

## 測度距離空間の収束と集中

京都大学・数理解析研究所 横田 巧  
Takumi Yokota  
Research Institute for Mathematical Sciences  
Kyoto University

本稿の目的は, Gromov [Gr] が導入した測度距離空間の幾何学について日本語で簡潔に紹介することである. 主な参考文献は Gromov [Gr, Chapter 3 $\frac{1}{2}$ ], Funano–Shioya [FS], Shioya [Sh] などである. Shioya [Sh2] にも簡潔にまとめられている. 最後に, 筆者の最近の共同研究 [OY] の主定理の主張を述べる.

**定義 1** ([Gr, 3 $\frac{1}{2}$ .1]). 完備可分距離空間  $(X, d_X)$  上の Borel 確率測度  $\mu_X$  からなる三つ組  $X = (X, d_X, \mu_X)$  を**測度距離空間** (*mm-空間*, *metric measure space*, *mm-space*) と呼ぶ.

位相空間  $X$  上の Borel 測度  $\mu$  の**台**  $\text{supp } \mu$  を

$$\text{supp } \mu := X \setminus \bigcup \{O : O \subset X \text{ は } \mu(O) = 0 \text{ を満たす開集合}\}$$

と定義する. 可分距離空間 (または, 濃度が Ulam number [Fe, 2.1.6] である稠密部分集合を含む距離空間)  $X$  上の Borel 確率測度  $\mu$  は  $\text{supp}(X \setminus \text{supp } \mu) = 0$  を満たす (e.g. Federer [Fe, Theorem 2.2.16]).

2つの mm-空間  $X$  と  $Y$  に対して, 任意の  $x, x' \in X$  に対して

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

と  $f_*\mu_X = \mu_Y$  を満たす写像  $f : X \rightarrow Y$  が存在するとき,  $X$  と  $Y$  は **mm-同型**であるという. 任意の mm-空間  $(X, d_X, \mu_X)$  は  $(\text{supp}_X, d_X, \mu_X)$  と mm-同型であるため, 以下では

$$X = \text{supp } \mu_X$$

であると約束する.

区間  $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$  上の 1 次元 Lebesgue 測度  $\mathcal{L}$  に対して,  $\varphi_*\mathcal{L} = \mu_X$  を満たす Borel 可測写像  $\varphi : I \rightarrow X$  を mm-空間  $X$  の**パラメータ**と呼ぶ. 任意の mm-空間はパラメータを持つ (e.g. [Sh, Lemma 4.2]).

Gromov [Gr] は mm-空間の mm-同型類全体の集合  $\mathcal{X}$  に次の 2 つの距離を導入した.

**定義 2** ([Gr, 3 $\frac{1}{2}$ .3]). 2つの mm-空間  $X, Y \in \mathcal{X}$  の間の**ボックス距離**を

$$\square(X, Y) := \inf_{\varphi, \psi} \{\varepsilon \geq 0 : (3) \text{ が成り立つ Borel 集合 } I_0 \subset I \text{ が存在する}\}$$

と定義する. ここで,  $\varphi : I \rightarrow X$  と  $\psi : I \rightarrow Y$  はパラメータであり,

$$(3) \quad |d_X \circ \varphi - d_Y \circ \psi| \leq \varepsilon \text{ on } I_0 \times I_0, \quad \mathcal{L}^1(I_0) \geq 1 - \varepsilon.$$

確率空間  $(X, \mu)$  上の可測関数  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  の間の *Ky Fan 距離*を

$$d_{KF}(f, g) := \inf \{\varepsilon > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon\}$$

と定義する. 距離空間  $(X, d_X)$  上の 1-Lipschitz 関数全体の集合を

$$\mathcal{Lip}_1(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, x' \in X \ |f(x) - f(x')| \leq d_X(x, x')\}$$

とおく.

---

本研究は科研費 (基盤 (C):18K03298) の助成を受けたものである.

**定義 4** ([Gr, 3 $\frac{1}{2}$ .45]). 2つの mm-空間  $X, Y \in \mathcal{X}$  の間の**オブザーバブル距離**を

$$d_{\text{conc}}(X, Y) := \inf_{\varphi, \psi} d_H(\varphi^* \mathcal{L}ip_1(X), \psi^* \mathcal{L}ip_1(Y))$$

と定義する. ここで,  $\varphi: I \rightarrow X$  と  $\psi: I \rightarrow Y$  はパラメータであり,  $d_H$  は Ky Fan 距離  $d_{KF}$  から定まる Hausdorff 距離を表す. また, mm-空間の列  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  と mm-空間  $Y$  が  $d_{\text{conc}}(X_n, Y) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たすとき,  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  は  $Y$  に**集中する**という.

