) $\text{Con}[T] \rightarrow \text{Con}[PA]$ is provable in PA.

これは次のように証明される。

$\mathcal{M} \models T$ の model $\times$ $I \in \mathcal{M}$ は $\{a \mid a < c_i \text{ for some } i\}$ $\times$ $\mathcal{J} = \langle T, +, \times, < \rangle$ は PA の model $\times$ $\langle \aleph_1, \aleph_2, \dots \rangle$ は PA の formula $\theta(Y)$ に対して $a < c_i$ $i < \aleph_k$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$

$$\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$$

である。 $\theta^*(Y, Z)$ は $\theta(Y)$ の quantifier $\forall x_r, \exists x_r \in \forall x_r < Z, \exists x_r < Z_r$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$

$\exists x_r < Z_r$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$

~~2.3~~ b) $(H) \Rightarrow \text{Con}[T]$

このことは、証明は(大沢)参照。 (H) は T の任意の

finite subset S に対して $\langle \omega, +, \times, <, x_0, \dots, x_{k-1} \rangle$ の Model $\times$ $\mathcal{J}$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$ $\times$ $\mathcal{J} \models \theta(a) \iff \mathcal{M} \models \theta^*(a, c(\aleph_k))$

の解釈である。

2.4 $PA \vdash (H) \rightarrow RP_{\Sigma_1}(PA)$

ψ は variable を含まない Σ_1 -formula である。

1° $\rightarrow \psi$ が真ならば $T + \rightarrow \psi$ は consistent である。

なぜならば b) の証明に於いて T の有限部分集合 S は $< \omega, +, \times$

$<, x_0, \dots, x_{n-1} >$ の $\#$, の $\exists$ について $\rightarrow \psi$ は ω で真である。

$S + \rightarrow \psi$ は consistent, ゆえに $T + \rightarrow \psi$ は consistent

2° $PA + \rightarrow \psi$ は consistent

$T + \rightarrow \psi$ は consistent であるから この model $\mathcal{Q}$ に対して $\rightarrow \psi$ は Π_1 -form

であるから a) の θ^* に対応して $(\rightarrow \psi)^*$ も真となる。したがって $\underbrace{2) a)}_{2.3}$ の逆

は成り立つ。PA のある model $\mathcal{J}$ に於いて $\rightarrow \psi$ は真となる。

ゆえに $PA + \rightarrow \psi$ は consistent. したがって $PA \vdash \psi$ である。 したがって

(H) の x に対して $\rightarrow \psi$ が真 $\Rightarrow PA \vdash \psi$ である。 したがって

$$(H) \Rightarrow (PA \vdash \psi \Rightarrow \psi \text{ は真})$$

$\psi(x)$ は Σ_1 -formula であるとして 任意の自然数 n に対して

$$(H) \Rightarrow PA \vdash \psi(\bar{n}) \Rightarrow \psi(n)$$

であるから PA を formalize して

$$(H), PA \vdash Pr[PA](\ulcorner \psi(x) \urcorner) \rightarrow \psi(x)$$

$$2.2 \text{ と } 2.4 \text{ より } PA \vdash (H) \leftrightarrow RP_{\Sigma_1}(PA)$$

が得られた。Paris principle (P) は $PA \vdash (P) \leftrightarrow RP_{\Sigma_1}(PA)$

が得られる。[Paris] 参照。系 2.12 (P) $\leftrightarrow$ (H) が得られる。

3 Reflection Principle & transfinite induction

3.1. ordinal number $< \Gamma_0$.

第 2 級順序数の集合 $\mathcal{O}$ には $\alpha \in \mathcal{O}$ に対して α の critical number の set $Cr(\alpha)$ と function $\Phi_\alpha : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ が定まるように定義する。

(1) $Cr(0)$ は ω^α の形の ordinal の全体

(2) Φ_α は $Cr(\alpha)$ の ordinal function, $\alpha \neq \beta$ のとき $Cr(\alpha) \cap Cr(\beta) = \emptyset$ であり Φ_α は isotonic function $\Phi_\alpha : \mathcal{O} \rightarrow Cr(\alpha)$.

