

M/G/1 集団サービス型待ち行列に埋め込まれたマルコフ連鎖について.

阪大工学部 池田重吉 (Zyūkiti Ikeda)

西田俊夫 (Toshio Nishida)

1. はじめに

ここでは待ち行列システムによく現われる, 次のような推移行列と状態 $S = \{(0, j); 1 \leq j \leq m_0\} \cup \{(i, j); i \geq 1, 1 \leq j \leq m\}$ を持つ既約・非周期的なマルコフ連鎖を考える。

$$(1) \quad P = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots \\ B_1 & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\ & A_1 & A_0 & A_1 & \cdots \\ & & A_1 & A_0 & \cdots \\ & & & A_1 & \cdots \\ & \bigcirc & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

ただし A_i ($i \geq 1$), B_i ($i \geq 1$), B_1, B_0 はそれぞれ $(m \times m)$, $(m_0 \times m)$, $(m \times m_0)$, $(m_0 \times m_0)$ サイズの小行列とする。

P について次のことを仮定する。 (i) $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ は既約な

行列とする。 ii) A_1 は逆行列を持つとする。 ただし, ii) の条件は不必要で, ii)' A_1 の各列は少なくとも1つ正の要素をもつ, に置き換えることができる, この場合結論はやや複雑になる。

まず結論を示す。次の記号を用意する。

$$t_a = \sum_0^{\infty} (i+1) A_i t_e, \quad t_b = \sum_0^{\infty} (i+1) B_i t_e, \quad e = (1, 1, \dots, 1)$$

$$Q_n = \sum_M C_{i_1} \cdots C_{i_m}$$

$$(2) \quad R_n = \sum_M D_{i_1} \cdots D_{i_m}, \quad M = \{(m, i_1, \dots, i_m); i_1 + \dots + i_m = n, i_l \geq 0\}$$

$$\hat{Q}_n = \sum_{\ell=0}^n \left(\sum_{j=1}^{-\ell+1+m} B_j A_j^{-1} \right) Q_{\ell}$$

ただし, $C_n = (I - A_1 - A_0 - \dots - A_{n-1}) A_1^{-1}$, $D_n = A_1^{-1} (I - A_1 - \dots - A_{n-1})$ とする。

また, π を A の定常分布とする。

Theorem 1.

推移行列 P を持つマルコフ連鎖について,

正再帰的 $\Leftrightarrow \pi t_a < 1$ & t_b の全ての要素が有限

(3) 零 " $\Leftrightarrow \pi t_a = 1$ または, $\pi t_a < 1$ & t_b のある要素が無限

推移的 $\Leftrightarrow \pi t_a > 1$ 。

正再帰の場合, 定常分布 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ は次のように得られる。まず, $m \times m$ 行列 R を行列方程式

$$(4) \quad R = A_1 + A_0 R + A_1 R^2 + \dots$$

の非負の最小解とする。このとき

$$(5) \quad (x_0, x_1) = (x_0, x_1) \begin{bmatrix} B_0 & B(R) \\ B_{-1} & A(R) \end{bmatrix},$$

$$x_n = x_1 \sum_{\ell=0}^{n-1} Q_\ell - x_0 \hat{Q}_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$= \text{ここで, } B(R) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i R^{i-1}, \quad A(R) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i R^i \text{ とする,}$$

となり, $\sum x_n \cdot e = 1$ で正規化される。

次の節ではこの証明に関連した定理を示す。

2. いくつかの禁止確率

${}_H P_{ij}^{(n)}$ ($i, j \in S$) を状態 i から出発して, 集合 H に含まれる状態と通ることなく, n ステップ後にマルコフ連鎖が j に到達する確率とする。また次の記号を定義する。

$${}_H P_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H P_{ij}^{(n)},$$

$$\underline{I} = \{(i, j); 1 \leq j \leq m\}, \quad \underline{O} = \{(0, j); 1 \leq j \leq m_0\}.$$

次のことが知られる。有限個の要素からなる H について

$$\text{再帰的} \iff \forall i \in H, \sum_{j \in H} {}_H P_{ij}^* = 1,$$

$$\text{正再帰的} \iff \forall i \in H, \sum_{j \in S} {}_H P_{ij}^* < \infty.$$

よって, 再帰的であるための条件を求めるには, ${}_H P_{ij}^*$ ($j \in H$) つまり i から出発して, H を通ることなく, 11.7 かは j に到達する確率と求めればよい。

Theorem 2.

$$\underline{O} \perp P_{ai}, {}_{ij} = (Fa)_{ij} \text{ とすれば,}$$

$$(7) \quad F_a = R^{a-1} \quad (a \geq 2), \quad F_1 = A(R), \quad F_0 = B(R)$$

となる。

(略証) $\mathbb{Q} \perp P_{ai,ij}^* = (G_a)_{ij}$ とすれば, 前回の発表 ([2]) と同じ考え方で

$$G_a = \sum_{n=0}^{k-a-1} R_n \left(\sum_{n=0}^{k-2} R_n \right)^{-1} \quad (a \geq 2)$$

となる。さらに $G_a \rightarrow R^{a-1} \quad (k \rightarrow \infty)$ となる。□

この証明において A_1^{-1} の存在は必要でないことが判る。

[3] と援用すれば ("対称的"な方法を使う)

$$\text{再帰的} \Leftrightarrow R^*e = e \Leftrightarrow \pi^*e \leq 1$$

となる。

Corollary. $|R| \neq 0 \Leftrightarrow |A_1| \neq 0$ 。条件 iii)' の下で R は既約。

次に、定常分布 π を求めるために $(u_b)_j = \mathbb{E} P_{1j, b_j}^*$, $(b, j) \in S$ を求める, つまり状態 (1,1) から出発して (1,1) に戻るまでに (b, j) を訪問する平均回数である。

