

修理限界取替え方策に対する幾何学的解法

土肥 正, 海生 直人[†], 尾崎 俊治

DOHI Tadashi, KAIO Naoto, OSAKI Shunji

広島大学工学部, 広島修道大学商学部[†]

1. はじめに

総試験時間統計量 (Total Time on Test Statistics: 以下では TTT 統計量) は信頼性データの解析を行う上で非常に重要な概念である. Barlow and Campo [1] と Barlow and Proschan [2] は TTT 変換 (Total Time on Test Transform) と呼ばれる概念を導入することによって, 観測データの故障率関数の単調性や理論分布への適合性を特徴づける方法を提案している. さらに, TTT 変換は保全問題に関連したある種の最適化問題を幾何学的に解釈し, 予め故障分布や修理分布の形状を仮定することなく, 観測データから直接最適方策を求めることを可能にすることが知られている. Bergman [4], Bergman and Klefsjö [5] が TTT 変換を用いて年令取替え問題をノンパラメトリックに解く手続きを発見して以来, この概念は信頼性理論における各種保全問題を解くために利用されている.

これに対して, 本論文では修理限界取替え問題について考察を行う. 通常, 修理限界取替え問題は時間制約および費用制約をともなう 2 種類の問題に分類される. Hastings [7], Kaio and Osaki [9], Nakagawa and Osaki [11, 12], Okumoto and Osaki [13] は時間制約をともなう異なる修理限界取替え問題を議論している. つまり, 様々な環境下において, 定常状態における単位時間当たりの期待費用等を最小にする修理打ち切り時間 (修理時間限界) を解析的に導出している. 一方, 費用制約をともなう修理限界取替え問題は, ある種の費用関数を最小にする修理打ち切り費用 (修理費用限界) を求める問題であり, Kaio and Osaki [8], Nakagawa and Osaki [12] によって議論されている.

著者等は文献 [6, 10] において, TTT 変換を用いて時間制約をともなう修理限界取替え問題を幾何学的に解く方法を提案している. これに対して本論文の目的は, スペアユニットの補充に要するリードタイムを考慮した, 一般化された費用制約をともなう修理限界取替え問題に対し, TTT 変換を用いて最適解を求める手続きを示すことにある. このような問題を幾何学的に解釈することによる利点として, 修理費用分布を推定することなく, 修理費用の観測データからノンパラメトリックに最適修理費用限界を求めることができる点が挙げられる.

2. 費用制約をともなう修理限界取替え問題

ここでは Nakagawa and Osaki [12] とは異なった費用制約をともなう修理限界取替え問題について考察する. 1 ユニットシステムにおいて故障ユニットは修理可能であり, システムは時刻 0 において稼働を開始する. ユニットが故障したとき, 直ちに修理が開始される. ここで, ユニットの平均故障時間は $m_f(>0)$ である. もし修理が予め定められた費用 $v_0 \in [0, \infty)$ までに完了したならば, ユニットは新品同様となり, 直ちにインストールされた後稼働を開始する. ここで, 修理費用が v_0 以内でおさまった場合の平均修理時間を $m_s(>0)$ と表記する. 一方, 修理費用が v_0 以上になるならば故障ユニットは廃棄され, 直ちにスペアユニットが発注される. スペアユニットの補充にはリードタイム $L(>0)$ の時間遅れが生じるものとする. 修理費用が v_0 を上回る場合の平均修理時間を $m_u(>0)$ とする. 費用 v_0 は修理費用限界と呼ばれるものである.

各ユニットの修理費用は確率的であり、密度関数 $h(v)$ と平均 $m_m (0 < m_m < \infty)$ をもつ連続形一般分布 $H(v)$ に従うものとする。ここでは一般性を失うことなく、確率分布関数の逆関数 $H^{-1}(\cdot)$ が存在するものと仮定する。いま、システムの稼働開始時刻から次の稼働開始時刻までの期間を 1 サイクルと定義し、各サイクル中で生じるユニットの発注費用を $c(> 0)$ 、システムダウン期間に比例する品切れ費用を $k_f(> 0)$ と表記する。特に、本論文では各パラメータに関して以下の仮定をおく。

$$(A-1) \quad m_s > m_u + L.$$

$$(A-2) \quad k_f m_s < k_f(m_u + L) + c.$$

各サイクル中に発生する期待費用は次の通りである。

(i) 期待修理費用:

$$\int_0^{v_0} v dH(v) + \int_{v_0}^{\infty} v_0 dH(v) = \int_0^{v_0} \bar{H}(v) dv. \quad (1)$$

