

指標和の平均値の評価について

村田 玲音 (明治学院大学)

Dirichlet 指標 χ と二つの自然数 M, N によって定まる和

$$S(\chi; M, N) = \sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)$$

のことを指標和(character sum)と呼び、この大きさを χ の modulus q と区間の長さ N によって評価する問題を考える。この和自身も周期 q の周期関数になるので、 $N \leq q$ としてよい。

§ 1 これまでに知られていること

『指標和の評価』は古くから研究されているので、多くのことが知られている。その代表的なものを挙げてみよう。

1) 自明な評価: $|S(\chi; N, M)| \leq N$.

2) Pólya-Vinogradov の不等式:

$$|S(\chi; M, N)| \ll \sqrt{q} \log q.$$

3) Burgess の Bound:

定理 A (Burgess, 1963 [1]) r は任意の自然数、 ε は任意の正数とする。

$$|S(\chi; M, N)| \ll_{r, \varepsilon} N^{1 - \frac{1}{r}} q^{\frac{r+1}{4r^2} + \varepsilon}.$$

以上の三つの Bound の強弱を比較してみると、すぐに分かることだが、 N が $q^{(3/8)}$ 程度より長くなると、Pólya-Vinogradov が一番良く、 N が $q^{(1/4)}$ 程度より短くなると trivial Bound が一番よくなってしまう。この中間域では Burgess's Bound が最良になっている (ただし Burgess の不等式では $r=2$ と取った)。Burgess's Bound が短い区間で有効であることは良く

知られているが、ある程度以上区間が短くなると、Burgess's Bound も trivial Bound より悪くなってしまうことに注意しておこう。

4) 予想

次に挙げる予想は Burgess[2] の文中に述べられているもので、根拠や蓋然性については特に言及されていない（しかも $q=p$ となっている）。

$$|S(\chi; M, N)| \ll \sqrt{N} p^\varepsilon.$$

5) 指標和の平均値

Burgess は 1986 年から "Mean values of character sums" という表題で 4 編の論文を発表し、その 3 番目にあたる [3] の中で、次の結果を証明した。

$$\mathcal{B} = \{ \chi ; \text{ mod } p^3 \text{ の Dirichlet character, } \chi^{p^2} = \chi_0 \}$$

とする。勿論 χ_0 は、 p^3 を法とする principal character である。

定理 B (Burgess, 1995 [3]) $\mathcal{B}$ の中で、 $o(p^2)$ 個の例外を除いて、次が成り立つ：

$$|S(\chi; M, N)| \ll \sqrt{N} p^{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

更に Burgess は、この続編ともいえるべき論文 [4] を書いている。そこで証明されている結果を一部引用しよう。 $\mathcal{B}$ は上と同じ集合である。

定理 C (Burgess, 1997 [4])

- ① $N \leq p^{\frac{7}{8} \frac{3}{2}}$ なら $\sum_{\chi \in \mathcal{B}, \chi \neq \chi_0} |S(\chi; M, N)| \ll p^2 N^{\frac{1}{4}} p^{\frac{3}{4}},$
- ② $N \geq p^{\frac{7}{8} \frac{3}{2}}$ なら $\sum_{\chi \in \mathcal{B}, \chi \neq \chi_0} |S(\chi; M, N)| \ll p^2 N^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{8} + \varepsilon},$
- ③ $p < N \leq p^{\frac{6}{5}}$ なら $\sum_{\chi \in \mathcal{B}, \chi \neq \chi_0} |S(\chi; M, N)| \ll p^2 p^{1 + \varepsilon},$
- ④ $N \geq p^{\frac{6}{5}}$ なら $\sum_{\chi \in \mathcal{B}, \chi \neq \chi_0} |S(\chi; M, N)| \ll p^2 N^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3} + \varepsilon}.$

一方、私は p^2 を法とする原始根の分布を調べる過程で、Heath-Brown の結果 [8] を利用して次の結果を得た ([9] も参照)。

定理D (Murata, 1998 [10])

$$\frac{1}{p-1} \sum_{\substack{\chi \bmod p^2 \\ \chi^p \neq \chi_0, \chi \neq \chi_0}} S(\chi; M, N) \ll p^{\frac{11}{12}} \log p.$$

