

強制磁気再結合の境界層理論

石澤明宏、徳田伸二¹⁾、若谷誠宏

京都大学大学院エネルギー科学研究科、¹⁾ 日本原子力研究所

Akihiro Ishizawa, Shinji Tokuda, Masahiro Wakatani

Graduate School of Energy Science, Kyoto University, Kyoto, 611-0011, Japan

*¹⁾Naka Fusion Research Establishment, Japan Atomic Energy Research Institute,
Ibaraki, 311-0193, Japan*

1 序論

プラズマ閉じ込めにおいて、磁気再結合は二種類ある。一つはテアリングモードのような不安定性による自発的な磁気再結合である [1]。もう一つは、この自発的な抵抗性モードに対して安定な磁場配位であっても、外から加わった摂動に対するプラズマの応答として、強制的に磁気再結合が起こる場合である [2]。これは強制磁気再結合と呼ばれる [3, 4]。自発的な磁気再結合 (以下、自由磁気再結合と呼ぶ) は、閉じ込め磁場のエネルギーに起因する。一方、強制磁気再結合は外から加わった摂動のエネルギーに起因する。

外から加わる摂動の例として、誤差磁場による境界摂動がある。トカマク型のプラズマ閉じ込めを行う場合、軸対称な磁場配位を用いる。しかし、現実の装置では磁場をつくるコイルの配置は完全に軸対称ではなく、理想的な軸対称磁場をつくることは不可能である。この軸対称な磁場配位からのずれは、誤差磁場と呼ばれる。この誤差磁場のような外部擾乱は、プラズマ境界に摂動を与える。その結果、プラズマ内部において磁気再結合が強制的に起こり、磁気島が形成される。そして、磁気島形成の結果、プラズマの閉じ込めが悪化し、閉じこめが消失する場合もある [5, 6]。また、高ベータによる高効率定常炉において閉じ込め劣化の原因となる新古典テアリングモード (NTM) 発生には、その種になる「種磁気島」が必要である [7]。その理由は、NTM はテアリングモードに対して安定な磁場配位で発生するからである。この種磁気島の大きさおよび Lundquist 数によって特徴付けられるその形成の早さが NTM の発生条件を規定する。そして、実験ではこの種磁気島形成が Lundquist 数に強く依存することが示されている [8]。この依存性を説明するため、種磁気島の形成過程を強制磁気再結合過程として考え、解析がなされている [9, 10]。これらの解析では、種磁気島は内部崩壊などの MHD 現象のトロイダルカップリングによって形成されると考えられ、このカップリングを境界摂動としてモデル化している。

宇宙プラズマにおける強制磁気再結合では、外から加わる力のエネルギーは、通常、平衡磁場のエネルギーに比べて小さいとは限らない。一方、この論文で議論する境界摂動による強制磁気再結合は、摂動の運動エネルギーが平衡磁場のもつエネルギーに比べ、非常に小さい。したがって、厳密には、宇宙プラズマにおける強制磁気再結合の解析には適用できない。しかし、テイラーのモデル [2] のように解析解が求まる場合があり、宇宙プラズマにおける強制磁気再結合の解析にも適用されている [11, 12]。

境界摂動に対するプラズマ内部の応答として、磁気再結合は中性面近傍の境界層と呼ばれる非常に薄い面において起こる。境界層では非理想効果が重要になり、理想オームの法則 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ が成立せず、一般化されたオームの法則 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{R}$ を用いる必要がある [13]。ここで、非理想効果 $\mathbf{R}$ はプラズマの電気抵抗のような散逸効果や、高温プラズマで重要になる電子慣性の効果のような非散逸効果を表す。この論文では電気抵抗の効果が重要なプラズマを考える。この効果により磁力線のプラズマへの凍り付きが破れる。そして、磁気再結合が起こり、磁力線のトポロジーが変わり、磁気島が形成される。また、強制磁気再結合の場合テアリングモードと異なり、外からプラズマを押しつけることによって生じる、境界層内部におけるプラズマの慣性の効果が重要になる。このため、後で示すように、強制磁気再結合は抵抗性内部キンクモードに似ている性質を持つ。実際、境界摂動が無い場合、この論文で示される漸近接続は一般的な抵抗性 MHD モードの分散関係式を与える。

強制磁気再結合の線形解析と自由磁気再結合の線形解析は大きく異なる。自由磁気再結合のようなモード成長の境界層解析は固有値問題になり、境界層内部の空間構造は同じ固有関数のまま増大または減少する。一方、強制磁気再結合のような加わった摂動に対する応答の境界層解析は初期値問題になる。初期値問題の解析においては、複素平面上の離散的な極の寄与のみならず連続スペクトルの寄与もすべて考慮に入れる必要があり、解析が非常に複雑になる。そして、初期に与えられた摂動は指数関数的に増大、減少するだけでなく、べき関数的に増大しうる。また、べき関数と指数関数の積の重ね合わせによる摂動の増大、減少が起こりうる。

上述の複雑性に起因して、強制磁気再結合では、境界層内部の空間構造が時々刻々変化し、磁気再結合過程が非常に複雑になる。その結果、最も簡単な抵抗性 MHD に従う境界層理論を用いた解析においても、磁気再結合過程およびその時間スケールは明らかになっていない。そして、いくつかの仮定を用いた解析により磁気再結合の時間スケールが導かれている。その一つは、Hahn-Kulsrud[2] によって導入され、Fitzpatrick[5] に継承されている考えで、中性面に誘起された電流は $t \approx \tau_A S^{1/3}$ において十分減衰し、constant-psi 近似が成立すると仮定する [2]。そして、磁気再結合の典型的な時間スケールとして、テアリングモードの時間スケール $\tau_t = \tau_A S^{3/5}$ を導いている。ここで、 τ_A はアルフベン時間スケール、 S は Lundquist 数または磁気レイノルズ数と呼ばれるもので、後で定義する。もう一つは、Wang-Bhattacharjee[3] によって導入された考えで、こちらは、 $t \approx \tau_A S^{1/3}$ において、中性面に誘起された電流はほとんど減衰しないと仮定する。そして、磁気再結合の典型的な時間スケールとして、Sweet-Parker の時間スケール $\tau_{sp} = \tau_A S^{1/2}$ を導いている。それぞれの仮定の正当性には決着がついていない [6, 14]。