ここで、 $\bar{H}(\cdot) = 1 - H(\cdot)$ である。

(ii) 期待品切れ費用:

$$k_f \left\{ \int_0^{v_0} m_s dH(v) + \int_{v_0}^{\infty} (m_u + L) dH(v) \right\} = k_f \{ m_s H(v_0) + (m_u + L) \bar{H}(v_0) \}. \quad (2)$$

(iii) 期待発注費用: $c\bar{H}(v_0)$.

これより、1 サイクル中に生じる総期待費用は

$$E_C(v_0) = \int_0^{v_0} \bar{H}(v) dv + k_f [m_s H(v_0) + (m_u + L) \bar{H}(v_0)] + c\bar{H}(v_0) \quad (3)$$

となる。

一方、無限計画期間を考える場合、評価関数として定常状態における単位時間当たりの期待費用を採用することは妥当である。再生定理を用いることによって、単位時間当たりの期待費用は

$$\begin{aligned} C(v_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[\text{the total cost on } (0, t)]}{t} \\ &= E_C(v_0) / E_T(v_0) \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで、 $E_T(v_0)$ は 1 サイクルの平均時間であり、

$$\begin{aligned} E_T(t_0) &= \int_0^{v_0} (m_f + m_s) dH(v) + \int_{v_0}^{\infty} (m_f + m_u + L) dH(v) \\ &= m_f + m_s H(v_0) + (m_u + L) \bar{H}(v_0) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

本論文の目的は次の 2 種類の費用関数を最小にする最適修理費用限界 v_0^* を求めることである。

$$\text{問題 I; } \min_{0 \leq v_0 \leq \infty} E_C(v_0), \quad (6)$$

$$\text{問題 II;} \quad \min_{0 \leq v_0 \leq \infty} C(v_0). \quad (7)$$

以下では最適修理費用限界が唯一存在するための条件について代数学的に求める。
問題 I において、次のような非線形関数 $q_1(v_0)$ を定義する。

$$q_1(v_0) = \{k_f(m_u + L - m_s) + c\}e(v_0) - 1. \quad (8)$$

ここで、

$$e(v) \equiv h(v)/\bar{H}(v) \quad (9)$$

は費用に関する瞬間修理率と呼ばれるもので、分布関数 $H(v)$ のハザード率に等しい。いま、任意の修理費用分布 $H(v)$ に対して $e(v)$ は 1 階微分可能であるものとする。

定理 2.1: $q_1(\infty) < 0$ もしくは $q_1(0) > 0$ が成立するならば、1 サイクル当たりの総期待費用 $E_C(v_0)$ を最小にする最適修理費用限界 v_0^* ($0 \leq v_0^* < \infty$ もしくは $0 < v_0^* \leq \infty$) は少なくとも一つ存在する。 $\square$

次に、瞬間修理率の単調性を仮定することによって、最適修理費用限界が唯一存在するための必要かつ十分条件を与える。

定理 2.2: (1) 修理費用分布 $H(v)$ が狭義 DHR (strictly decreasing hazard rate) であるとする。

- (i) $q_1(0) > 0$ かつ $q_1(\infty) < 0$ ならば、1 サイクル当たりの総期待費用を最小にする有限で唯一の最適修理費用限界 v_0^* ($0 < v_0^* < \infty$) が存在し、次式によって与えられる。

$$v_0^* = e^{-1}\left(\frac{1}{k_f(m_u + L - m_s) + c}\right). \quad (10)$$

ここで、 $e^{-1}(\cdot)$ は瞬間修理率 $e(\cdot)$ の逆関数である。

- (ii) $q_1(0) \leq 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* = 0$ となる。すなわち、スペアユニットの発注を常に行うことが最適となり、このときの最小総期待費用は $E_C(0) = k_f(m_u + L) + c$ によって与えられる。

- (iii) $q_1(\infty) \geq 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* \rightarrow \infty$ となる。すなわち、修理のみが実施され、スペアユニットの発注を全く行わないことが最適となり、このときの最小総期待費用は $E_C(\infty) = m_m + k_f m_s$ によって与えられる。