これも Burgess の定理同様、指標和の平均値を計算したものだが、まず平均を取った集合が違っている。私の結果では「 p^2 を法とする指標群の中の p 次の巡回部分群」を考えてそこで平均を考えた。Burgess が modulus を p からすぐ p^3 に上げてしまって、 p^2 を飛び越した理由は良く分からない。又私の結果では指標和の絶対値の平均ではなく、生の値の平均を取ってある。更に私の得た式の右辺には N が出てきていない。その意味では、定理Dは「Pólya-Vinogradov の不等式は平均値の意味でまだ改良の余地がある」ことを言っていると解釈する方がよいと思われる。

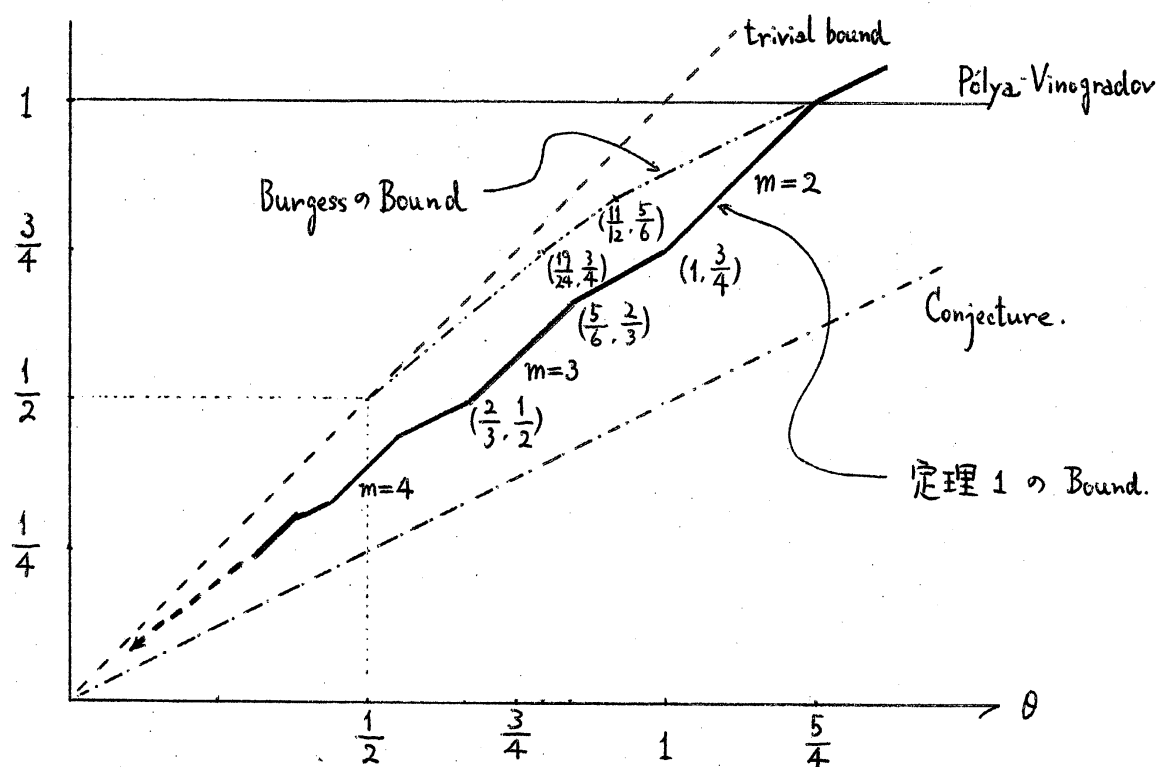
§ 2 今回の結果について

以下、指標の modulus q として、主に p^2 あるいは p^3 の場合を考える。もっと一般的な場合も取り扱えるのだが、このように q を具体的に取った方が結果が分かりやすいし、Burgess の平均型の結果と比較もできるので都合がよい。