本論文では、従来の強制磁気再結合の境界層理論 [2, 3, 4, 5, 6, 9] の漸近接続における欠陥を改めた解析 [15, 16] を示す。その結果、プラズマの慣性の効果を矛盾無く反映し、強制磁気再結合は二種類の再結合束によって表される複雑な現象であることを示した。従来の理論ではこの二つの再結合束は混同されていた。再結合束の時間発展を記述する方程式として、積分方程式を導く [10]。この方程式は $t \approx \tau_A S^{1/3}$ での強制磁気再結合の解析を可能にする。安定であることがすでにわかっている系に対して、積分方程式の数値解を求め、解析解に仮想的な不安定性が現れることを新たに示した。このことは、磁気再結合の初期値問題を通常の境界層理論 [1, 17] に従って解析した場合、問題を正しく解くことができない事を意味する。また、この困難の一つの解決法を紹介する。

第2節では、境界摂動が加わった事に対するプラズマの応答を表すモデルと、基礎方程式の説明を行う。第3節において、境界層理論と境界層方程式の説明を行う。そして、境界層方程式の解を求める。第4節において、従来の強制磁気再結合の理論と異なる矛盾

のない漸近接続を行い、接続条件を求める。第5節では、強制磁気再結合は、二つの再結合束によって記述される複雑な現象であることを示す。そして、再結合束が従う積分方程式を導く。この積分方程式に基づき、境界層理論を用いた初期値問題の解析における問題を明らかにする。最後に第7節において、まとめを述べる。

2 基礎方程式とモデル

強制磁気再結合とは、磁場配位が抵抗性MHDに対して安定であっても、境界摂動によって強制的に磁気再結合が起こり磁気島が形成されることをいう。磁気島を持つ磁場配位は、境界摂動が加わる前の磁場配位とトポロジーが異なる。このトポロジーが異なる状態に移る時間変化をスラブモデルを用いて考える。系は z 方向に一様であると仮定する。幅が $2a$ の導体壁に挟まれたスラブ形のプラズマを考え、 x 軸を横に y 軸を縦にとる。プラズマは非圧縮の抵抗性MHD方程式に従うとする。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} - \eta \nabla \times \mathbf{j} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

ここで、 p はプラズマの圧力、 η は磁気拡散係数、 $\mathbf{v}$ はプラズマの速度を表す。そして $\mathbf{B} = B_T \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \times \nabla \psi$ は磁場、 $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} / 4\pi$ は電流密度を表す。また、 B_T は一様なトロイダル磁場を表し、 ψ はベクトルポテンシャルの z 方向成分を表し、磁気ポテンシャルと呼ばれる。抵抗の時間スケール、アルフベン時間スケール、Lundquist 数は以下のように定義される。

$$\tau_R = \frac{4\pi a}{\eta}, \quad \tau_A = \frac{a}{v_A}, \quad S = \frac{\tau_R}{\tau_A}, \quad v_A = \frac{\psi_0''(0)a}{\sqrt{4\pi}}.$$

ここで、 $\psi_0(x)$ は平衡の磁気ポテンシャル、 $'$ は x についての微分を表す。

はじめに、境界摂動が無い平衡磁場を考える。境界条件はプラズマ表面で

$$\psi(x = \pm a) = \text{const.} \quad (4)$$

であり、この境界条件を満たす (7) の解を

$$\psi = \psi_0(x) \quad (5)$$

とする。また、 $\psi_0(x)$ は x について対称で、 $x = 0$ が中性面になるように $d\psi_0/dx|_{x=0} = 0$ を満たすと仮定する。例えば、電流密度分布が一定な平衡 (テイラーのモデル) は $\psi_0(x) = B_0 x^2 / 2a$ であり、電流密度分布が一様でない平衡としてはハリスの平衡 $\psi_0(x) = B_0 a \ln \cosh x/a$ などがある。

次に、この平衡磁場に境界摂動が加わった場合を考える。境界摂動の波数は k 、振幅は δ_e とする。また、境界摂動の振幅は非常に小さいので、 $\delta_e \ll a$ と仮定する。境界条件は (4) と異なり

$$\psi(x = \pm(a - \delta_e \cos ky)) = \text{const.} \quad (6)$$

に変更される。

次節では、境界摂動がある場合の新しい平衡を示し、その後、プラズマ内部の応答の時間変化を初期値問題として考える。

2.1 トポロジーが異なる二つの平衡

ここでは、プラズマの時間変化は考えず、境界摂動を表す境界条件 (6) を満たす MHD 平衡解として二つの平衡 (磁気島がある平衡とシート状の電流を持つ平衡) があることを示す [2]。この場合、基礎方程式は静磁場平衡を表す Newcomb 方程式になる。

$$\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (7)$$

新しい平衡を以下のように書く。

$$\psi = \psi_0(x) + \psi_1(x) \cos ky \quad (8)$$

ここで $\psi_1(x)$ は境界摂動が加わったことによる摂動を表す。この式を (7) に代入し、 δ_e の一次まで展開することにより ($\psi_1(x)$ は δ_e のオーダー)、 $\psi_1(x)$ が満たす Newcomb 方程式方程式を得る。

$$\psi_0'(x) \{ \psi_1''(x) - k^2 \psi_1(x) \} - \psi_0'''(x) \psi_1(x) = 0 \quad (9)$$