(2) 修理費用分布が IHR (increasing hazard rate) とする。このとき、 $k_f(m_u + L) + c < m_m + k_f m_s$ ならば $v_0^* = 0$ となり、そうでなければ $v_0^* \rightarrow \infty$ となる。 $\square$

次に、瞬間修理率が必ずしも単調性を有するとは限らない場合について最適解を特徴づける。

系 2.3: 瞬間修理率 $e(v)$ が v の単峰関数であり、 $e'(v_m) = 0$ を満たす費用 v_m が一つ存在するとする。

(1) $E_C(0) \geq E_C(v_m)$ の場合:

- (i) $q_1(v_m) > 0$ かつ $q_1(\infty) < 0$ ならば、最適修理費用限界は式 (10) によって与えられる。

- (ii) $q_1(v_m) \leq 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* = v_m$ となる。

(iii) $q_1(\infty) \geq 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* \rightarrow \infty$ となる。

(2) $E_C(0) < E_C(v_m)$ の場合:

(i) $q_1(v_m) > 0$ かつ $q_1(\infty) < 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* = 0$ もしくは式 (10) によって与えられる。

(ii) $q_1(v_m) \leq 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* = 0$ となる。

(iii) $q_1(\infty) \geq 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* = 0$ もしくは $v_0^* \rightarrow \infty$ となる。

□

ワイブル分布やガンマ分布を修理費用分布として用いる場合、IHR かもしくは DHR のいずれかになることは明かである。一方、修理費用分布として対数正規分布や逆ガウス分布が適用できる場合においては、 $e(v)$ は単峰関数となることが知られており、上述の系は有効であると考えられる。

次に問題 II について考察する。問題 I の場合と同様に、以下のような非線形関数 $q_2(v_0)$ を定義する。

$$\begin{aligned} q_2(v_0) = & \{1 + [k_f\{m_s - (m_u + L)\} - c]e(v_0)\} \{m_f + m_s H(v_0) + (m_u + L)\bar{H}(v_0)\} \\ & - [m_s - (m_u + L)]e(v_0) \left\{ \int_0^{v_0} \bar{H}(v) dv + k_f[m_s H(v_0) + (m_u + L)\bar{H}(v_0)] \right. \\ & \left. + c\bar{H}(v_0) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

定常状態における単位時間当たりの期待費用を最小にする最適修理費用限界は以下のように特徴づけられる。

定理 2.4: $q_2(\infty) > 0$ もしくは $q_2(0) < 0$ のいずれかが成立すれば、定常状態における単位時間当たりの期待費用を最小にする最適修理費用限界 v_0^* ($0 \leq v_0^* < \infty$ もしくは $0 < v_0^* \leq \infty$) が少なくとも一つ存在する。 □

定理 2.5: (1) 修理費用分布 $H(v)$ が狭義 DHR とする。

(i) $q_2(0) < 0$ かつ $q_2(\infty) > 0$ ならば、定常状態における単位時間当たりの期待費用を最小にする有限で唯一の最適修理費用限界 v_0^* ($0 < v_0^* < \infty$) が存在し、非線形方程式 $q_2(v_0) = 0$ を満たす。そのときの最小期待費用は

$$C(v_0^*) = \frac{1 + [k_f\{m_s - (m_u + L)\} - c]e(v_0^*)}{[m_s - (m_u + L)]e(v_0^*)} \quad (12)$$

となる。

(ii) $q_2(0) \geq 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* = 0$ となり、最小期待費用は

$$C(0) = \frac{k_f(m_u + L) + c}{m_f + m_u + L} \quad (13)$$

となる。

(iii) $q_2(\infty) \leq 0$ ならば、最適修理費用限界は $v_0^* \rightarrow \infty$ となり、最小期待費用は

$$C(\infty) = \frac{m_m + k_f m_s}{m_f + m_s} \quad (14)$$

となる。

(2) 修理費用分布が IHR とする. そのとき, $\{k_f(m_u + L) + c\}\{m_f + m_s\} < \{m_m + k_f m_s\}\{m_f + m_u + L\}$ ならば $v_0^* = 0$ となり, そうでなければ $v_0^* \rightarrow \infty$ となる. $\square$

3. TTT 変換を適用した幾何学的解法

Barlow and Campo [1], Bergman and Klefsjö [5] に従って, 修理費用分布の標準 TTT 変換 (scaled TTT-transform) は以下のように定義される.