定理1 $q=p^2$, m は任意の自然数とする。この時、高々 $p-1$ 個の例外を除いて次が成立する:

$$\begin{aligned} N \geq p^{\frac{2}{m}} \quad & \text{のとき、} \quad |S(\chi; 1, N)| \ll_m N p^{-\frac{1}{2m}} (\log p)^{\frac{2^m-1}{2m}}, \\ N < p^{\frac{2}{m}} \quad & \text{のとき、} \quad |S(\chi; 1, N)| \ll_m N^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{m}} (\log p)^{\frac{2^m-1}{2m}}. \end{aligned}$$

この結果と従来までの結果の強弱を、簡単に図示してみた。このグラフでは、横軸に区間の長さ ($N=p^\theta$ と表示した時の θ) を取っている。指標和の評価式の右辺は、すべて $p^\alpha N^\beta (\log p)^\gamma$ の形をしていた。この中でまず log part や ε -part を無視すると、従来の結果は『 $N=p^\theta$ のとき、個々の指標和や平均値は $p^{(\alpha+\beta\theta)}$ で押えられる』という形に統一できる。そこでこの $(\theta, \alpha+\beta\theta)$ をプロットしたのが下図である。『個々の指標和の評価』と『almost all の結果』を同じグラフに描いてあるが、不等式の強弱を比較するのが目的なので、その点に注意して頂きたい。



この図から分かるように、我々の結果は「個々の指標和に関する結果でない」「指標和を作る始点が $M=1$ と固定されている」といった欠点を抱えているが、一方、

- i) m を上げてゆくことによって、どんなに短い区間に対しても非自明な評価が得られている。
- ii) ほとんどの区間で、Pólya-Vinogradov の不等式、Burgess の評価式より良い評価を与えている。

といった利点のあることが分かる。

§ 1 で平均値に関する Burgess の仕事を紹介した。その関連で、同じ平均値を我々の方法で評価計算してみたのが次の結果である。

定理 2 m は任意の自然数とし、 $\mathcal{D}$ は、 p^3 を法とする Dirichlet character の集合で、 $|\mathcal{D}| = p^2$ とする。このとき、

$$N \geq p^{\frac{3}{m}} \text{ のとき、 } \sum_{\chi \in \mathcal{D}} |S(\chi; 1, N)| \ll p^2 N p^{-\frac{1}{m}} (\log p)^{\frac{2}{2m} - 1},$$

$$N < p^{\frac{3}{m}} \text{ のとき、 } \sum_{\chi \in \mathcal{D}} |S(\chi; 1, N)| \ll p^2 N^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2m}} (\log p)^{\frac{2}{2m} - 1}$$

この場合も、上と同じ欠点はあるが、一方、どんな短い区間に対しても、平均値に対して非自明な評価を与えているし、Burgess の場合、 $\mathfrak{B}$ として特殊な集合 $\mathfrak{B}$ だけを取り扱っていたが、我々の場合は、 $|\mathfrak{B}| = p^2$ さえ満たしていれば、どんな集合に対しても同じ評価が得られる、という大きな利点がある。そして得られた評価式は Burgess の平均値より良くなっている。 $M=0$ となっているため、我々の結果は short interval の問題には使いにくい、ある種の問題、例えば次節でふれる $L(\frac{1}{2}+it, \chi)$ の q -estimate では、 $S(\chi; 1, N)$ の評価が必要になる。

§ 3 $L(\frac{1}{2}+it, \chi)$ の q -estimate

$|L(\frac{1}{2}+it, \chi)|$ を χ の modulus q によって評価する問題を考える。これも歴史の長い有名な問題で、多くの結果が得られている。

i) 『Burgess の評価』の帰結(1962): $L(\frac{1}{2}+it, \chi) \ll q^{\frac{3}{16}+\varepsilon}$.

ii) § 1 で挙げた『予想』の帰結: $L(\frac{1}{2}+it, \chi) \ll q^{\varepsilon}$.

ii) の式は『 L 関数の Lindelöf 予想』に対応するもので、いわば『Lindelöf 予想の q -analogue』である。これを見ても、『予想』の解決は非常に困難であろうと思われる。

iii) 次の 3 つの定理は結論の式に共通した点がある。

文献[6]の Theorem 4 (p.43),

文献[7]の Corollary 3 (p.150),

文献[5]の Corollary 2 (p.296).