ここで、' は x についての微分を表す。この方程式は $x = 0$ で $\psi_0'(x) = 0$ になるので、 $x = 0$ において特異になっている。この面は中性面と呼ばれ、トカマクプラズマにおいて安全係数が有理数になる面 (有理面もしくは共鳴面) に対応する。式 (6)、(8) より、 $\psi_1(x)$ に対する境界条件は

$$\psi_1(\pm a) = \delta_e \psi_0'(a) \equiv \Psi_e \quad (10)$$

となる。境界条件が左右対称であり、また、方程式 (9) は x を $-x$ に置き換えても変わらないことから、解は $\psi_1(-x) = \psi_1(x)$ を満たすことがわかる。式 (9) は二階の微分方程式であり、二つの独立解を持つ。上に述べた対称性を持ち、境界条件 (10) を満たす解の一つは

$$\psi_1(x) = \Psi_e \frac{F(x)}{F(a)} \quad (11)$$

で以下 (I) 状態と呼ぶ。ここで、 $F(x)$ は Newcomb 方程式 (9) の解で、 $F(0) = 0$ を満たす。例えばテイラーのモデル [2] の場合 ($\psi_0(x) = B_0 x^2 / 2a$)、 $F(x) = |\sinh kx|$ である。(I) 状態は磁気ポテンシャルが中性面上 ($x = 0$) で 0 になり、境界摂動が無い場合と同じトポロジーを持つ磁場配位を表す。しかし、この状態は y 方向の磁場が中性面上で不連続になり、シート状の電流分布を持つ。もう一つの解は

$$\psi_1(x) = \Psi_e \frac{G(x)}{G(a)} \quad (12)$$

で以下 (II) 状態と呼ぶ。ここで、 $G(x)$ は Newcomb 方程式 (9) の解で、 $G'(0) = 0$ を満たす。テイラーのモデルの場合、 $G(x) = \cosh kx$ である。(II) 状態は磁気ポテンシャルが中性面上 ($x = 0$) で有限の値をもち、シート状の電流は無く、磁気島をもつ磁場配位を表す。これらの二つの独立解があることは、一様な電流密度分布を持つ静磁場平衡 (5) に境界摂動が加わり新しい平衡に移るとき、シート状の電流分布を持つ (I) 状態と、磁気島を持つ (II) 状態の二つの状態が考えられる事を示している。

次節以降、トポロジーが異なる平衡に移る時間変化について述べる。

3 境界層理論

境界摂動の印加によりプラズマは印加前とは磁場のトポロジーが異なるMHD平衡に移行する。これまでに示したモデルはこのトポロジーが異なる磁場配位を表すことができる。したがって、強制磁気再結合の本質的な部分をとらえたモデルである。しかし、このモデルは Newcomb 方程式に従うため、境界摂動が加わる前の磁場配位からトポロジーが異なる磁気島を持つ磁場配位への時間的な変化を記述することはできない。Newcomb 方程式は抵抗等の非理想効果を含まないからである。中性面近傍を除く領域では、アルフェン時間に比べて十分遅い摂動に対して、プラズマは Newcomb 方程式に従う。そしてこの領域を外部領域と呼ぶ。この節で示すように、外部領域の時間変化は再結合束の時間発展により決定される。(5節で示すように再結合束は二つあるので、この解釈には注意が必要である。)我々は境界層理論に基づく漸近接続の結果、この再結合束の時間発展を得る。

3.1 外部領域

ここからは、境界摂動が加わったことに対する応答として強制磁気再結合が起こり、磁気島を持つ磁場配位 (II) に移る時間発展を考える。この問題を解析するため、境界摂動が抵抗の時間スケールより十分速く、アルフベン時間スケールより十分遅く加わった場合を考える ($\tau_A \ll \tau_e \ll \tau_R$; τ_e は境界摂動の時間スケールを表す)。この場合、中性面近傍を除き Newcomb 方程式が成り立つと考えることができ、境界条件 (10) を満たす方程式 (9) の解は以下のように (11) と (12) の線形結合で表すことができる。

$$\psi_1(x, t) = \psi_1(0, t) \left\{ G(x) - \frac{G(a)}{F(a)} F(x) \right\} + \psi_e(t/\tau_e) \frac{F(x)}{F(a)} \quad (13)$$

ここで、 $\psi_1(0, t)$ は磁気再結合が起こっている割合を示し、再結合束と呼ばれる (後で示しように、正確には外部再結合束)。また、 $\psi_e(t/\tau_e)$ は境界摂動の印加を表し、 $t \gg \tau_e$ で Ψ_e となる関数で、例えば、

$$\psi_e(t/\tau_e) = \Psi_e(1 - \exp(-t^2/\tau_e^2)) \quad (14)$$

である。外部領域の解 (13) は一般的には

$$\psi_1(x, t) = \psi_1(0, t)f(x) + \psi_e(t/\tau_e)g(x) \quad (15)$$

と書ける。ここで、

$$f(x) = G(x) - \frac{G(a)}{F(a)} F(x)$$

は自由磁気再結合 (通常のテアリングモード) の固有関数であり、 $f(0) = 1$ と斉次な境界条件 $f(\pm a) = 0$ を満たす。また、

$$g(x) = \frac{F(x)}{F(a)}$$

は $g(0) = 0$ と非斉次な境界条件 $g(\pm a) = 1$ を満たす [5, 9]。

式 (13) は (11), (12) と異なり、再結合束 $\psi_1(0, t)$ が時間変化することにより $\psi_1(x, t)$ が時間変化するので、磁気島を持つ (II) 状態への時間発展を記述することができる。そして、再結合束 $\psi_1(0, t)$ の増加は磁気島の形成を表しており、磁気島形成の解析において再結合束の時間変化が重要である。しかし、(I) 状態と (II) 状態はどちらも境界条件 (10) を