オブザーバブル距離の定義は測度の集中現象 (e.g. Ledoux [Le]) に由来する. Gromov [Gr] や Funano-Shioya [FS] は,  $d_{KF}$  や  $d_{\text{conc}}$  の代わりに,  $\text{me}_1$  や  $H_1 \mathcal{L}t_1$  という記号を使用していることに注意する. オブザーバブル距離を表す記号  $d_{\text{conc}}$  は Pestov [Pe] による (cf. [Sh, 5.5 Notes and remarks]).

- 例 5.** (1) 1点空間に集中する mm-空間の列は **Lévy 族** (e.g. [Sh, Definition 2.14]) と呼ばれる.  
 (2) 半径  $r_n > 0$  の  $n$  次元定曲率球面  $S^n(r_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  の列が Lévy 族であるための必要十分条件は  $r_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) である (Gromov–Milman [GM]).  
 (3) Lévy 族  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  と mm-空間  $Y$  に対して, 直積集合  $X_n \times Y$  に直積距離と直積測度を入れると  $\{X_n \times Y\}_{n=1}^\infty$  は  $Y$  に集中する ([Gr, 3 $\frac{1}{2}$ .46], cf. [Sh, Proposition 7.32]).

**定理 6** (e.g. [Sh, Proposition 4.25]).  $(\mathcal{X}, \square)$  は完備可分距離空間である.

**定理 7** (e.g. [Sh, Theorem 5.13]).  $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$  は可分距離空間である.

**補足 8.** 単位球面  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  の直積  $X_n := S^1 \times \cdots \times S^n$  の列  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  は  $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$  における Cauchy 列であるが, どんな mm-空間にも集中しないため,  $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$  は完備ではない ([Sh, Example 7.36], cf. [OY]).

**補足 9.** 測度距離空間の列に対して, 幾つかの収束の概念が知られている:

- (1) (点付き) 測度付き Gromov–Hausdorff (pmGH) 収束 (Fukaya [Fu])
- (2)  $\mathbb{D}$ -収束 (Sturm [St])
- (3)  $d_{l_\infty\text{-Pr}}$ -収束 (Ozawa [Oz])
- (4) pointed measured Gromov (pmG) 収束 (Gigli–Mondino–Savaré [GMS])
- (5)  $\square$ -収束 (定義 2), Gromov–Prohorov 収束 (e.g. [Sh, Remark 4.16])
- (6)  $d_{\text{conc}}$ -収束 (定義 4)

このうち, (6) の  $d_{\text{conc}}$ -収束, つまり集中が最も弱い収束である. 例えば, (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (5) は [St, Lemma 3.18, Lemma 3.7] から従う. (3)  $\Rightarrow$  (5) は [Oz] の主定理から従う. Greven et al. [GPW, Theorem 5] と Gigli et al. [GMS, Theorem 3.15] により, (4) と (5) は本質的に同値である. (5)  $\Rightarrow$  (6) は任意の mm-空間  $X, Y$  に対して成り立つ不等式

$$d_{\text{conc}}(X, Y) \leq \square(X, Y)$$

(e.g. [Sh, Proposition 5.5]) から従う.

次の命題は mm-空間の集中を調べる際に有用である.

**命題 10** ([FS], [Sh]). mm-空間の列  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  が mm-空間  $Y$  に集中しているとき, 次を満たす Borel 可測写像  $p_n: X_n \rightarrow Y$  とコンパクト集合  $\tilde{X}_n \subset X_n$  と正の数  $\varepsilon_n > 0$  の列が存在する:

- (1)  $d_H(\mathcal{L}ip_1(X_n), p_n^* \mathcal{L}ip_1(Y)) \leq \varepsilon_n$  かつ  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
- (2) 確率測度  $(p_n)_* \mu_{X_n}$  は  $\mu_Y$  に弱収束する.
- (3) 任意の  $x, x' \in \tilde{X}_n$  に対して,  $d_Y(p_n(x), p_n(x')) \leq d_{X_n}(x, x') + \varepsilon_n$  かつ  $\mu_{X_n}(\tilde{X}_n) \geq 1 - \varepsilon_n$ .
- (4) 任意の  $y_0 \in Y$  に対して,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X_n \setminus \tilde{X}_n} d_Y(p_n(x), y_0) < +\infty$ .