(3) $Cr(\alpha)$ は Φ_β の fix point $\beta < \alpha$ の全体

$$Cr(\alpha) = \{ \eta; \Phi_\beta(\eta) = \eta \text{ for } \beta < \alpha \}$$

$$\Phi_\alpha(\beta) \in Cr(\beta) \text{ かつ } \Phi(0,0)=1, \Phi(0,1)=\omega, \Phi(0,\alpha)=\omega^\alpha,$$

$$\Phi(1,0) = \varepsilon_0 \text{ (1st } \varepsilon\text{-number)}, \Phi(1,\alpha) = \varepsilon_\alpha \text{ (}\alpha\text{-th } \varepsilon\text{-number)}$$

$$\Phi(\alpha,0) = \alpha \text{ かつ } \alpha \in Cr(\alpha) \text{ (strongly critical number である)}$$

strongly critical number の全体 $\Gamma_0 \in \mathcal{O}$ である。 $\tilde{\Gamma}_0 = \{ \alpha; \alpha < \Gamma_0 \}$ である。

$\tilde{\Gamma}_0$ は $0, \Phi(\alpha, \beta), +$ 及び $\times$ に関する閉集合であり $\mathbb{N}^+$ と同型である。

同型写像 $\tau : \mathbb{N}^+ \rightarrow \tilde{\Gamma}_0$ が存在する (Schütte 参照)

$$\tau : \mathbb{N}^+ \rightarrow \tilde{\Gamma}_0 \text{ は一対一対応}$$

primitive recursive predicate $<$ が τ に関して

$$n < m \text{ in } \mathbb{N}^+ \iff \tau(n) < \tau(m) \text{ in } \tilde{\Gamma}_0$$

$$\tau^{-1}(\alpha) = \bar{\alpha} \text{ for } \alpha \in \tilde{\Gamma}_0 \text{ かつ } \alpha < \tau \text{ である。 } n \hat{+} m = \overline{\tau(n) + \tau(m)},$$

$$\hat{\omega}^n = \overline{\omega^{\tau(n)}}, \hat{\omega}_n(m) = \overline{\omega_n(\tau(m))} \text{ (} \omega_n = \omega_n(\alpha) \text{ は } \omega_0(\alpha) = \alpha$$

$$\omega_{n+1}(\alpha) = \omega^{\omega_n(\alpha)} \text{) であり } n, m \text{ の primitive recursive function である。}$$

3.2 $\alpha \in \tilde{\Gamma}_0$ に対して PA_α を次のように定義する。

$$PA_0 = PA, \quad PA_{\alpha+1} = PA_\alpha + RP[PA_\alpha], \quad PA_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} PA_\alpha \quad (\beta: \text{limit}).$$

(注) 上の PA_α は constructive ordinal $d \in \mathcal{O}$ に対して F_α formal recursive progression PA_d とは異なる external τ によるものである。後者は formal-internal τ による d の定義に強く依存する。これについて別の機会に論じる。

3.3 Transfinite induction の定式化。

~~(4)~~ 以下 ϕ は変数 x の PA の formula とする。

ϕ は Progressive: $\forall x_2 (\forall x_1 \prec x_2 \phi(x_1) \rightarrow \phi(x_2))$. $\text{Prog}(\phi)$ と書く。

trans-induction up to t $\mathcal{I}(t, \phi) \equiv \text{Prog}(\phi) \rightarrow \forall x \prec t \phi(x)$

$$\mathcal{I}(\phi, t) \equiv \forall y (\forall x \prec y \phi(x) \rightarrow \forall x \prec y \hat{+} t \phi(x))$$

$$\sigma[\phi](z) \equiv \mathcal{I}(\phi, \hat{\omega}^z)$$

3.4 Transfinite induction の証明 (RP に依る)

$$(a) \quad PA_1 = PA + RP[PA] \vdash \mathcal{I}(\hat{\varepsilon}_0, \phi)$$

$$(b) \quad \beta < \alpha \text{ in } \tilde{\Gamma}_0 \text{ ならば } PA_\alpha \vdash \mathcal{I}(\hat{\varepsilon}_\beta, \phi)$$