$$\phi(p) \equiv \frac{1}{m_m} \int_0^{H^{-1}(p)} \bar{H}(v) dv, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (15)$$

ここで,

$$H^{-1}(p) = \inf\{v : H(v) \geq p\} \quad (16)$$

は確率分布関数 $H(v)$ の p -確率点 (p -fractile) であり,

$$m_m \equiv \int_0^\infty \bar{H}(v) dv \quad (17)$$

は平均修理費用である. 分布関数の年令特性と標準 TTT 変換の間には様々な関係が成立することが知られている (例えば, Barlow [3], Shaked and Shanthikumar [14] を参照). 特に, 分布関数 $H(v)$ が IHR (DHR) であるならば, $\phi(p)$ は $[0, 1]$ 上で凹 (凸) 関数になるという性質は極めて重要である.

以下の結果は式 (6) と式 (7) によって与えられる最適化問題を双対問題として定式化したものである.

補題 3.1: (1) 1 サイクル当たりの総期待費用 $E_C(v_0)$ を最小にする最適修理費用限界 v_0^* を求める問題は

$$\frac{k_f(m_u + L - m_s) + c}{m_m} p - \phi(p), \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (18)$$

を最大にする p^* ($0 \leq p^* \leq 1$) を求める問題と等価である.

(2) 定状状態における単位時間当たりの期待費用 $C(v_0)$ を最小にする最適修理費用限界 v_0^* を求める問題は

$$\frac{-\frac{[k_f(m_s - m_u - L) - c]m_f - cm_s}{[m_s - m_u - L]m_m} + \phi(p)}{\frac{m_f + m_u + L}{m_s - m_u - L} + p}, \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (19)$$

を最小にする p^* ($0 \leq p^* \leq 1$) を求める問題と等価である. $\square$

年令特性と標準 TTT 変換の関係をを用いて, 定理 2.2 と定理 2.5 で求めた最適修理費用限界が唯一存在するための必要かつ十分条件を幾何学的に解釈する. $p \in [0, 1]$ および $\phi(p) \in [0, 1]$ における $(x, y) = (p, \phi(p))$ 平面を考える. 補題 3.1 より, $E_C(v_0)$ を最小にする最適修理費用限界を求める問題 I は $y = \{k_f(m_u + L - m_s) + c\}p/m_m$ から直線 $y = \phi(p)$ への距離が最大になるような p^* を求め, $v_0^* = H^{-1}(p^*)$ の変換を施せばよい. 同様に問題 II に対して, $(x, y) = (p, \phi(p))$ 平面上で点 $B = (x_B, y_B)$ を定義する. ここで,

$$(x_B, y_B) \equiv \left(-\frac{m_f + m_u + L}{m_s - m_u - L}, \frac{[k_f\{m_s - m_u - L\} - c]m_f - cm_s}{[m_s - m_u - L]m_m} \right). \quad (20)$$

故に、問題は点 $B = (x_B, y_B)$ から $y = \phi(p)$ に引いた直線の傾きを最小にする p^* を求め、 $v_0^* = H^{-1}(p^*)$ の変換を施せばよい。

