

有限要素計算による翼の等角写像における主要項の決定

電気通信大学 情報工学科 牛島 照夫 (USHIJIMA, Teruo)
横松 大作 (YOKOMATSU, Daisaku)

0. はじめに

二次元完全流体の中で一様流中におかれた翼形のまわりの流れにおいては、翼の等角写像が与えられているとき、翼に作用する揚力、モーメントなどの積分量はその等角写像の主要部の係数によって定められる。

翼の等角写像が未知の場合でも、翼が後縁において定角をなして交わる場合には、有限要素法によってクッタの条件をみたす翼まわり流れを精密に計算することが可能である。

本稿においては、有限要素数値計算の結果から、翼の等角写像の主要部を同定する試みについて述べる。

1. クッタの条件をみたす流れ関数における正規化循環量の解析表示

平面 R^2 内の有界領域 Ω は翼形の二次元断面を表わすものとする。その境界 C は翼面である。翼形の外部領域を Ω として、次の外部問題を考える：

$$(E) \quad \begin{cases} -\Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{on } C, \\ \psi - \psi_0 \text{ は無限遠で有界.} \end{cases}$$

ここで ψ_0 は Ω 全体で調和であるものとする。

迎え角を表わす実パラメタ α を持つ一様流の流れ関数：

$$\psi_{0,\alpha} = -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y$$

と、循環流に対応する流れ関数：

$$\psi_{0,c} = \log r$$

を考える。ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in R^2$ である。

問題 (E) において、 $\psi_0 = \psi_{0,\alpha}$ および $\psi_0 = \psi_{0,c}$ としたときの ψ をそれぞれ $\psi_{u,\alpha}$ と ψ_c で表わす。

平面 R^2 と複素平面 C を同一視して、複素数 $z = x + iy$, $\zeta = x + iy$ を用いる。境界 C がジョルダン閉曲線するとき、 Ω は ζ -平面の単位円の外部に等角に写像される。その写像関数は

$$z = c(\zeta) = \sum_{n=1}^{-\infty} c_n \zeta^n \\ = c_1 \zeta + c_0 + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \dots$$

と表現される。この報告では

$$c_1 > 0$$

と正規化する。関数 $c(\zeta)$ を翼の等角写像と呼ぶことにする。さらに

$$c_0(\zeta) = c_1 \zeta + c_0 + \frac{c_{-1}}{\zeta}$$

をこの翼の等角写像の主要部と呼ぶことにする。

このとき翼面 C は

$$C = \{z = c(\zeta) : |\zeta| = 1\}$$

と表わされる。写像 $z = c(\zeta)$ は

$$\zeta = \zeta_+ = e^{-i\beta}$$

において特異である、すなわち

$$\left. \frac{dc}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_+} = 0$$

であるようなものを考える。 ζ_+ の像 $z_+ = c(\zeta_+)$ は翼の後縁の点に対応すると了解する。

助変数

$$Z = e^{-i\alpha} z$$

を導入し、

$$C(Z) = c(z)$$

とおく。Z平面における単位円まわり流れの複素速度ポテンシャルの一般解は

$$F(Z) = V \left\{ \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) + ik \log Z \right\}$$

である。ここでVとkは実パラメタである。z平面における迎え角 α を持つ速度Uの一樣流の複素速度 $w_0(z)$ は

$$w_0(z) = Ue^{-i\alpha}$$

である。Uは正の、 α は実のパラメタである。

命題1 $V = 2c_1 U$ とする。このとき

$$f(z) = F(Z), \quad z = C(Z)$$

は $w(z) = \frac{df}{dz}$ としたとき、

$$w(z) - w_0(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty$$

をみたす翼形Cまわり流れの複素速度ポテンシャルの一般解である。

証明 合成関数の微分公式によって

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dz}$$

である。逆関数に対する微分公式によって

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz} / \frac{dz}{dz}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{V \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) + ik \cdot \frac{1}{Z} \right\} \cdot e^{-i\alpha}}{\left\{ c_1 - \frac{c-1}{z^2} - \frac{2c-2}{z^3} - \dots \right\}} \\ &= \frac{V}{2c_1} e^{-i\alpha} \frac{\left\{ 1 + \frac{2ik}{Z} - \frac{1}{Z^2} \right\}}{\left\{ 1 - \frac{c-1/c_1}{z^2} - \frac{2c-2/c_1}{z^3} - \dots \right\}} \end{aligned}$$