満たすので、外部領域の解析では再結合束 $\psi_1(0, t)$ を決めることができない。また、(I) 状態と (II) 状態はトポロジーが異なるので、再結合束の変化はトポロジーの変化を表す。しかし、抵抗の効果を含まない Newcomb 方程式ではトポロジーの変化は起きず、再結合束の変化を記述できない。(I) 状態から (II) 状態への変化を取り扱うためには、抵抗を考慮に入れトポロジーの変化を許す方程式を用いて解析を行う必要がある。この方程式は境界層方程式である。次節において、境界層の解析を説明する。

3.2 境界層

強制磁気再結合の時間発展は、式 (13) により、再結合束 $\psi_1(0, t)$ の時間発展によって、決定される。再結合束を求めるためには中性面 ($x = 0$) での磁気ポテンシャルに対する条件が必要である。この条件を求めるため、厚さが非常に薄い中性面近傍を引き延ばし、その内部 (境界層) を初期値問題として解析する。

境界層では中性面内の抵抗、プラズマの慣性を考慮して解析を行う必要があり、非圧縮の抵抗性 MHD 方程式が基礎方程式になる。強いトロイダル磁場がある場合、プラズマの運動はその磁場に垂直な面内に限られ、また、密度は一定と考えることができ、方程式は簡約 MHD 方程式になる。トロイダル方向に z 軸をとり、 z 軸に垂直な面内のプラズマの運動を式 (3) に従うように、スカラー関数 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \varphi$, $\varphi = \varphi_1(x, t) \sin ky$, で記述する。ここで、 φ は静電ポテンシャルを表す。

初期には磁気島は小さいと考えることができるので線形化を行う。また、中性面近傍 $x \approx 0$ の解析を考えているので、 $k \ll \partial/\partial x$ を仮定する。その結果、渦度方程式とオームの法則を使ったファラデーの法則を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{B_0 k}{4\pi a} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - B_0 k \frac{x}{a} \varphi = \frac{\eta}{4\pi} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \quad (17)$$

これらの方程式は線形簡約 MHD 方程式と呼ばれる。

境界摂動が抵抗の時間スケールより速く、アルフベン時間スケールより遅く加わった場合を考えているので、初期条件は $\psi_1(x, 0) = 0$ である。この初期条件のもとでラプラス変換

$$\tilde{\psi}_1(x, s) = \int_0^\infty \psi_1(x, t) e^{-st} dt$$

を行い、 $\psi_1(x, t)$ の時間発展を初期値問題として考える。そして、方程式 (16), (17) の各項が同じオーダーになるように薄い中性面内の x 軸を引き延ばし、また、時間 t を縮めると、(16), (17) は

$$\hat{s} \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{in}}{d\hat{x}^2} = -\hat{x} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{in}}{d\hat{x}^2}, \quad (18)$$

$$\hat{s} \tilde{\psi}_{in} - \hat{x} \tilde{\varphi}_{in} = \frac{d^2 \tilde{\psi}_{in}}{d\hat{x}^2}, \quad (19)$$

となり、中性面近傍のプラズマが従う方程式 (境界層方程式) を得る。ここで

$$\tilde{\psi}_{in}(\hat{x}, \hat{s}) = \frac{\tilde{\psi}_1(x, s)}{\psi_0''(0)a^2}, \quad \tilde{\varphi}_{in}(\hat{x}, \hat{s}) = \frac{\tilde{\varphi}_1(x, s)}{v_A a},$$

は無次元化された磁気ポテンシャルと静電ポテンシャルを表す。また、

$$\hat{x} = \frac{x}{\varepsilon a}, \quad \hat{s} = \tau_c s, \quad \varepsilon = \left(\frac{1}{Ska} \right)^{1/3}, \quad \tau_c = \frac{\tau_A}{\varepsilon ka},$$

であり、 ε は引き延ばしパラメータを表し、 $\hat{x}$ はプラズマの幅に比べ $1/\varepsilon$ 引き延ばした x 座標を表す。また、時間は ε だけ縮められている。

この方程式の解を求め、その関数形が $\varepsilon \rightarrow 0$ ($|\hat{x}| \rightarrow \infty$ に対応) で外部領域の解と同じ関数形になるという接続条件を用い、再結合束を求める。

3.3 境界層方程式の解

この小節では、内部層方程式 (18)、(19) の解を示す。式 (18) は $\hat{x} \frac{d^2 \tilde{\psi}_{in}}{d\hat{x}^2} = \frac{d}{d\hat{x}} \left(\hat{x}^2 \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{\tilde{\psi}_{in}}{\hat{x}} \right) \right)$ を用いると一回積分することができ、 $\hat{s} \frac{d\tilde{\psi}_{in}}{d\hat{x}} = -\hat{x}^2 \frac{d(\tilde{\psi}_{in}/\hat{x})}{d\hat{x}} + C$, を得る。静電ポテンシャルを

$$E \equiv -\hat{s} \frac{d\tilde{\varphi}_{in}}{d\hat{x}} \quad (20)$$

で表現し、磁気ポテンシャル $\tilde{\psi}_{in}$ を消去することにより一つの方程式に書き直す [18]。

$$\left(1 + \frac{\hat{x}^2}{\hat{s}^2} \right) E - \frac{\hat{x}^2}{\hat{s}} \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{1}{\hat{x}^2} \frac{dE}{d\hat{x}} \right) = \Psi_\infty, \quad (21)$$