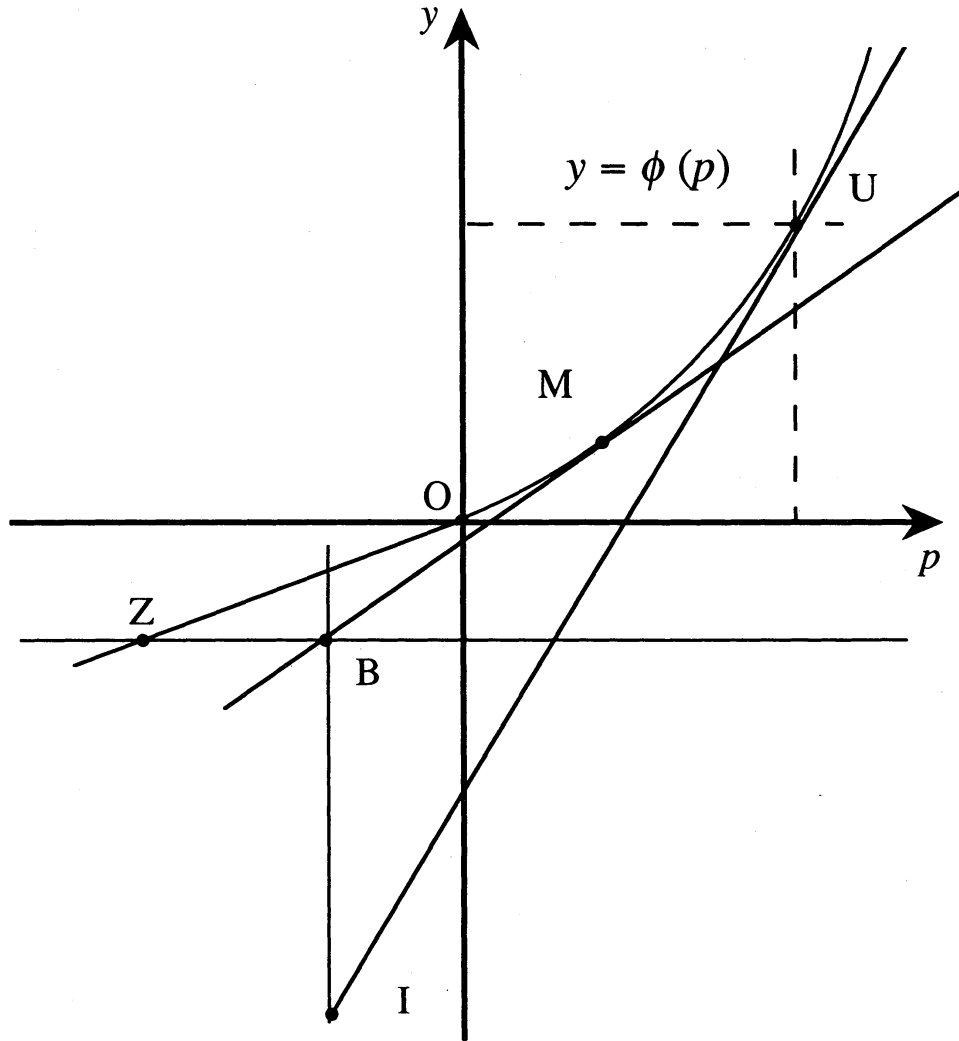


Fig.1 Graphical Determination of Optimal Repair Limit Policy.

ここでは、問題 II に対して、修理費用分布 $H(\cdot)$ が狭義 DHR である場合について考察する (Fig.1 を参照)。いま、 $y = \phi(p)$ の接線の傾きは

$$\frac{d}{dp}\phi(p) = \frac{1}{m_m e(H^{-1}(p))} \quad (21)$$

となるので (例えば, [1, p. 455]), 点 $M = (p^*, \phi(p^*))$ 上の接線 $y = \varphi(p)$ は

$$\varphi(p) = \frac{1}{m_m e(H^{-1}(p^*))}(p - p^*) + \phi(p^*) \quad (22)$$

となる。故に、点 B が直線 $y = \varphi(p)$ 上にあることは $q_2(v_0^*) = 0$ の条件を意味する。また、点 $O = (0, 0)$ における $y = \phi(p)$ の接線と直線

$$y = \frac{[k_f\{m_s - m_u - L\} - c]m_f - cm_s}{[m_s - m_u - L]m_m} \quad (23)$$

の交点 $Z = (x_Z, y_Z)$ は

$$(x_Z, y_Z) \equiv \left(\frac{[k_f\{m_s - m_u - L\} - c]m_f - cm_s}{m_s - m_u - L} e(0), \frac{[k_f\{m_s - m_u - L\} - c]m_f - cm_s}{[m_s - m_u - L]m_m} \right) \quad (24)$$

となる。もし、点 B の x 座標 x_B が点 Z の x 座標 x_Z よりも大きいならば、 $q_2(0) < 0$ となり、そうでなければ $q_2(0) \geq 0$ となる。同様に、点 $U = (1, 1)$ における接線と直線

$$p = -\frac{m_f + m_u + L}{m_s - m_u - L} \quad (25)$$

の交点 $I = (x_I, y_I)$ は

$$(x_I, y_I) \equiv \left(-\frac{m_f + m_u + L}{m_s - m_u - L}, 1 - \frac{m_f + m_s}{m_s - m_u - L} \cdot \frac{1}{m_m e(\infty)} \right) \quad (26)$$