である。ここで $z \rightarrow \infty$ のとき同程度の速さで $z \rightarrow \infty$ かつ $Z \rightarrow \infty$ であるから、

$$U = \frac{V}{2c_1}$$

に対して $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{df}{dz} = Ue^{-i\alpha} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \right)$$

である。これは命題の成立することを示している。□

定義2 翼形Cまわり流れの複素速度ポテンシャル $f(z)$ がクッタの条件をみたすとは、 $z = z_+$ において $\frac{df}{dz}$ が有限に確定することである。□

定理3 迎え角 α の一樣流に漸近する流れ場の流れ関数

$$\psi(\gamma) = \psi_{\alpha,u} + \gamma\psi_c$$

がクッタの条件をみたす流れ場の流れ関数であるためには

$$(1) \quad \gamma = 2c_1 \sin(\alpha + \beta)$$

でなければならない。□

定理3の証明を遂行するために、次の命題31、命題32、命題33を用意する。そのために記法：

$$W(Z) = \frac{dF}{dZ}(Z)$$

を使用する。すなわち

$$W(Z) = V \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) + ik \frac{1}{Z} \right\}$$

である。

命題31 単位円周上の点 $Z_+ = e^{-i\theta_+}$ が $W(Z)$ の零点である：

$$W(Z_+) = 0$$

ための必要十分条件は

$$k = \sin \theta_+$$

である。□

命題 32 命題 31 のステートメントにおいて与えられている複素速度ポテンシャル $f(z)$ が、クッタの条件をみたすためには

$$k = \sin(\alpha + \beta)$$

でなければならない。□

命題 33 実二変数 x と y の実関数 $\Psi(x, y)$ を

$$\Psi(x, y) = \text{Im } f(z), \quad z = x + iy$$

によって定めると

$$\Psi = U\{\psi_{u,\alpha} + \gamma\psi_c\}, \quad \gamma = 2c_1k$$

である。□

定理 3 の証明 命題 32 と命題 33 から直ちに得られる。□

命題 31 の証明 実際

$$\frac{2Z^2W}{V} = Z^2 + 2ikZ - 1$$

の右辺の二次式は、二根 Z_+ と Z_- を持つものとしてよい。根と係数の関係により

$$\begin{aligned} Z_+ + Z_- &= -2ik, \\ Z_+Z_- &= -1 \end{aligned}$$

が成立する。第二の関係式から

$$Z_- = -(Z_+)^{-1} = -e^{i\theta_+}$$

である。したがって第一の関係式から

$$\begin{aligned} k &= \frac{Z_+ + Z_-}{-2i} \\ &= \frac{e^{-i\theta_+} - e^{i\theta_+}}{-2i} = \sin \theta_+ \end{aligned}$$

である。□

命題 32 の証明 Z 平面における後縁の点 z_+ の原像 Z_+ は、

$$Z_+ = e^{-i\theta_+}, \quad \theta_+ = \alpha + \beta$$

と表される。命題 31 によって、 $W(Z_+) = 0$ と $k = \sin(\alpha + \beta)$ とは同値である。ところで、

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{dZ} \frac{dz}{dZ} = \frac{W(Z)}{C'(Z)}$$

である。本稿においては、

$$c'(\mathfrak{z}_+) = 0$$

を前提としているから

$$C'(Z_+) = 0$$

である。したがって $z = z_+$ においてクッタの条件をみたすためには

$$W(Z_+) = 0$$

でなければならない。すなわち

$$k = \sin(\alpha + \beta)$$

でなければならない。□

命題 33 の証明 第一段 (E) の解の一意性を認める。すなわち、 Ω で調和で境界 C で零であり、 Ω で有界な関数 $\psi \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ は、 Ω 全体で恒等的に零であるとする。(より数学的に言えば翼面 C はこの性質をもつものであることを要請する。)

第二段 実二変数 x と y を複素数 $z = x + iy$ に対応させ、さらに $z = C(Z)$ によって Z -平面の点 Z に対応させる。この対応によって基準となる流れ関数 $\Psi_{u,\alpha}$ と Ψ_c を

$$\Psi_{u,\alpha}(x, y) = \text{Im } \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right),$$

$$\Psi_c(x, y) = \text{Im } i \log Z$$

によって定める。

第三段

$$\Psi_{u,\alpha}(x, y) = \frac{1}{2c_1} \psi_{u,\alpha}.$$

何となれば、 $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) - \frac{1}{2c_1} e^{-i\alpha} z = \mathcal{O}(1)$$

