

解析関数からなる空間上の合成作用素

信州大理 高木 啓行 (Hiroyuki Takagi)

ここ数年, いろいろな関数空間上の合成作用素の研究が, 活発に行われている. ここでは, 関数空間として, 円板環, Hardy 環, Bergman 空間をとりあげ, その上の荷重合成作用素のコンパクト性について, 議論する.

D を複素平面の単位開円板とし, B を D 上の解析関数 (正則関数) からなる Banach 空間とする. D 上の正則関数 u と, D から D への正則な関数 φ に対し, B 上の作用素 uC_φ を,

$$uC_\varphi f(z) = u(z) f(\varphi(z)) \quad (z \in D, f \in B) \quad (1)$$

と定義し, それを 荷重合成作用素 (weighted composition operator) という. 荷重合成作用素の研究は, さまざまな方向から行われていて, なかでも, 等長作用素の標準表現としてよく用いられる. また, u が定数関数 1 のときは, 単に 合成作用素 (composition operator) と呼ばれ, ひとつの研究分野を形成している. 他方, φ が D の恒等写像の場合は, よく知られた 乗法作用素 (multiplication operator) である. なお, u や φ は, これらの作用素が B から B への有界線形作用素になるよう, あらかじめ設定しておいてから, 論議をはじめ.

さて、われわれの研究目的は、この荷重合成作用素 uC_φ の作用素としての性質を調べることにある。ここでは、そのコンパクト性に関するものに焦点をしばらく思う。つまり、

どのような u と φ に対して、荷重合成作用素 uC_φ はコンパクトになるか？

という問題を考える。ここで、コンパクト作用素とは、有界集合をコンパクト集合のなかにうつす作用素のことである。有界集合を弱コンパクト集合のなかにうつす場合は、弱コンパクト作用素と呼ばれる。

また、関数空間 B として、つぎの3つの空間をとりあげる：

- [1] $B = A(\bar{D})$: 円板環
- [2] $B = H^\infty(D)$: Hardy 環
- [3] $B = L^2_a(D)$: Bergman 空間

1. B が円板環 $A(\bar{D})$ の場合

円板環 $A(\bar{D})$ とは、単位閉円板 $\bar{D}$ 上で連続で、内部 D で正則な関数全体の関数環（一様ノルム）のことである。いま、 $A(\bar{D})$ の元 u と、 $\bar{D}$ を $\bar{D}$ にうつす $A(\bar{D})$ の元 φ に対し、 $A(\bar{D})$ 上の荷重合成作用素 uC_φ を、(1) 式 — D を $\bar{D}$ にかえる — で定義する。すると、作用素 uC_φ は、明らかに $A(\bar{D})$ から $A(\bar{D})$ への有界線形作用素になる。そして、そのコンパクト性は、つぎのように特徴づけられる：

定理 1 $A(\bar{D})$ 上の荷重合成作用素 uC_φ について、つぎの (a) – (c) は同値である：

- (a) uC_φ はコンパクトである。
- (b) uC_φ は弱コンパクトである。
- (c) (i) φ は定数関数か、または、
(ii) $\varphi(\{z \in \bar{D} : u(z) \neq 0\}) \subset D$ が成り立つ。

この定理の (a) $\Leftrightarrow$ (c) の部分は, すでに Kamowitz [1] によって 証明されている. この定理の $A(\bar{D})$ を, 一般の関数環や さらに広い空間に おきかえた場合は, [4,5] で 述べてある.

2. B が Hardy 環 $H^\infty(D)$ の場合

$H^\infty(D)$ を, D 上の有界正則関数全体の Banach 環 (一様ノルム) とする. これは, Hardy 環として よく知られている. $H^\infty(D)$ 上の荷重合成作用素 uC_φ は, $H^\infty(D)$ の元 u と, D から D への正則な関数 φ に対し, (1) 式で 定義される. 明らかに, この作用素 uC_φ は, $H^\infty(D)$ から $H^\infty(D)$ への有界線形作用素である. コンパクト性については, つぎの定理が成り立つ:

定理 2 $H^\infty(D)$ 上の荷重合成作用素 uC_φ について, つぎの (a) – (c) は 同値である:

- (a) uC_φ は コンパクトである.
- (b) uC_φ は 弱コンパクトである.
- (c) 任意の正数 ε に対し, $\overline{\varphi(\{z \in D : |u(z)| > \varepsilon\})} \subset D$ が 成り立つ.