となる。もし、点 B の y 座標 y_B が点 I の y 座標 y_I よりも大きいならば、 $q_2(\infty) > 0$ となり、そうでなければ $q_2(\infty) \leq 0$ となる。

以上のような手続きを行うことによって、定理 2.2 と定理 2.5 を幾何学的に以下のように解釈することができる。

定理 3.2: (1) 問題 I に対して、修理費用分布 $H(\cdot)$ の標準 TTT 変換 $\phi(p)$ が p に関して狭義凸関数とする。

- (i) 点 $O(0, 0)$ における $y = \phi(p)$ の接線の傾きが $\{k_f(m_u + L - m_s) + c\}/m_m$ よりも狭義に小さく、かつ点 $U(1, 1)$ におけるそれが狭義に大きいならば、 $\phi'(p) = \{k_f(m_u + L - m_s) + c\}/m_m$ を満足する唯一の最適解 $p^*(0 < p^* < 1)$ が存在し、そのときの最適修理費用限界は $v_0^* = H^{-1}(p^*)$ となる。
- (ii) 点 O における $y = \phi(p)$ の接線の傾きが $\{k_f(m_u + L - m_s) + c\}/m_m$ 以上であるならば、最適解は $p^* = 0$ ($v_0^* = 0$) となる。
- (iii) 点 U における $y = \phi(p)$ の接線の傾きが $\{k_f(m_u + L - m_s) + c\}/m_m$ 以下であるならば、最適解は $p^* = 1$ ($v_0^* \rightarrow \infty$) となる。

(2) 問題 I に対して、修理費用分布 $H(\cdot)$ の標準 TTT 変換 $\phi(p)$ が p に関して凹関数とする。もし $\{k_f(m_u + L - m_s) + c\}/m_m \geq 1$ ならば $p^* = 1$ ($v_0^* \rightarrow \infty$) となり、そうでなければ $p^* = 0$ ($v_0^* = 0$) となる。□

定理 3.3: (1) 問題 II に対して、修理費用分布 $H(\cdot)$ の標準 TTT 変換 $\phi(p)$ が p に関して狭義凸関数とする。

- (i) $x_B > x_Z$ かつ $y_B > y_I$ ならば、式 (19) を最小にする最適解 $p^*(0 < p^* < 1)$ が唯一存在し、 p^* は点 B から $y = \phi(p)$ に引いた接線の接点 $M(p, \phi(p))$ における x 座標によって与えられる。また、そのときの最小期待費用は式 (12) によって与えられる。
- (ii) $x_B \leq x_Z$ ならば、最適解は $p^* = 0$ ($v_0^* = 0$) となり、最小期待費用は式 (13) によって与えられる。

(iii) $y_B \leq y_I$ ならば、最適解は $p^* = 1$ ($v_0^* \rightarrow \infty$) となり、最小期待費用は式 (14) によって与えられる。

(2) 問題 II に対して、修理費用分布 $H(\cdot)$ の標準 TTT 変換 $\phi(p)$ が p に関して凹関数とする。そのとき、最適解 p^* は点 B と任意の点 $S = (p, \phi(p))$ を通る直線の中で最小の傾きを示す点 $S(p, \phi(p))$ の x 座標によって与えられ、 $p^* = 0$ ($v_0^* = 0$) か $p^* = 1$ ($v_0^* \rightarrow \infty$) のいずれかとなる。□

4. TTT プロットによるノンパラメトリック解法

本節では、修理費用データが与えられたとき、TTT プロットを用いて最適修理費用限界を推定する統計的手法について述べる。未知で絶対連続な確率分布関数 $H(\cdot)$ のサンプルである、修理費用に関する n 個の完全データの順序統計量 $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ が与えられているものとする。そのとき、このサンプルに対する TTT 統計量は次のように定義される。

$$T_i \equiv \sum_{j=1}^i (n-j+1)(x_j - x_{j-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad T_0 = 0. \quad (27)$$

これに対して標準 TTT 統計量 (scaled TTT-statistics) は次のようになる。

$$u_i \equiv \frac{T_i}{T_n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

いま、理論分布 (theoretical distribution) $H(v)$ に対する経験分布 (empirical distribution) を

$$H_n(v) = \begin{cases} \frac{i}{n} & \text{for } x_i \leq v < x_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ 1 & \text{for } x_n \leq v \end{cases} \quad (29)$$