である。一方、本稿では $z \rightarrow \infty$ のとき、

$$\begin{aligned} \psi_{u,\alpha} - \operatorname{Im} e^{-i\alpha} z &= \psi_{u,\alpha} - \psi_{0,\alpha} \\ &= \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

であるとしている。第二段より $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\Psi_{u,\alpha} - \frac{1}{2c_1} \psi_{u,\alpha} = \mathcal{O}(1)$$

である。更に

$$\begin{aligned} \Psi_{u,\alpha}|_C &= \operatorname{Im} \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \Big|_{|Z|=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって C 上で

$$\Psi_{u,\alpha} - \frac{1}{2c_1} \psi_{u,\alpha} = 0$$

である。第一段より、上の等式は Ω 全体で成立する。

第四段

$$\Psi_c = \psi_c$$

である。このことを示すために $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &= d_1 z + d_0 + \frac{d_{-1}}{z} + \frac{d_{-2}}{z^2} + \cdots, \\ d_1 &= \frac{1}{c_1}, d_0 = -\frac{c_0}{c_1}, d_{-1} = -c_1, \cdots \end{aligned}$$

と表されることを認める。次に

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \log Z &= \log |Z| \\ &= \log |\mathfrak{z}| \\ &= \log \left(|z| \cdot |d_1| \cdot \right. \\ &\quad \left. \left| 1 + \frac{d_0}{d_1} \frac{1}{z} + \frac{d_{-1}}{d_1} \frac{1}{z^2} + \cdots \right| \right) \end{aligned}$$

である。したがって $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\operatorname{Re} \log Z = \log |z| + \mathcal{O}(1)$$

である。これから $r \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \Psi_c &= \operatorname{Im} i \log Z \\ &= \log r + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

である。本稿では $r \rightarrow \infty$ のとき

$$\psi_c = \log r + \mathcal{O}(1)$$

としている。したがって $r \rightarrow \infty$ のとき

$$\Psi_c - \psi_c = \mathcal{O}(1)$$

である。更に

$$\begin{aligned} \Psi_c|_C &= \operatorname{Im} i \log Z|_{|Z|=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって C 上で

$$\Psi_c - \psi_c = 0$$

である。第一段より、上の等式は Ω 全体で成立する。

第五段 (命題 33 の証明)

$$f(z) = F(Z) = V \left\{ \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) + ik \log Z \right\}$$

であり、 $\Psi = \operatorname{Im} f$ であるから、第二段より

$$\Psi = V \{ \Psi_{u,\alpha} + k \Psi_c \}$$

である。命題 1 より

$$\Psi = 2c_1 U \{ \Psi_{u,\alpha} + k \Psi_c \}$$

である。第三段と第四段により

$$\begin{aligned} \Psi &= 2c_1 U \left\{ \frac{1}{2c_1} \psi_{u,\alpha} + k \psi_c \right\} \\ &= U \{ \psi_{u,\alpha} + 2c_1 k \psi_c \}. \end{aligned}$$

したがって命題 33 の結論が成立している。

□

命題 1、命題 31、命題 32 は翼理論においてはよく知られている ([今井功] など)。

定理3の導出の道すじを明晰にするために証明を附した。

2. 翼の等角写像の初項の数値的決定

我々はこの二年間 $\psi_{u,\alpha}, \psi_c$ およびクッタの条件をみたす正規化循環量 γ を有限要素計算によって定めることを追究してきた。翼の外部の無限領域の取り扱いと翼の後縁における特異性の処理がスチェクロフ作用素による非局所境界条件によって解決されることに着目した。翼形NACA23012まわりの流れについて有限要素数値計算を行った([横松-牛島-小山])。

我々の手法によって翼形NACA23012に対して迎え角 α を変化させて正規化循環量 γ を求めたものをプロットしたところ、定理3の表式(1)がよく再現されることを確認した(図2)。数値計算による表式(1)の係数 c_1 および零揚力角 β は

$$c_1 = 1.104129258, \quad \beta = 1.169237 \text{ (度)}$$

である。定理3の正規化循環量 γ から次の諸量を求めることができる。翼まわりの循環量 Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi U \gamma \\ &= 4\pi U c_1 \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