積分定数 C は、後で見るように漸近接続で、大きな解に接続される項に対応するので、 $\Psi_\infty \equiv -C$ と書き直した。ここで、Hazeltine と Meiss [18] との表記の関係は $\alpha x^2 = \hat{x}^2 / \hat{s}^{1/2}$, $\alpha = 1/x_R x_A$, $x_R/x_A = \hat{s}^{3/2}$ である。

ここでは E を $\chi \equiv E - \Psi_\infty$ と書き直し、Ara et al. [17] の解析方法を用いて、

$$\hat{s} \left(\frac{d^2 \chi}{d\hat{x}^2} - \frac{2}{\hat{x}} \frac{d\chi}{d\hat{x}} \right) - (\hat{s}^2 + \hat{x}^2) \chi = \Psi_\infty \hat{x}^2, \quad (22)$$

を解く。 χ を一般化ラゲール級数に展開し展開係数を求め、解を得る。

$$\chi = -\Psi_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-1)^n (4n-1)}{4n-1+\hat{s}^{3/2}} L_n^{-\frac{3}{2}}(z) \exp(-z/2) \quad (23)$$

この級数の積分表示は

$$\chi = -\Psi_\infty + \Psi_\infty \frac{\hat{s}^{3/2}}{2^{5/2}} \int_0^1 y^{(\hat{s}^{3/2}-5)/4} \sqrt{1+y} \exp \left(\frac{-\hat{x}^2}{2\hat{s}^{1/2}} \frac{1-y}{1+y} \right) dy. \quad (24)$$

である。Rosenau [19] に指摘されているように、厳密にはこの解法には問題点がある。一般ラゲール級数 L_n^α は $\alpha < -1$ では直交系をなさないからである。この点を改善して得られた解は以下のようになる [19]。

$$\chi = \frac{\Psi_\infty \hat{s}^{3/2}}{2^{5/2}} \left\{ -1 + \frac{\sqrt{2}}{\hat{s}^{3/2}/4 - 1/4} - \frac{1}{\hat{s}^{3/2}/4 - 1/4} \int_0^1 y^{\hat{s}^{3/2}/4 - 1/4} \frac{d}{dy} \left[\sqrt{1+y} \exp \left(\frac{-\hat{x}^2}{2\hat{s}^{1/2}} \frac{1-y}{1+y} \right) \right] dy \right\} \quad (25)$$

この解は部分積分を用いて (24) を $\hat{s}^{3/2} > 1$ から $\hat{s}^{3/2} > -3$ へ解析接続したことに対応している。この部分積分を繰り返すことにより、より広い $\hat{s}^{3/2}$ への解析接続が可能である。また、ここでは、 $|\hat{x}| \rightarrow \infty$ において χ は指数関数的に発散しない、という条件を課して解を求めた。この条件を課せずに、グリーン関数を用いて解を求める方法は Janicke, Otto[20, 21, 22] などに紹介されている。積分定数 Ψ_∞ は

$$\Psi_\infty = \frac{-\tilde{\psi}_{in}(0, \hat{s})}{\frac{\hat{s}^{3/2}}{\hat{s}^{3/2}-1} F(1, -1/2, \hat{s}^{3/2}/4 + 3/4, 1/2) - 1}, \quad (26)$$

のように $\tilde{\psi}_{in}(0, \hat{s})$ で表される。ここで F はガウスの超幾何関数を表す [24]。磁気ポテンシャルと静電ポテンシャルは、 χ の積分でそれぞれ以下のように与えられる。

$$\tilde{\varphi}_{in}(\hat{x}, \hat{s}) = \frac{-1}{\hat{s}} \int_0^{\hat{x}} (\chi + \Psi_\infty) d\hat{x},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{in}(\hat{x}, \hat{s}) &= -\chi + \hat{x} \int_0^{\hat{x}} \frac{1}{\hat{x}} \frac{d\chi}{d\hat{x}} d\hat{x} \\ &= \Psi_\infty - \Psi_\infty \frac{\hat{s}^{3/2}}{2^{5/2}} \int_0^1 y^{(\hat{s}^{3/2}-5)/4} \sqrt{1+y} \exp\left(\frac{-\hat{x}^2}{2\hat{s}^{1/2}} \frac{1-y}{1+y}\right) dy \\ &\quad - \Psi_\infty \hat{x} \frac{\sqrt{\pi} \hat{s}^{5/4}}{8} \int_0^1 y^{(\hat{s}^{3/2}-5)/4} \sqrt{1-y} \operatorname{erf}\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}\hat{s}^{1/4}} \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}}\right) dy, \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、磁気ポテンシャルが左右対称になるパリティを選んだ。また、 erf は $\int_0^z \exp(-a^2 x^2) dx$ の $\frac{\sqrt{\pi}}{2a} \operatorname{erf}(az)$ で定義される誤差関数を表す。

4 接続条件

前小節では、式 (18)、(19) を解き、境界層方程式の全ての項を考慮に入れた解を導いた。この小節では、これらの方程式および解に矛盾しない接続条件を導く。この接続条件から再結合束の時間発展が求まる。

外部領域の解 (13) をラプラス変換した式を展開すると

$$\tilde{\psi}_1(x, s) \approx \tilde{\psi}_1(0, s) + \tilde{\psi}_1(0, s) \frac{\Delta'_{out}}{2} x + \dots \quad x \rightarrow +0 \quad (28)$$

となり、第一項が大きい解、第二項が小さい解の展開に対応する。ここで、

$$\Delta'_{out}(s) = \frac{1}{\tilde{\psi}_1(0, s)} \left[\frac{d\tilde{\psi}_1(x, s)}{dx} \right]_{-0}^{+0} = \Delta'_0 + \Delta'_s \frac{\tilde{\psi}_e(s)}{\tilde{\psi}_1(0, s)} \quad (29)$$