[証明の要旨]

$$(c) \quad PA \vdash \text{Prog}(\phi) \rightarrow \text{Prog}(\sigma(\phi))$$

これを (a) によって任意の ϕ と自然数 n に対して。

$$(d) \quad PA \vdash \text{Prog}(\phi) \rightarrow \forall x \prec \hat{\omega}_n(\bar{0}) \phi(x) \quad (\equiv \mathcal{I}(\hat{\omega}_n(\bar{0}), \phi))$$

(e) 任意の $\alpha < \hat{\varepsilon}_0$ に対して α の primitive recursive function

$$\textcircled{1} n = n(\alpha) \text{ が定まり } \alpha < \hat{\omega}_n(\bar{0}) \text{ となる。}$$

14. x

$$PA \vdash \text{Pr}_{\text{log}}(\phi) \rightarrow \phi(a)$$

$$\hat{\pi} \vdash \bar{c} = 0 \text{ の証明自身, } PA_2 \text{ 形式化 } \vdash \vdash \text{ の } \tau$$

$$PA_1 \vdash \mathcal{J}(\hat{\mathcal{E}}_D, \Phi)$$

5. (1) 2. (b) $a \frac{1}{2}$ 12 や 12.1 (c) か 3 出 17 12 の = 2 5 ... 2

(d') $\exists \alpha'' \exists \beta \in \tilde{\Gamma}_0$ s.t. $\alpha'' \sim \beta$ in $\tilde{\mathcal{H}}$.

$$\text{任意 } \bar{a} \in \mathcal{A} \text{ 有 } \phi \models \bar{a} \text{ 且 } \text{PA} \vdash \mathcal{B}(\hat{\varepsilon}_{\bar{a}}, \phi) \Rightarrow \text{任意 } \bar{a} \in \mathcal{A} \text{ 有 } \phi \models \bar{a} \text{ 且 } \text{PA} \vdash \bar{a}$$

$$PA \vdash g(\tilde{w}_m(\hat{\varepsilon}_{\bar{s}} \hat{\tau} \bar{1}), \phi).$$

~~(e')~~ (e') $\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, a \in \hat{E}_\alpha$ s.t. $a, \tilde{a}$ primitive and $a \sim \tilde{a}$

$$\bar{\beta} < \bar{\alpha} \text{ и } n \leq 7) \quad a < \tilde{\omega}_n(\hat{\xi}_{\bar{\beta}} + \bar{t}), \quad \textcircled{0} \leq t_0 \leq 2.$$
$$(b) \text{ 且 } i = 12 \quad \alpha \in \tilde{\Gamma}_0 = \{ \gamma \mid \gamma(b) \in \text{定} \} \subset PA_{\alpha+1} + \mathcal{G}(\hat{\xi}_\alpha, \phi)$$

$\exists x \exists y (x \neq y \wedge \dots) = \text{true}$ (d') (e') (f) a formalization is $\vdash$
 $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \dots)$

注) $\phi \in \Sigma_n$ に対して $g(\hat{e}_0, \phi)$ は $RP_{\Sigma_{n+2}}$ 上の 2 点の集合である。

3.5 Reflection Principle の証明 (TI による)

Infinite system PA_ω . Axiom is variable $n \geq 1$, true $\exists \text{ PA}$ formula, rule $\leq$ is ω -rule $\leq$ $\vdash$. Gentzen style $\Rightarrow$ ∇ , Δ , $\exists$, $\forall$.

is Tait's system (Handbook D.2, 3.4, Z_∞) $\leq$ $\leq$ $\exists$. $=$ $\Rightarrow$ $\leq$ $\exists$

PA_ω cut-elimination theorem $\leq$ ∇ ∇ ∇ .

(a) $PA + (\phi) \nVdash (\hat{E}_\phi, \phi) \vdash RP(PA)$

[証明] sentence φ に対し.

$$PA \vdash \varphi \stackrel{(1)}{\Rightarrow} PA_\infty \vdash_n \varphi \stackrel{<\omega^2 (2)}{\Rightarrow} PA_\infty \vdash_0 \varphi \stackrel{<\varepsilon_0 (3)}{\Rightarrow} Tr_k(\ulcorner \varphi \urcorner) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \varphi$$

$PA_\infty \vdash_p^{\leq \delta} \varphi$ は $\exists \Gamma < \delta$, cutrank p の φ の証明がある $\Rightarrow \exists \Gamma \vdash \varphi$.