ただし, $\bar{}$ は 複素平面での閉包を表す.

この定理の (a) $\Leftrightarrow$ (c) の部分で, u が 定数関数 1 の場合は, Swanton [3] の 合成作用素に関する結果につながる.

3. B が Bergman 空間 $L_a^2(D)$ の場合

Bergman 空間 $L_a^2(D)$ は,

$$\int_D |f(z)|^2 dx dy < \infty$$

をみたす D 上の正則関数 f の全体で、内積

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_D f(z) \overline{g(z)} dx dy$$

に関して Hilbert 空間になる. $L_a^2(D)$ 上の荷重合成作用素 uC_φ は, $H^\infty(D)$ の元 u と, D から D への正則な関数 φ に対して, (1) 式で定義される. このとき, 作用素 uC_φ が $L_a^2(D)$ から $L_a^2(D)$ への有界線形作用素になることが, 知られている. また, $L_a^2(D)$ は Hilbert 空間であるから, この uC_φ は, つねに弱コンパクト作用素である. そこで, コンパクト性についてだけ考えると, つぎのことがいえる:

定理 3 $u \in H^\infty(D)$ は, $\lim_{|z| \rightarrow 1-} (1 - |z|^2) u'(z) = 0$ をみたすものとする. このとき, $L_a^2(D)$ 上の荷重合成作用素 uC_φ がコンパクトになるための必要十分条件は, つぎの式が成り立つことである:

$$\lim_{|z| \rightarrow 1-} \frac{u(z)(1 - |z|^2)}{1 - |\varphi(z)|^2} = 0$$

定理 3 で, u が定数関数 1 の場合は, MacCluer and Shapiro [2] による合成作用素の結果である. また, この定理の証明も, 彼らの方法を踏襲してできる. ここで, ‘必要条件’ の部分の証明に, u に関する条件が不要であることを, 付記しておく.

4. スペクトルについて

[1] で, Kamowitz は, 円板環 $A(\bar{D})$ 上のコンパクト荷重合成作用素のスペクトルを, 決定している. ここでは, $A(\bar{D})$ を $H^\infty(D)$ や $L_a^2(D)$ におきかえて, 同様の考察を行ってみる.

荷重合成作用素 uC_φ のスペクトルは, φ の反復や不動点と密接に関係している. D から D への正則な関数 φ に対し, φ の n 回反復を, φ_n ($\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_n$) と表すと, つぎのことがいえる:

φ が楕円型の Möbius 変換でないとき, 閉円板 $\bar{D}$ に点 z_0 がただひとつ存在して, すべての $z \in D$ に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = z_0$ となる.

このことは, 古くに証明されていて, 点 z_0 を, φ の Denjoy-Wolff の不動点と呼んでいる.

さて, B を, 3 つの空間 $A(\bar{D})$, $H^\infty(D)$, $L_a^2(D)$ のどれかとしよう. u が零関数でなく, しかも, φ が Möbius 変換のとき, 定理 1 ~ 3 から, B 上の荷重合成作用素 uC_φ は, コンパクトにならない. こうして, B 上の零でないコンパクト荷重合成作用素 uC_φ に対し, φ の Denjoy-Wolff の不動点 $z_0 \in \bar{D}$ は, 必ず存在する. この z_0 がとくに D 内にあるとき, uC_φ のスペクトルが決定できる:

定理 4 (Kamowitz [1]) uC_φ を, B 上のコンパクトな荷重合成作用素とする. もし, φ の Denjoy-Wolff の不動点 z_0 が D 内にあれば, uC_φ のスペクトル $\sigma(uC_\varphi)$ は, つぎのようになる;

$$\sigma(uC_\varphi) = \{ u(z_0) \varphi'(z_0)^n ; n = 1, 2, \dots \} \cup \{ 0, u(z_0) \}$$

引用文献

- [1] H. Kamowitz, *Compact operators of the form uC_φ* , Pacific. J. Math. 80 (1979), 205-211.

- [2] B. D. MacCluer and J. H. Shapiro, *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces*, Can. J. Math. **38** (1986), 878–906.
- [3] D. W. Swanton, *Compact composition operators on $B(D)$* , Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), 152–156.
- [4] H. Takagi, *Compact weighted composition operators on function algebras*, Tokyo J. Math. **11** (1988), 119–129.
- [5] H. Takagi and J. Wada, *Weakly compact weighted composition operators on certain subspaces of $C(X, E)$* , Proc. Japan Acad. **67** (1991), 304–307.