である。ここで、

$$\Delta'_0 = \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{-0}^{+0}, \quad \Delta'_s = \left[\frac{dg(x)}{dx} \right]_{-0}^{+0}$$

であり、 Δ'_0 は自由磁気再結合 (通常のテアリングモード) の安定性を示すパラメータを示す。 Δ'_0 および Δ'_s はラプラス変換パラメータ s に依存しない。そして、 Δ'_s は必ず正に

なり、 Δ'_0 は正にも負にもなり得る。自由磁気再結合は $\Delta'_0 > 0$ の場合不安定、 $\Delta'_0 < 0$ の場合安定である。テイラーのモデルの場合 Δ'_0 は必ず負であり、平衡は自由磁気再結合に対し安定である。

一方、境界層方程式の解 (24) の漸近形は

$$\tilde{\psi}_{in}(\hat{x}, \hat{s}) \approx \Psi_\infty(s) + \Psi_\infty(s) \frac{\Delta'_{in}(s)}{2} \hat{x} + \dots \quad \hat{x} \rightarrow +\infty, \quad (30)$$

である。ここで、第一項が Ψ_∞ であり、この内部層方程式の積分定数が、大きい解に接続される項であることがわかる。また、

$$\begin{aligned} \Delta'_{in}(s) &= \frac{-\pi \hat{s}^{5/4}}{4\epsilon a} \int_0^1 y^{(s^{3/2}-5)/4} \sqrt{1-y} dy \\ &= \frac{-\pi \tau_t^{5/4} s^{5/4} \Gamma(\tau_c^{3/2} s^{3/2}/4 - 1/4)}{8a \Gamma(\tau_c^{3/2} s^{3/2}/4 + 5/4)}. \end{aligned} \quad (31)$$

である [17, 20, 21, 22]。ここで $\tau_t = \tau_A S^{3/5}/(ka)^{2/5}$ はテアリングモードの時間スケール、 τ_c は抵抗性内部キンクモードの時間スケール、 Γ はガンマ関数を表す。また、

$$\Delta'_{in}(s) = \frac{1}{\epsilon a \psi_\infty} \left[\frac{d\tilde{\psi}_{in}}{d\hat{x}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\epsilon a \psi_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\hat{x}} \frac{d\chi}{d\hat{x}} d\hat{x} \quad (32)$$

であることを注意しておく。

外部解の展開 (28) と境界層解の展開 (30) の展開係数を等しいとすることによって得られる関係式

$$\tilde{\psi}_1(0, s) = \psi_0''(0) a^2 \Psi_\infty(s), \quad (33)$$

$$\Delta'_{out}(s) = \Delta'_{in}(s). \quad (34)$$

を接続条件と呼ぶ。次節でみるように、この2つの条件式および (26) から、外部再結合束、 $\tilde{\psi}_1(0, s)$ と内部再結合束 $\tilde{\psi}_{in}(0, \hat{s})$ を得る。 $\tilde{\psi}_1(0, s)$ のラプラス逆変換を行い、外部再結合束 $\psi_1(0, t)$ の時間発展を得る。そして、(13) に代入することにより、境界摂動が加わった後の外部領域の時間発展を得る。

5 磁気再結合の時間発展：二つの再結合束

接続条件 (33)、(34) および (29) より、ラプラス変換した形での再結合束、 $\tilde{\psi}_1(0, s)$ を導く。この再結合束の時間発展を調べることににより、磁気島の形成速度および磁気島の形成過程において、中性面に誘起される電流の時間変化を明らかにする事ができる。

ラプラス変換した形での再結合束は

$$\tilde{\psi}_1(0, s) = \frac{\Delta'_s \tilde{\psi}_e(s)}{\Delta'_{in}(s) - \Delta'_0} \quad (35)$$

となる。この式をラプラス逆変換することにより、再結合束の時間発展を得る。ここで、抵抗性モードとの関係を示す。境界摂動が無い場合 ($\psi_e(t) = 0$)、初期値問題は固有値問題になる。そして、 $\Delta'_{in}(s) - \Delta'_0 = 0$ が一般的な抵抗性 MHD モードの分散式を与える [20, 21, 22, 23]。

境界層内部での再結合束を表す、内部再結合束は

$$\tilde{\psi}_{in}(0, \hat{s}) = \frac{1}{\psi_0''(0)a^2} \left\{ 1 - \frac{\hat{s}^{3/2}}{\hat{s}^{3/2} - 1} F(1, -1/2, \hat{s}^{3/2}/4 + 3/4, 1/2) \right\} \tilde{\psi}_1(0, s). \quad (36)$$

となる。

外部変数での $x = 0$ が境界層変数での $|\hat{x}| \rightarrow \infty$ に対応する。従って $\psi_1(x = 0, t)$ は理想 MHD 的な磁力線の変形も含んでしまい、磁気再結合が起こっていても増大しうる。再結合束 $\psi_1(x = 0, t)$ は磁力線の大域的な変化を表し、一方、 $\hat{x} = 0$ における再結合束で定義される内部層再結合束は真の意味での磁力線の切りつなぎを表す。 $\psi_{in}(\hat{x} = 0, t) \equiv L^{-1}[\tilde{\psi}_{in}(0, \hat{s})/\psi_0''(0)a^2]$ ここで、 L^{-1} はラプラス逆変換を表す。

これら二つの再結合束のずれは、境界層内の磁場構造に起因する。従って、constant- ψ 近似が成立する場合 ($\hat{s} \rightarrow 0$)、これらの再結合束は一致する $\tilde{\psi}_{in}(0, \hat{s})|_{\hat{s} \rightarrow 0} = \tilde{\psi}_1(0, s)/\psi_0''(0)a^2$ 。