(1) は Schütte §21 lemma 2

(2) は cut elimination theorem であり ε_0 -induction に $\vdash$ である証明である. (上記 §22 lemma 4)

(3) は φ の論理記号が Δ_1 であること. φ の cutrank の証明がある場合 $\Rightarrow$ は partial truth definition Tr_k に $\vdash$ である φ の真偽に $\vdash$ である $\Rightarrow$ である. (4) は Tr_k の定義による.

φ のかわりに $\Phi(\bar{x})$ を考え $\vdash$ $\vdash \wedge x = x$ は formula

$$Pr[PA] (\ulcorner \Phi(\bar{x}) \urcorner \rightarrow \Phi(x))$$

が $PA + \varepsilon_0$ -induction に $\vdash$ である証明である $\Rightarrow$ である $\Rightarrow$ である.

$$(b) \quad PA + (\Phi) \mathcal{G}(\hat{\varepsilon}_\alpha, \Phi) \vdash RP(PA_\alpha)$$

α は実数である induction の証明である. $\vdash$ (b) の正しさを 3, 4

$$\wedge (b) \wedge \vdash \quad PA + (\Phi) \mathcal{G}(\hat{\varepsilon}_\beta, \Phi) (\beta < \alpha) \equiv PA_\alpha$$

であるから $\vdash$ である仮定である.

$$PA_\infty \vdash^{<\omega^2 + \omega\beta} \mathcal{G}(\hat{\varepsilon}_\beta, \Phi) \quad (\text{Schütte §21 lemma 5})$$

$\vdash$ である sentence φ に対し

$$PA_\alpha \vdash \varphi \stackrel{(1)}{\Rightarrow} PA_\infty \vdash_n \varphi \stackrel{<\omega^2 + \omega\alpha + \omega^2 (2)}{\Rightarrow} \vdash_0^{\varepsilon_\alpha} \varphi \stackrel{(3)}{\Rightarrow} Tr_k(\ulcorner \varphi \urcorner) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \varphi$$

(2) の証明は ε_α -induction が必要である. α は (a) の場合と

同様である.

Schütte §22. lemma 4

3.6 $RP(PA)$ の表と内題

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\Phi) \theta(\hat{\varepsilon}_0, \Phi) \leftrightarrow RP & \dashrightarrow & RP_{\Sigma_{k+1}} & \rightarrow & RP_{\Sigma_k} & \rightarrow & \dots \rightarrow RP_{\Sigma_1} \leftrightarrow (H) \leftrightarrow (P) \\
 & & \downarrow \swarrow & \uparrow \times & \downarrow & & \downarrow \times \\
 & & RP_{\Pi_{k+1}} & \rightarrow & RP_{\Pi_k} & \dashrightarrow & \dots \rightarrow RP_{\Pi_1} \leftrightarrow Con[PA]
 \end{array}$$

内題 $RP_{\Sigma_k} \quad k \geq 2 \quad RP_{\Pi_k} \quad k \geq 1$ と同値な $(H), (P)$ の k 個の数学的命題
 $\exists \pi_k$ の $\exists = \tau$

4 PA_α の境界

"Adding RP " による PA_α の構成は $PA_{\Gamma_0} = \bigcup_{\alpha < \Gamma_0} PA_\alpha$ であり、 $\exists \tau$ 系統 $\exists \tau$ が
 τ であり、途中 τ "より" 強い transfinite induction $\exists \tau < \tau$ が
 τ となる τ autonomous number in PA_{Γ_0} の概念 $\exists \tau < \lambda$
 $\exists \tau$.