- (5) 任意の Borel 集合  $B \subset Y$  と  $\kappa > 0$  に対して,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(p_n^{-1}(B); -\kappa) \leq \text{diam } B$ .

ここで, 正の数  $\kappa > 0$  に対して,

$$\begin{aligned} & \text{ObsDiam}(B; -\kappa) \\ &:= \sup_{f \in \text{Lip}_1(B)} \inf \{ \text{diam } A : A \subset \mathbb{R} \text{ は } f^{-1}(A) \geq \mu_X(B) - \kappa \text{ を満たす Borel 集合} \} \end{aligned}$$

は mm-空間  $X$  の Borel 集合  $B \subset X$  の**オブザーバブル直径**を表す.

また, Gromov [Gr] は  $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$  のコンパクト化としてピラミッドの空間  $\Pi$  を導入し, Shioya [Sh] (cf. Ozawa–Shioya [OS]) は  $\Pi$  上に距離を定義した.

2つの mm-空間  $X$  と  $Y$  の間に  $f_*\mu_X = \mu_Y$  を満たす 1-Lipschitz 写像  $f: X \rightarrow Y$  が存在するとき,  $X$  は  $Y$  を**支配する**といい,  $Y \prec X$  と表す.

**定義 11** ([Gr, 3.1.51], [Sh, Definition 6.3]). 次の (1)–(3) を満たす部分集合  $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$  を**ピラミッド**と呼ぶ. また, ピラミッド全体の集合を  $\Pi$  で表す.

- (1)  $X \in \mathcal{P}$  かつ  $Y \prec X$  ならば  $Y \in \mathcal{P}$ .
- (2)  $X, Y \in \mathcal{P}$  に対して,  $X \prec Z$  かつ  $Y \prec Z$  を満たす  $Z \in \mathcal{P}$  が存在する.
- (3)  $\mathcal{P}$  は空集合でない  $(\mathcal{X}, \square)$  の閉集合である.

**例 12** (e.g. [Sh, Theorem 4.35]). 任意の mm-空間  $X \in \mathcal{X}$  に対し,

$$\mathcal{P}_X := \{Y \in \mathcal{X} : Y \prec X\}$$

はピラミッドである. また,  $\mathcal{X}$  自身もピラミッドである.

**定義 13** (Ozawa–Shioya [OS], cf. [Sh, Definition 6.21]). 整数  $N \geq 1$ , 正の数  $R > 0$ , ピラミッド  $\mathcal{P} \in \Pi$  に対して,  $\mathcal{M}(N)$  を  $\mathbb{R}^N$  上の Borel 確率測度全体の集合とし,

$$\begin{aligned} B_R^N &:= \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_\infty \leq R\}, \\ \mathcal{M}(\mathcal{P}; N, R) &:= \{(\text{supp } \mu, \|\cdot\|_\infty, \mu) : \mu \in \mathcal{M}(N), \text{supp } \mu \subset B_R^N\} \end{aligned}$$

とおく. 2つのピラミッド  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \Pi$  の間の距離を

$$\rho_R(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N 2^{N+1}} d_H(\mathcal{M}(\mathcal{P}; N, NR), \mathcal{M}(\mathcal{Q}; N, NR))$$

と定義する. ここで,  $d_H$  は  $\mathbb{R}^N$  上のノルム  $\|\cdot\|_\infty$  から定まる  $\mathcal{M}(N)$  上の Prohorov 距離から定まる Hausdorff 距離を表す.

**定理 14** ([OS, Theorem 3.7]).  $R > 0$  を正の数とする.

- (1)  $(\Pi, \rho_R)$  はコンパクト距離空間である.
- (2)  $X \ni \mathcal{X} \mapsto \mathcal{P}_X \in \Pi$  は  $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$  の  $(\Pi, \rho_R)$  への埋め込みを定める.
- (3) mm-空間の列  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  が mm-空間  $Y$  に集中することの必要十分条件は, ピラミッドの列  $\{\mathcal{P}_{X_n}\}_{n=1}^\infty$  がピラミッド  $\mathcal{P}_Y$  に  $(\Pi, \rho_R)$  で収束することである.
- (4) 2つの mm-空間  $X, Y \in \mathcal{X}$  に対して,

$$(15) \quad \rho_R(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \leq d_{\text{conc}}(X, Y).$$

**補足 16** ([Sh, Remark 6.26]). 半径  $r_n > 0$  の  $n$  次元定曲率球面  $S^n(r_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  の列  $\{S^n(r_n)\}_{n=1}^\infty$  は, 極限  $\lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} r_n / \sqrt{n} \in (0, \infty)$  が存在するとき,  $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$  で収束する部分列を持たないが, ピラミッド  $\mathcal{P}_{S^n(r_n)}$  の列はあるピラミッド  $\mathcal{P}_{\Gamma_{\lambda^2}^\infty}$  に収束することから, 一般に (15) の逆向きの不等式は成り立たない.