5.1 再結合束が従う積分方程式

ラプラス変換した形での再結合束は線形発展における磁気再結合過程の全情報を持っているが、ラプラス逆変換は非常に困難である。ここでは、再結合束が満たす方程式として、実数で表現される積分方程式を新しく導入する。

接続条件 (34) は具体的に書くと以下のようになる。

$$\tilde{\psi}_1(0, s) - \frac{\Delta'_{in}(s)}{\Delta'_0} \tilde{\psi}_1(0, s) = \frac{-\Delta'_s}{\Delta'_0} \tilde{\psi}_e(s)$$

この式の両辺をラプラス逆変換することにより、再結合束が従う方程式を得る。

$$\psi_1(0, t) - \frac{1}{\Delta'_0} \int_0^t \psi_1(0, \tau) G(t - \tau) d\tau = \frac{-\Delta'_s}{\Delta'_0} \psi_e(t) \quad (37)$$

この方程式は第二種ヴォルテラ積分方程式で、左辺第二項は畳み込みの積分を表す。ここで G は与えられた関数を表し、

$$G(t) \equiv L^{-1}(\Delta'_{in}(s)) \quad (38)$$

で定義される。 L^{-1} はラプラス逆変換を表し、 $\Delta'_{in}(s)$ は (31) で与えられる。再結合束 (35) のラプラス逆変換は非常に複雑であるが、式 (38) の逆変換は比較的容易である。関数 $G(t)$ は、複素平面 s 上の留数と分岐上の積分の和で表される。具体的な形は

$$G(t) = R(t) + I_b(t) \quad (39)$$

$$R(t) = \frac{-4k}{3\tau_A} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(\frac{t}{\tau_c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1/4}}{n!} \Gamma(n-1/2) \exp\left(\frac{-t}{2\tau_n}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{t}{\tau_n}\right) \right\} \quad (40)$$

$$I_b(t) = \frac{k}{3\pi\tau_A} \int_0^{\infty} \sqrt{x} |\Gamma(ix - 1/4)|^2 \exp(-(4x)^{2/3} t / \tau_c - \pi x) dx \quad (41)$$

である。ここで、

$$\tau_n = \frac{\tau_c}{(4n-1)^{2/3}}, \quad |\Gamma(ix - 1/4)|^2 = |\Gamma(-1/4)|^2 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1/4)^2}{x^2 + (n-1/4)^2}$$

である。それぞれの関数中の指数関数の時間スケールは抵抗性キンクモードの時間スケール $\tau_c \propto \tau_A^{2/3} \tau_R^{1/3}$ である。

積分方程式 (37) の右辺は境界摂動の印加を表す関数 $\psi_e(t/\tau_e)$ だけで決定される。この積分方程式は $t=0$ で積分の部分が 0 になり、また、 $\psi_e(0)=0$ なので、 $\psi_1(0,0)=0$ となり、初期条件を満たしている。右辺は境界摂動の印加を表し、左辺第二項はそれに対する境界層の応答を示している。

この節では、外部再結合束が従う積分方程式を導いたが、同様な方法を用い内部再結合束が従う積分方程式を導くことができる。

5.2 初期値問題における困難

前節の積分方程式を数値的に解くと、テアリングモードに対して安定な場合、 $\Delta'_0 < 0$, 外部再結合束は指数的に発散する。

この発散は、境界層から求めた Δ'_{in} に内在しており、積分核 $G(t) = R(t) + I_b(t)$ の $R(t)$ 中の第一項が不安定な極を表している。この極は不安定な抵抗性キンクモードに対応している。テアリングモードに対して安定な場合、 $\Delta'_0 < 0$, $G(t) < 0$ は再結合束の増大、 $G(t) > 0$ は再結合束の減少に対応する。よって、第一項は外部再結合束を指数的に増大させる。従って、テアリングモード（自発的な磁気再結合）に対し、安定な平衡を考えているにもかかわらず、再結合束は指数的に発散する。これは、円柱プラズマの抵抗性 MHD モードの分散式 $\Delta'_{in}(s) - \Delta'_0 = 0$ において、 $m=1$ の不安定な内部キンクモードを選んでしまっている事に対応する（ここで、 m はポロイダルモード数、詳細は [10]）。

ここでは、円柱プラズマの抵抗性 MHD モードの不安定性解析における指針「 $m > 1$ のモードを考える場合この不安定な極は選ばない」[19]に対応した方法を用い、この発散を回避する方法を示す。指数的な発散の原因となる第一項は、不安定な抵抗性キンクモードに対応している事を用いこの発散を取り除く。不安定な抵抗性キンクモードの固有関数を表す斉次解を上述の非斉次解に重ね合わせ、不安定な極と打ち消しあうように係数を定め、これを一般解とすることにより、安定な解を得ることができる。具体的な計算は以下のように行う。

内部層方程式の非斉次項（定数 C）を落とした方程式の偶パリティの解は以下のようになる [18]。

$$\chi_{n+}^h = L_n^{-3/2} (\hat{x}^2 / \hat{s}^{1/2}) \exp(-\hat{x}^2 / 2\hat{s}^{1/2})|_{\hat{s}^{3/2}=1-4n}$$

この斉次解は $n=0$ の場合、不安定な抵抗性キンクモードの固有関数になる。

$$\chi_{0+}^h = L_0^{-3/2} (\hat{x}^2 / \hat{s}^{1/2}) \exp(-\hat{x}^2 / 2\hat{s}^{1/2})|_{\hat{s}=1} = \exp(-\hat{x}^2 / 2)$$

静電ポテンシャル $\varphi_{in0+}^h = \frac{-1}{\hat{s}} \int_0^{\hat{x}} \chi_{0+}^h d\hat{x}|_{\hat{s}=1} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erf}(\hat{x}/\sqrt{2})$ は誤差関数になり、積分定数（ φ_{in} に対して偶な部分）を調整することにより、不安定な抵抗性キンクモードの固有関数と一致する。ここで、斉次解の漸近形は大きな解に接続される部分が無く（ $\Psi_\infty = 0$ ）、斉次解の Δ' は発散することを注意する。また、 $L_0^{-3/2}(z) = 1$ を用いた。