4.1. Autonomous ordinal in PA_{Γ_0}

(1) $PA \vdash \Phi \theta(\tau, \Phi)$ となる $\tau < \varepsilon_0$ なる τ は autonomous in PA_{Γ_0}

(2) δ : auto in PA_{Γ_0} , $PA_{\delta+1} \vdash \Phi \theta(\bar{\tau}, \Phi)$, $\delta < \tau$ なる τ は auto in PA_{Γ_0}

また τ : auto in PA_∞ ならば $\tau < \varepsilon_0$ かつ τ なる

(2)' $\exists \delta$: auto in PA_∞ , $\delta < \tau$, $PA_\infty \vdash \Phi \theta(\bar{\tau}, \Phi)$

τ と定義する。

PA_{Γ_0} なる PA_∞ の autonomous number の全体は Γ_0 の section となる

$\exists \tau < \varepsilon_0$ なる τ なる τ なる auto-number の sup τ なる τ なる

$Aut(PA_{\Gamma_0}), Aut(PA_\infty)$ とする。

$Aut(PA_\infty) = \Phi(2, 0)$ であり τ なる τ なる τ なる (Schütte, Th 23.6).

$$4.2. \text{Aut}(PA_{P_0}) = \Phi(2, 0)$$

(a) $\delta \in \tilde{L}_0$ が PA_{P_0} 中 autonomous ならば PA_∞ 中 autonomous i.e. $\text{Aut}(PA_{P_0}) \leq \text{Aut}(PA_\infty)$

δ は $\mathbb{Q}$ 上の 節法に よる. $\varepsilon_0 \leq \delta < 1$ なる

δ が $\delta < \delta$ なる δ は auto in PA_{P_0} ,

$$PA_{\delta+1} \vdash (\phi) \theta(\bar{\tau}, \phi)$$

仮定によつて δ は auto in PA_∞

よつて $PA_{\delta+1} \equiv PA + (\phi)(\bar{\tau}, \phi)$ なる

$$PA_\delta + (\phi) \theta(\bar{\tau}, \phi) \vdash (\phi) \theta(\bar{\tau}, \phi)$$

δ auto in PA_∞ なる $\delta_0 > \varepsilon_0$ なる δ_0 なる δ_0 なる

$\delta_0 < \delta$ δ_0 auto in PA_∞ なる

$$PA_\infty \vdash^{\delta_0} (\phi) \theta(\bar{\tau}, \phi)$$

$$PA_\infty \vdash^{\omega^2} (\phi) \theta(\bar{\tau}, \phi)$$

$$\text{よつて } PA_\infty \vdash^{\delta_0 + \omega^2} (\phi) \theta(\bar{\tau}, \phi)$$

$\delta_0 + \omega^2$ は auto in PA_∞ なる $\delta_0 + \omega^2 < \delta$ なる δ は auto in PA_∞

$$\text{Aut}(PA_\infty) = \Phi(2, 0) \text{ なる } \text{Aut}(PA_{P_0}) \leq \Phi(2, 0)$$

$$(b) \quad \Phi(2, 0) \leq \text{Aut}(PA_{P_0})$$

$$\alpha_0 = \varepsilon_0 \quad \alpha_{n+1} = \varepsilon_{\alpha_n} = \Phi(1, \alpha_n) < \alpha_n < \alpha_{n+1}$$

$$3.4 \text{ によつて } PA_{\alpha_{n+1}} \vdash \theta(\hat{\varepsilon}_{\alpha_n}, \phi) \Leftrightarrow \theta(\bar{\alpha}_{n+1}, \phi)$$

α_n は auto in PA_{P_0}

$\delta < \Phi(2, 0)$ なる $\delta < \alpha_n$ なる δ なる

$$\delta \text{ は auto in } PA_{P_0} \text{ なる } \Phi(2, 0) \leq \text{Aut}(PA_{P_0})$$

文献

Reflection Principle の hierarchy については

- Handbook of Mathematical logic の D1

Paris principle については

- Paris: Some Independence Results for Peano Arithmetic

J. S. L. vol 43, 1978

~~Harrington~~

- 田中尚夫 "最近の Recursion Theory"

数解研講究録 336

Harrington Principle については

- Paris Harrington; A Mathematical Independence in Peano Arithmetic (Handbook —)

- 大塚茂生 Paris Harrington の結果については

数解研講究録 362

Σ -induction (の強) 係については

- G. Kreisel and A. Lévy Reflection Principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems

Math. Logik Grundlagen Math. 14. 1968

- Handbook の D2

その他に

- K. Schütte Proof Theory ~~Springer~~ Springer-Verlag