詳しくは原論文を読んで頂くことにして要点を記すと、『ある特殊な条件』を満たす合成数の無限集合を Q とする。この Q に属する q を法とする Dirichlet characters χ_q を考えると、これらに対して次が成立する:

$$L(\frac{1}{2}+it, \chi_q) \ll q^{\frac{1}{6}}$$

というものである。結論の式の右辺に $q^{1/6}$ が出てきており、これがこの定理群の面白い点であろう。Burgess の universal bound によれば、任意の指標に対して $q^{3/16}$ で評価でき

るわけだが、ちょっと特殊な指標を考えると、 $q^{(1/48)}$ だけ節約できてもっと良い評価が得られるのである。

これに関して、今回我々が得た結果は次の二つである：

定理 3

$$\frac{1}{p-1} \sum_{\substack{\chi: \bmod p^2 \\ \chi^p = \chi_0, \chi \neq \chi_0}} L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \ll p^{\frac{5}{16}} (\log p)^{\frac{7}{8}}.$$

定理 4 r を自然数とする。 p^r を法とする Dirichlet 指標全体の、任意の部分集合 $\mathcal{F}$ をとり、 $|\mathcal{F}| = p^s$ が成り立っているとする (s は必ずしも自然数でなくてもよい) この時、次が成立する：

$$\frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_{\chi \in \mathcal{F}} |L(\frac{1}{2} + it, \chi)| \ll p^{\frac{r}{4} - \frac{s}{8}} \times (\log - \text{part}).$$

定理 3 は Burgess の universal bound より $p^{\frac{1}{16}}$ だけ良い評価を与えているが、 L 関数の絶対値を考えていない点、そして何より平均値である点が欠点である。

定理 4 の結論の式において、 r と s を接近させたまま (例えば $s=r-1$ ととって) r を大きくしてゆくと究極的には $|L(\frac{1}{2} + it, \chi)|$ の平均値を $q^{(1/8)}$ で評価できることになる。

これまでに得られた一群の結果を見ても分かるとおり、 L 関数の q -estimate では、 $q^{(1/6)}$ のところに一つの壁があったように思われる。今回の我々の結果によれば、大部分の指標に対する L 関数は $(1/6)$ を下回って、指数は $(1/8)$ 程度まで下げられるらしい。

参考文献

- [1] Burgess D.A. : On character sums and L-series II,
Proc. London Math. Soc. (3), Vol.13 (1963) pp. 524 – 536.
- [2] Burgess D.A. : Mean values of character sums,
Mathematika, Vol. 33 (1986) pp.1 – 5.
- [3] Burgess D.A. : Mean values of character sums III,
Mathematika, Vol. 42 (1995) pp.133 – 136.
- [4] Burgess D.A. : On the average of character sums for a group of characters,
Acta Arithmetica, Vol.79 (1997) pp.313 – 322.

- [5] Friedlander J.-Iwaniec H. : A Note on Character Sums,
Contemporary Mathematics, Vol. 166 (1994) pp.295 - 299
- [6] Fujii A.-Gallagher P.X.-Montgomery H.L. : Some hybrid bounds for character
sums and Dirichlet L-series,
Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, Vol. 13 (1974) pp. 41 – 57.
- [7] Heath-Brown D.R. : Hybrid Bounds for Dirichlet L-Functions,
Inventiones math., Vol 47 (1978) pp 149 – 170.
- [8] Heath-Brown D.R. : An Estimate for Heilbronn's Exponential Sum,
Progress in Mathematics, Vol.136 (1996) pp.451 – 463 (Birkhäuser).
- [9] Heath-Brown D.R. : New Bounds for Gauss Sums Derived From k-th Powers,
and for Heilbronn's Exponential Sum, (pre-print).
- [10] Murata Leo : On characters of order $p \pmod{p^2}$,
to appear in Acta Arithmetica, Vol. 87 (1998).

以上