上述の積分方程式の核 $G(t)$ を導いた内部層方程式の解は非斉次解であり、これを χ^p と書く。この非斉次解に上の不安定なキンクモードを表す斉次解を重ね合わせた解、 $\chi = \chi^p - c\chi_{0+}^h$ を一般解とする。そして、不安定な極が打ち消しあうように係数 c を決めることにより、安定な解を得ることができる。

6 まとめと議論

プラズマ閉じ込め装置における誤差磁場のような外部擾乱はプラズマ境界に摂動を与える。この境界摂動は、プラズマ内部に強制的に磁気再結合を引き起こし、磁気島を形成させ、閉じ込めを劣化させる。この問題の解析に有用な境界層理論において、境界層内および漸近接続におけるプラズマの慣性の効果を正しく評価した。その結果、境界層内部の磁場構造に起因して、磁気再結合過程は二種類の再結合束で表されることを示した。一つは、外部再結合束で Newcomb 方程式に従う外部領域の時間変化、つまり、システムサイズの大域的な磁場構造の時間変化を表す。もう一つは、内部再結合束で、境界層内部にある中性面における真の意味での磁気再結合を表し、再結合率 (reconnection rate) を与える。これらの再結合束の違いは non-constant-psi 漸近接続を行うことにより明らかになった [15]。

従来の理論では再結合束の時間発展を記述する方程式は知られていなかったが、これは第二種ヴォルテラ積分方程式として記述される事を示した。また、テアリングモードの安定性指標 Δ'_0 への依存性を明らかにした。そして、テアリングモードに対して安定な場合 ($\Delta'_0 < 0$)、境界層理論の初期値問題に内在する困難があることを示した。また、この困難の一つの解決法を示した。

今後は、積分方程式の数値解を求め、 $t \approx \tau_A S^{1/3}$ での強制磁気再結合過程を明らかにする。従来の理論では $t \approx \tau_A S^{1/3}$ での磁気再結合過程は明らかになっておらず、いくつかの仮定を用いて、その後の時間発展が解析されていた。一つの仮定は [2, 5]、 $t \approx \tau_A S^{1/3}$ において中性面に誘起された電流が十分減衰し、constant-psi 近似が成り立つとする。そして、その後は Rutherford 方程式に従う非線形発展になると考える。もう一つは [3, 4, 6]、 $t \approx \tau_A S^{1/3}$ において中性面に誘起された電流がほとんど減衰せずヘリシティが保存すると仮定する。そしてヘリシティ保存則に基づく非線形磁気再結合 [25] が起こり、その後、Rutherford 状態になると考えられている。これら二つのシナリオの優劣、もしくは別のシナリオの可能性を、 $t \approx \tau_A S^{1/3}$ での積分方程式の解を求めることにより明らかにする。

References

- [1] H. P. Furth, J. Killeen and M. N. Rosenbluth; Phys. Fluids **6**, 459 (1963)
- [2] T. S. Hahm and R. M. Kulsrud; Phys. Fluids **28**, 2412 (1985)
- [3] X. Wang and A. Bhattacharjee; Phys. Fluids B **4**, 1795 (1992)
- [4] Z. W. Ma, X. Wang and A. Bhattacharjee; Phys. Plasmas **3**, 2427 (1996)
- [5] R. Fitzpatrick and T. C. Hender; Phys. Fluids B **3**, 644 (1991)
- [6] X. Wang and A. Bhattacharjee; Phys. Plasmas **4**, 748 (1997)
- [7] C. C. Hegna, Phys. Plasmas **5**, 1767 (1998).
- [8] R. J. La Haye, et al., Phys. Plasmas **7**, 3349, (2000).
- [9] C. C. Hegna, J. D. Callen and R. J. LaHaye; Phys. Plasmas **6**, 130 (1999)

- [10] A. Ishizawa, S. Tokuda, M. Wakatani, Proceedings of 18th IAEA Fusion Energy Conference, Sorrent, (2000).
- [11] G. E. Vekstein, and R. Jain, Phys. Plasmas **5**, 1506 (1998).
- [12] G. E. Vekstein, and R. Jain, Phys. Plasmas **6**, 2897 (1999).
- [13] D. Biskamp; *Magnetic Reconnection in Plasmas*, Cambridge University Press, (2000)
- [14] R. Fitzpatrick; Phys. Plasmas **5**, 3325 (1998)
- [15] A. Ishizawa, and S. Tokuda, Phys. Plasmas **7**, 875 (2000)
- [16] A. Ishizawa, and S. Tokuda, Phys. Plasmas **8**, 376 (2001)
- [17] G. Ara, B. Basu, B. Coppi, G. Laval, M. N. Rosenbluth and B. V. Waddell; Ann. Phys. **112**, 443 (1978)
- [18] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss; *Plasma Confinement*, Addison-Wesley, New York, (1992)
- [19] P. Rosenau, Phys. Fluids **26**, 2578 (1983).
- [20] L. Janicke; Phys. Fluids **23**, 1843 (1980).
- [21] A. Otto; Phys. Fluids B **3**, 1739 (1991)
- [22] G. T. Birk and A. Otto; Phys. Fluids B **3**, 1746 (1991)
- [23] C. Shen and Z. X. Liu; Phys. Plasmas **5**, 2466 (1998)
- [24] W. Magnus, F. Oberhettinger and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics* (Springer, New York, 1966) pp. 37-65.
- [25] F. L. Waelbroeck; Phys. Fluids B **1**, 2372 (1989)