のように表記すれば、平面上に点 $(i/n, u_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, をプロットし、それぞれを線分でつなぐことによって標準 TTT プロット (scaled-TTT plot) を得る。

補題 3.1 を直接適用することによって、各費用関数を最小にする最適修理費用限界を推定することが可能となる。問題 I に対しては、 $y = \{k_f(m_u + L - m_s) + c\}p_i/m_m$ から $y = \phi(p_i) = u_i$ への距離を最大にする $p_{i^*} = i^*/n$ から最適修理費用限界 x_{i^*} を求めればよい。一方、問題 II に対しては、先に定義した各点 B, I, Z の座標を計算し、点 B から $y = \phi(p_i)$ に引いた直線の傾きが最小になるような x_{i^*} を最適修理費用限界として採用すればよい。

最終的に、TTT プロットに関して以下の結果を得る。

命題 4.1: 修理費用に関する順序づけられた n 個の完全データ $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ が与えられているものとする。そのとき、1 サイクル当たりの総期待費用を最小にする最適修理費用限界 x_{i^*} は以下のように与えられる。

$$i^* = \left\{ i \mid \max_{0 \leq i \leq n} \frac{\{k_f(m_u + L - m_s) + c\}}{m_m} \cdot \frac{i}{n} - u_i \right\}. \quad (30)$$

□

命題 4.2: 修理費用に関する順序づけられた n 個の完全データ $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ が与えられているものとする。そのとき、定常状態における単位時間当たりの期待費用を最小にする最適修理費用限界 x_{i^*} は以下のように与えられる。

$$i^* = \left\{ i \mid \min_{0 \leq i \leq n} \frac{u_i - y_B}{i/n - x_B} \right\}. \quad (31)$$

ここで, (x_B, y_B) は式 (20) によって与えられる. □

参考文献

- [1] R. E. Barlow and R. Campo, "Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis", in *Reliability and Fault Tree Analysis* (eds. R. E. Barlow, J. Fussell and N. D. Singpurwalla), pp. 451-481, SIAM, Philadelphia (1975).
- [2] R. E. Barlow and F. Proschan, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York (1975).
- [3] R. E. Barlow, "Geometry of the Total Time on Test Transform", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 26, pp. 393-402 (1979).
- [4] B. Bergman, "On Age Replacement and the Total Time on Test Concept", *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 6, pp. 161-168 (1979).
- [5] B. Bergman and B. Klefsjö, "The Total Time on Test Concept and Its Use in Reliability Theory", *Operations Research*, Vol. 32, pp. 596-607 (1984).
- [6] T. Dohi, N. Kaio and S. Osaki, "Solution Procedure for a Repair Limit Problem Using TTT-transform", *IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry*, accepted for publication.
- [7] N. A. J. Hastings, "The Repair Limit Replacement Method", *Operational Research Quarterly*, Vol. 20, pp. 337-349 (1969).
- [8] N. Kaio and S. Osaki, "Optimum Repair Limit Policies with a Cost Constraint", *Microelectronics and Reliability*, Vol. 21, pp. 597-599 (1981).
- [9] N. Kaio and S. Osaki, "Optimum Repair Limit Policies with a Time Constraint", *International Journal of Systems Science*, Vol. 13, pp. 1345-1350 (1982).
- [10] H. Koshimae, T. Dohi, N. Kaio and S. Osaki, "Graphical/Statistical Approach to Repair Limit Replacement Problem", in submission.
- [11] T. Nakagawa and S. Osaki, "The Optimum Repair Limit Replacement Policies", *Operational Research Quarterly*, Vol. 25, pp. 311-317 (1974).
- [12] T. Nakagawa and S. Osaki, "Optimum Ordering Policies with Lead Time for an Operating Unit", *R. A. I. R. O. Recherche opérationnelle/Operations Research*, Vol. 12, pp. 383-393 (1978).
- [13] K. Okumoto and S. Osaki, "Repair Limit Replacement Policies with Lead Time", *Zeitschrift für Operations Research*, Vol. 20, pp. 133-142 (1976).
- [14] M. Shaked and J. G. Shanthikumar, "Reliability and Maintainability", in *Handbooks in Operations Research and Management Science Vol. 2* (eds. D. P. Heyman and M. J. Sobel), pp. 653-713, North-Holland, Amsterdam (1990).