ここで U は翼に向かって流入する一様流の速度の大きさである。

揚力 L :

$$\begin{aligned} L &= \rho U \Gamma \\ &= 4\pi \rho U^2 c_1 \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

ここで、 ρ は流体の密度である。

揚力係数 C_L :

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{\rho U \Gamma}{\frac{1}{2} \rho U^2 l} \\ &= \frac{8\pi c_1}{l} \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

ここで、 l は翼弦長である。

NACA23012の迎え角 α を変化させたときの、高レイノルズ数の下での風洞実験による揚力係数と有限要素数値計算結果から数値的に求められた揚力係数を比較したところ、迎え角が小さいところでは両者は整合していることがわかった(図3)。実際の数値計算では翼弦長 l を4としているので、数値計算による正規化循環量を $\gamma_h(\alpha)$ とすると、対応する揚力係数 C_L^h は

$$\begin{aligned} C_L^h(\alpha) &= \frac{4\pi}{l} \gamma_h(\alpha) \\ &= \pi \gamma_h(\alpha) \end{aligned}$$

となる。図3の数値計算値は、この値をプロットしたものである。

3. 翼の等角写像の主要部を定める数値的手順

翼の原点まわりのモーメント M は

$$M = \int_C p(xdx + ydy) = \int_C p(-xn_y + yn_x) ds$$

で与えられる。ここで $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ は翼断面 C からみた外向き単位法線ベクトルであり、 ds は C の弧長である。 p は圧力を表わし、同一流線上ではベルヌーイの定理:

$$p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2$$

が成立している。翼理論においては、全流線において $p_\infty = \text{一定}$ (=大気圧)としている。 ρ は空気の密度であり、 $\mathbf{v}$ は速度場を示すベクトルであり、 U は一様流の流速である。

Theodorsen-Garrick[TG]等によって次の命題が知られている。その証明には、やや紙数を要するのでここでは省略する。

命題4 翼の等角写像における係数 c_0 と c_{-1} を

$$\begin{aligned} c_0 &= m e^{i(\pi-\delta)} = -m e^{i\delta}, \\ c_{-1} &= \frac{b^2}{c_1} e^{i2(\pi-\gamma)} = \frac{b^2}{c_1} e^{-2i\gamma} \end{aligned}$$

のように非負正数 m と b および実数 $\delta, \gamma \in [-\pi, \pi)$ を使って表わす。このとき迎え角 α を持つ速度 U の一様流に漸近し、後縁 z_+ においてクッタの条件をみたす流れ場 $\mathbf{v}$ における原点まわりのモーメント $M = M(\alpha)$ は次のように表示される。

$$(2) \quad M(\alpha) = -\rho U^2 \pi \times \{4mc_1 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \delta) + 2b^2 \sin 2(\alpha + \gamma)\}.$$

□

上の結果から翼の主要部 $c_0(\beta)$ を決定する次の手順に思いいたる。

手順 5 1° c_1 と β は正規化循環量 γ の迎え角依存性公式 (1) より決定する。

2° c_0 と c_{-1} は相異なる四つの迎え角 $\alpha_j, 1 \leq j \leq 4$ に対するモーメントの公式 (2) より決定する。□

$\alpha_0 = -\beta$ は零揚力角と呼ばれ、翼理論では重要なパラメタである。手順 5 の 1° において c_1 および β が決定された後の問題を再記する。

問題 6 $j = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$f_j(m, \delta, b, \gamma) = 4c_1 m \sin(\alpha_j + \beta) \cos(\alpha_j + \delta) + 2b^2 \sin 2(\alpha_j + \gamma),$$

$$m_j = -\frac{M(\alpha_j)}{\pi^2}$$

とおき

$$\mathbf{f} = (f_j)_{1 \leq j \leq 4}, \quad \mathbf{m} = (m_j)_{1 \leq j \leq 4}, \quad \mathbf{x} = (m, \delta, b, \gamma)$$

と表わす。このとき非線形方程式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}$$

の解を求めよ。□

我々の方法によれば、モーメント $M(\alpha)$ は有限要素数値計算結果を事後処理することによって算出可能である。主要項の係数の誤差評価は今後の課題である。 $M_0(\alpha)$ をし

かるべく最小二乗近似するようにパラメタ m, b, δ, γ を定めることなども試みてみたい。

謝辞

図 3 の NACA23012 の風洞実験の値は、G. P. D. Siemens 氏が NACA のテクニカルレポートの数表から数値を電子化したものを WWW で入手し使用した。ここに記して謝意を表する。

参考文献

[TG] T. Theodorsen, I. E. Garrick, General theory of arbitrary wing sections, NACA Report No.452, 1933.