最後に、筆者の小澤龍ノ介氏（大阪大学）との共同研究 [OY] の主定理の主張を述べる。 $K \in \mathbb{R}$ ,  $N \in (1, \infty]$  とする. Lott–Villani (e.g. [Vi]) と Sturm [St] により、測度距離空間に対して、最適輸送理論に由来する、そのリッチ曲率が  $K$  以上で次元が  $N$  以下であることを意味する**曲率次元条件** (*Curvature Dimension condition*)  $\text{CD}(K, N)$  が導入され、さらに Ambrosio–Gigli–Savaré [AGS] により、その条件を強めたりーマンの**曲率次元条件** (*Riemannian Curvature Dimension condition*)  $\text{RCD}(K, N)$  が導入された。

次が [OY] の主定理である。

**定理 17** (Ozawa–Y. [OY]).  $K \in \mathbb{R}$  を実数とする.  $\text{RCD}(K, \infty)$  条件を満たす  $\text{mm}$ -空間の列  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  が  $\text{mm}$ -空間  $Y$  に集中したとき、 $Y$  も  $\text{RCD}(K, \infty)$  条件を満たす。

定理 17 は次の定理の類似である。

**定理 18** (Funano–Shioya [FS], Kazukawa–Ozawa–Suzuki [KOS]).  $K \in \mathbb{R}$  を実数とする.  $\text{CD}(K, \infty)$  条件を満たす  $\text{mm}$ -空間の列  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  が  $\text{mm}$ -空間  $Y$  に集中したとき、 $Y$  も  $\text{CD}(K, \infty)$  条件を満たす。

## 参考文献

- [AGS] L. Ambrosio; N. Gigli; G. Savaré, Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. *Invent. Math.* 195 (2014), no. 2, 289–391.
- [Fe] H. Federer, Geometric measure theory. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Band 153 Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.
- [Fu] K. Fukaya, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator. *Invent. Math.*, 87 (1987), 517–547.
- [FS] K. Funano; T. Shioya, Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian. *Geom. Funct. Anal.* 23 (2013), no. 3, 888–936.
- [GMS] N. Gigli; A. Mondino; G. Savaré, Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 111 (2015), no. 5, 1071–1129.
- [GPW] A. Greven; P. Pfaffelhuber; A. Winter, Convergence in distribution of random metric measure spaces ( $\Lambda$ -coalescent measure trees). *Probab. Theory Related Fields* 145 (2009), no. 1-2, 285–322.
- [Gr] M. Gromov, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. *Progress in Mathematics*, 152. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [GM] M. Gromov; V. D. Milman, A topological application of the isoperimetric inequality. *Amer. J. Math.* 105 (1983), no. 4, 843–854.
- [KOS] D. Kazukawa; R. Ozawa; N. Suzuki, Stabilities of rough curvature-dimension conditions. Preprint.
- [Le] M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon. *Mathematical Surveys and Monographs*, 89. American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [Oz] R. Ozawa, Distance between metric measure spaces and distance matrix distributions. *Tsukuba J. Math.* 38 (2015), no. 2, 159–170.
- [OS] R. Ozawa; T. Shioya, Limit formulas for metric measure invariants and phase transition property. *Math. Z.* 280 (2015), no. 3-4, 759–782.
- [OY] R. Ozawa; Y. Yokota, Stability of RCD condition under concentration topology. Preprint.
- [Pe] V.G. Pestov, Dynamics of infinite-dimensional groups. The Ramsey-Dvoretzky-Milman phenomenon. *University Lecture Series*, 40. American Mathematical Society.
- [Sh] T. Shioya, Metric measure geometry. Gromov’s theory of convergence and concentration of metrics and measures. *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, 25. EMS Publishing House, Zürich, 2016.
- [Sh2] T. Shioya, Concentration, convergence, and dissipation of spaces. *Geometry and topology of manifolds*, 299–314, *Springer Proc. Math. Stat.*, 154, Springer, 2016.
- [St] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I. *Acta Math.* 196 (2006), no. 1, 65–131.
- [Vi] C. Villani, Optimal transport. Old and new. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 338. Springer-Verlag, Berlin, 2009.