

Linnik の問題について

東工大 黒川信重

§ 1. Linnik の問題

$\mathbb{Q}$: 有理数体, $F/\mathbb{Q}$: 有限次拡大, K_i/F : 有限次拡大,

$i=1, \dots, r$, $r \geq 1$, C_i : K_i の idele 類群 とする。

χ_i : K_i の 量 指 標 (i.e. $\chi_i: C_i \rightarrow GL(1, \mathbb{C})$ continuous

homomorphism, $\mathbb{C}$: 複素数体) に対し, $L(s, \chi_i)$ を

Hecke L -函数とし, $L(s, \chi_i)$ を F の 整 ideals $\mathfrak{a}$ について

展開したものを $L(s, \chi_i) = \sum_{\mathfrak{a} \in F} c_i(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$ と書く。

$c_i(\mathfrak{a})$ は 次の式で与えられる:

$$c_i(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\mathcal{O} \in K_i \\ N_{K_i/F}(\mathcal{O}) = \mathfrak{a}}} \chi_i(\mathcal{O}), \quad \text{ここで } \mathcal{O} \text{ は } K_i \text{ の 整 ideals を 動かす。}$$

このとき, $L_F(s, \chi_1, \dots, \chi_r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathfrak{a} \in F} c_1(\mathfrak{a}) \dots c_r(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$ とおき,

これを $L(s, \chi_i)$, $i=1, \dots, r$ の F 上の scalar product と呼ぶ。

Linnik の問題とは次の問題を目指す。

問題 (Ju. V. Linnik) $L_F(s, \chi_1, \dots, \chi_r)$ は $\mathbb{C}$ 上 z^r meromorphic ?

この問題について z 次の事が知られている。

定理 (Dixon [2]) $\chi_i, i=1, \dots, r$ が unitary ならば

$L_F(s, \chi_1, \dots, \chi_r)$ は $\operatorname{Re}(s) > 0$ z^r meromorphic。

§ 2. 結果

$\underline{n} = (n_1, \dots, n_r), 1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r$ integers, $r \geq 1$ について次の定義をする。

$\underline{n} : \text{type I} \stackrel{\text{def}}{\iff} \underline{n} = (1, \dots, 1, *) \text{ or } (1, \dots, 1, 2, 2)$
 $(r \leq 2 \text{ なら } \underline{n} = (*), (1, *), (2, 2))$ 。

$\underline{n} : \text{type II} \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{otherwise}。$

Linnik の問題について次の 2 つの定理を得る。

Theorem 1 $F/\mathbb{Q}, K_i/F, i=1, \dots, r, r \geq 1, \chi_i$ も §1 のとおりとする。

次に $n_i = [K_i : F]$ 拡大次数 としたとき, $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r$

であり, $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$ が type I と仮定する。このとき

$L_F(s, \chi_1, \dots, \chi_r)$ は $\mathbb{C}$ 上 z^r meromorphic。

Theorem 2 $F/\mathbb{Q}, K_i/F, i=1, \dots, r, r \geq 1, \chi_i$ も §1 のとおりとし,

さらに, χ_i は finite order とする。次に $n_i = [K_i : F]$ としたとき

$1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r$ であり, $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$ が type II と仮定する。

このとき, $L_F(s, \chi_1, \dots, \chi_r)$ は $\operatorname{Re}(s) > 0$ z^r meromorphic,

$\operatorname{Re}(s) = 0$ は natural boundary。

注意 Theorem 2 において χ_i が finite order の仮定は幾分弱くすることができる。また, §1 で引用した Draxl の定理は, Theorem 1, Theorem 2 を証明する方法で再証明できる。

§3. Main Theorem (Artin type)

$F/\mathbb{Q}$: 有限次拡大, K/F : 有限次 Galois 拡大,

$G = \operatorname{Gal}(K/F)$: Galois 群, $R(G)$: G の指標環 (G の $\mathbb{C}$ 上の virtual characters の作る ring) とする。

K/F で不分岐な F の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対して $\alpha(\mathfrak{p}) = \left[\frac{K/F}{\mathfrak{p}} \right]$ で, その Frobenius 共役類を表わす ($\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ を割る K の素 ideal)。

$H(T) \in 1 + T \cdot R(G)[T]$, T は不定元, に対して

$H_{\alpha(\mathfrak{p})}(T) \in 1 + T \cdot \mathbb{C}[T]$ によって $H(T)$ の係数 (G 上の類関数に注意) に $\alpha(\mathfrak{p})$ を代入したものとする。

$L(s, H) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\mathfrak{p}} H_{\alpha(\mathfrak{p})}(N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$ とおく。ここで $\mathfrak{p}$ は

K/F で不分岐な F の素 ideal 全体を動く。

次の定義をする。 $L(s, H)$: unitary $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 各 $\mathfrak{p}$ に対して

$H_{\alpha(\mathfrak{p})}(T) = \det(1 - M_{\mathfrak{p}} T)$ となる unitary 行列 $M_{\mathfrak{p}}$ が存在する

(又は $H_{\alpha(\mathfrak{p})}(T) = 1$)。

このとき, 次の定理が成り立つ。

Main Theorem (Artin type) $F/\mathbb{Q}$, K/F , G , $H(T) \in 1 + T \cdot R(G)[T]$, $L(s, H)$ を上記のとおりとする。このとき:

- (1) $L(s, H)$: unitary $\Leftrightarrow L(s, H)$ は $\mathbb{C}$ 上 z^n meromorphic。
 (2) $L(s, H)$: not unitary $\Leftrightarrow L(s, H)$ は $\operatorname{Re}(s) > 0$ z^n meromorphic,
 $\operatorname{Re}(s) = 0$ は natural boundary ($\operatorname{Re}(s) = 0$ 上の各点は $L(s, H)$ の $\operatorname{Re}(s) > 0$ における poles の limit-point になる)。

注意 Main Theorem (Artin type) において $F = K = \mathbb{Q}$ の場合は Estermann [3] で扱われている。

§4. 証明及び関連する結果について

証明は次の所を参照して下さい。

Main Theorem (Artin type) : [5]。

Theorem 1 及び Theorem 2 : [6]。特に Theorem 2 (及び Theorem 1 で χ_i が finite order の場合) は Artin's reciprocity law を用いることにより Main Theorem (Artin type) から導かれます。

なお、応用 (保型表現から構成される Dirichlet 級数の meromorphy, etc.) や一般化については [4], [5], [6] を参照して下さい。特に Deligne-Serre [1] の主定理を用いることにより, weight 1 の (holomorphic) elliptic normalized eigen cusp forms に対して "Rankin convolution" の方法から scalar

products の形では一般化できないことがわかる。

References

- [1] P. Deligne and J.-P. Serre : Formes modulaires de poids 1. Ann. sci. E.N.S. 4^e ser., 7, 507-530 (1974)。
- [2] P. K. J. Draxl : L-Funktionen algebraischer Tori. J. Number Theory, 3, 444-467 (1971)。
- [3] T. Estermann : On certain functions represented by Dirichlet series. Proc. London Math. Soc., 27, 435-448 (1928)。
- [4] N. Kurokawa : On the meromorphy of Euler products. Proc. Japan Acad., 54A, 163-166 (1978)。
- [5] N. Kurokawa : On the meromorphy of Euler products. Part I. (to appear)。
- [6] N. Kurokawa : On Linnik's problem. Proc. Japan Acad., 54A, 167-169 (1978)。