[今井功] 今井 功、等角写像とその応用、岩波書店、1979.

[横松-牛島] 横松大作、牛島照夫、二次元完全流体中のクッタの条件をみたす翼まわり流れの有限要素計算、第 15 回航空機計算空気力学シンポジウム講演集、科学技術庁航空宇宙技術研究所刊行に収録見込（発表 1997 年 6 月 13 日）。

[横松-牛島-小山] 横松大作、牛島照夫、小山大介、二次元完全流体中におけるクッタの条件をみたす翼まわり流れの数値計算—NACA23012 の場合—、平成 8 年度応用数学合同研究集会報告集、pp.233-238, 1996.

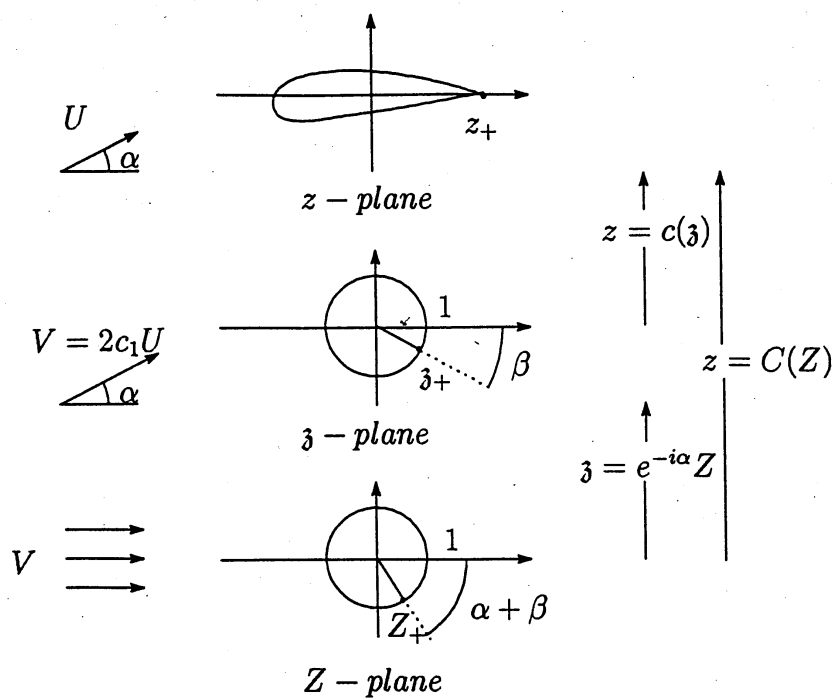
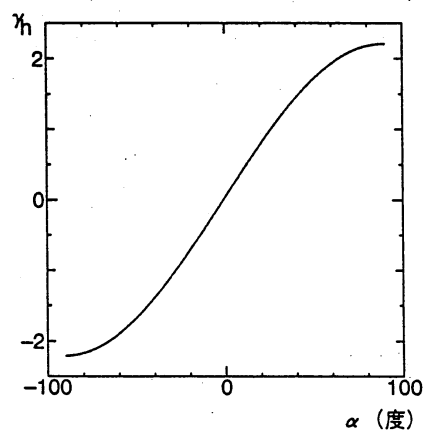
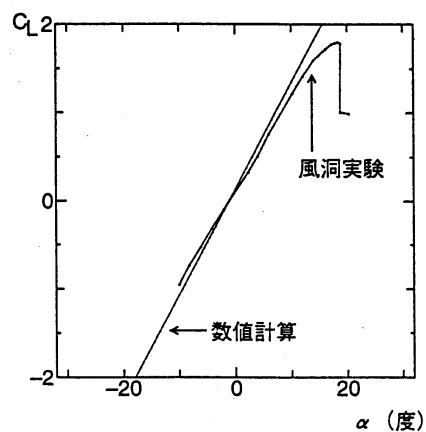


図1 翼の等角写像

図2 迎え角 α を変化させたときの正規化循環量 $\gamma_h(\alpha)$ 図3 迎え角 α と揚力係数 C_L (風洞実験の値は、レイノルズ数 8.8×10^6 のとき)