Theorem 3.

$$\mathbb{Q} \perp P_{1i, b_j}^* = (U_b)_{ij}, \quad \mathbb{Q} \perp P_{0i, b_j}^* = (V_b)_{ij} \quad \text{とすれば}$$

$$(8) \quad U_0 = B_1, \quad U_1 = F_1, \quad U_n = \sum_{l=0}^{n-1} Q_l + (U_1 - I) A_1^{-1} \sum_{l=0}^{n-2} Q_l \quad (n \geq 2),$$

$$V_0 = B_0, \quad V_1 = F_0, \quad V_n = -\hat{Q}_{n-2} + V_1 A_1^{-1} \sum_{l=0}^{n-2} Q_l \quad (n \geq 2),$$

となる。

$$(\text{略証}) \quad (U_b)_{ij} = \sum_{c \neq \mathbb{Q} \perp} (U_c)_{ic} \cdot p_{cr, b_j} + P_{1i, b_j}$$

$1 \leq i \leq m, (b, j) \in S$, より結論を得る。 u_0 も同様。 $\square$

Theorem 4.

マルコフ連鎖が再帰的のとき, $\{u_b\}$ は次のように得られる。 まず (u_0, u_1) は

$$(9) \quad (u_0, u_1) = (u_0, u_1) \begin{bmatrix} B_0 & B(R) \\ B_{-1} & A(R) \end{bmatrix},$$

なる不変尺度, $\in E$ $(u_1)_1 = 1$, とする。 さらに

$$(10) \quad u_a = u_1 \sum_0^{a-1} Q_a - u_0 \hat{Q}_{a-2} \quad (a \geq 2)$$

となる。

(略証) 再帰的だから $(u_1)_1 = 1$, $\therefore$ 次の関係が知られる (cf. Chung [1])

$$u_b = u_0 V_b + u_1 U_b \quad (b \geq 0).$$

これから結論を得る。(9) 式の行列は推移行列である。 $\square$

最後に, 正再帰的であるための条件を示めせば, Th. 1 の証明は完成する。その前に A_1^{-1} の存在と仮定しない場合に Th. 1, Th. 4 はどうなるか示す。

$k \geq 1$ $P_{0i, bj}^*$, $k \geq 1$ $P_{1i, bj}^*$ を求め, $k \rightarrow \infty$ とすることによつて

で

$$(11) \quad V_n = \hat{S}_{n-1}, \quad U_n = S_{n-1} \quad (n \geq 2),$$

$\in E$ $\therefore$, $S_n = \sum_M E_{i_1} \cdots E_{i_m}$, $M = \{(m, i_1, \dots, i_m); i_1 + \dots + i_m = n, i_\ell > 0\}$,

$$E_n = W_n (I - W_0)^{-1}, \quad W_i = \sum_{\ell=i}^{\infty} A_\ell R^{\ell-i}$$

$$\hat{S}_n = \sum_{l=1}^n \hat{E}_l S_{n-l}, \quad \hat{E}_n = \sum_{l=n+1}^{\infty} B_l R^{l-n-1} (I - W_0)^{-1},$$

とたす。つまり $x_n = x_0 \hat{S}_{n-1} + x_1 S_{n-1}$ ($n \geq 2$) である。

π のとき正規化の条件 $\sum x_i t_e = 1$ は次のようにたす。

$$(12) \quad x_0 t_e + x_0 \sum_{l=1}^{\infty} \hat{E}_l (I - \sum_{l=1}^{\infty} E_l)^{-1} t_e + x_1 (I - \sum_{l=1}^{\infty} E_l)^{-1} t_e = 1.$$

Theorem 5.

正再帰的 $\Leftrightarrow \sum S_n t_e < \infty$ & $\sum \hat{S}_n t_e < \infty \Leftrightarrow \pi t_a < 1$ &

t_b の全ての成分が有限

(略証)

$$\sum S_n = \sum_n \left(\sum_i W_i (I - W_0)^{-1} \right)^n \text{ である。 かつ}$$

$$\pi (I - \sum_i W_i) = \pi [I - \sum_i W_i] R$$

であることと (6) を利用する。 $\sum \hat{S}_n$ についても同様 $\square$

Example "Quasi-Birth-and-Death process"

$A_i = B_i = 0$ ($i \geq 2$) のとき Th. 1 は "Q. B. D. process" に一致するはずである。これは次の事実による。

$$A_1 R^2 + A_0 R + A_1 = R \quad \text{と} \quad Q^2 A_1 + Q A_0 + A_1 = Q \text{ の非負の}$$

最小解の間には $Q A_1 = A_1 R$ の関係がある。

よから, $\hat{S}_n = 0$, $S_n = E_1^n = Q^n$ とたす。

References

[1] Chung, K. L. (1967) Markov chains, 2nd., Springer.

[2] 池田, 西田 "ホーキングのいる M/G/1 待ち行列"

(前回の講究録).

- [3] Neuts, M.F. (1978) "Markov chains with applications in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant probability vector"
Adv. Appl. Prob. 10, 185-212
- [4] Neuts, M.F. (1979) "Queues Solvable without Rouché's Theorem"
Ops. Res. 27, 767-781.