

L-ホモロジー類の交叉公式

福島大教育 松井明德

(Akinori MATSUI)

1. 序 Goresky と MacPherson [3] はコンパクトな向き付けられた PL-擬多様体で余次元が偶数の *strata* のみを許すものに対し、交叉ホモロジー理論を利用して符号数を定義した。さらに L-ホモロジー類を定義した。我々の目的は L-ホモロジー類の特徴付けを与えることと、交叉公式を示すことである。

X, Y は以下ことわりなしに使用する場合コンパクトな向き付けられた PL-擬多様体で余次元が偶数の *strata* のみを許すものとする。(定義は [3] を参照せよ。) M は PL 多様体で向き付けられたものとする。

X, Y が M に PL 的に埋め込まれていて、横断的 (定義は [1] を見よ。) ならば $X \cap Y$ は自然に向き付けられた PL-擬多様体で余次元が偶数の *strata* のみを許すものとなる。以下向きをこめて考えたものを $X \cdot Y$ で表わす。向き付けられた余次元が偶数の *strata* のみを許す PL-擬多様体のボル

ディズムを Ω_*^{ev} で表わすことにする。(cf. [3])

ここで L-ホモロジー類の定義を [3] に従って復習する。 X を n -次元で境界をもたないものとする。 $[X, S^k]$ を X から k -球面 S^k への連続写像のホモトピー類の集合とする。 $\theta: [X, S^k] \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\theta(f) = \alpha(f^{-1}(p))$ で定義する。但し f は PL-写像で p に横断的とする。 $u \in H_k(S^k; \mathbb{Z})$ を生成元とすると k -次 L-ホモロジー類 $L_k(X) \in H_k(X; \mathbb{Q})$ は次のようになる。 $2k > n+1$ とすると任意の $f \in [X, S^k]$ に対し $\langle L_k(X), f^*u \rangle = \theta(f)$ を満たすホモロジーの元 $L_k(X)$ として定義される。又制限 $2k > n+1$ は X と球面の積をとることによりのせかれる。 X が境界をもつ場合はダブル $X \cup_{\partial X} X$ の L-ホモロジー類 $L_k(X \cup_{\partial X} X)$ を X に引きもどすことにより X の L-ホモロジー類 $L_k(X) \in H_k(X, \partial X; \mathbb{Q})$ が定義される。 $L_*(X) = L_0(X) + L_1(X) + \dots + L_n(X) \in H_*(X, \partial X; \mathbb{Q})$ とおく。

交叉公式をのべるためにホモロジー類 $a, b \in H_*(M, \partial M; \mathbb{Q})$ に対しての積 $a \cdot b$ を次で定義する。

$$a \cdot b = [M]_{\cap} (([M]_{\cap})^{-1} a \cup ([M]_{\cap})^{-1} b).$$

定理 (交叉公式) X と Y が PL-的に M に埋め込まれていてかつ横断的であるとする。 $f: X \rightarrow M, g: Y \rightarrow M, h: X \times Y \rightarrow M$ を包含写像とする。 $\ell(M)$ は M の L-コホモ

ロジークラスとすると次が成り立つ。

$$f_* L_*(X) \cdot g_* L_*(Y) = h_* L_*(X \cdot Y) \cap l(M).$$

2. L-ホモロジークラスの特徴付け.

M をコンパクトな向き付けられた $(m+k)$ -次元 PL-多様体とし、 $\tilde{M}, \bar{M}$ を ∂M の余次元 0 の部分多様体で $\partial M = \tilde{M} \cup \bar{M}$, $\tilde{M} \cap \bar{M} = \partial \tilde{M} = \partial \bar{M}$ なものとする。 X の次元は n として

$f: (X, \partial X) \rightarrow (M, \tilde{M})$ を包含写像とする。ここで 2 つの準同型写像を定義する:

$$\alpha_f: \Omega_*(M, \bar{M}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$\bar{\alpha}_f: \Omega_*^{ev}(M, \bar{M}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}.$$

もし $\bar{\alpha}_f$ が定義されたら $\alpha_f = \beta \circ \bar{\alpha}_f$ で α_f は定義する。ここで

$\beta: \Omega_*(M, \bar{M}) \rightarrow \Omega_*^{ev}(M, \bar{M})$ は自然な準同型写像とする。

$(\varphi, V) \in \Omega_*^{ev}(M, \bar{M})$ を与えられたとき、十分大きな $i > 0$ に対して

PL 的埋め込み $\psi: (V, \partial V) \rightarrow (M \times D^i, \bar{M} \times D^i)$ で

$$(1) \quad \psi \simeq \varphi \times \{0\}$$

$$(2) \quad M \times D^i \text{ の中で } \psi(V) \perp X \times D^i$$

なものかとれる。そこで $\bar{\alpha}_f$ を $\bar{\alpha}_f(\varphi, V) = \alpha(\psi(V) \cdot (X \times D^i))$

で定義する。この準同型写像を使って L-ホモロジークラスの別な定義を与える。そのために次の補題が必要である。

補題 2.1 任意の $(\varphi, V) \in \Omega_*(M, \overline{M})$ に対し

$\langle \varphi_*([V] \cap \ell(V)), \overline{\Phi}(f) \rangle = \alpha_f(\varphi, V)$ をみたすコホモロジー類 $\overline{\Phi}(f) \in H^*(M, \overline{M}; \mathbb{Q})$ が存在し一意である。さらに $\overline{\Phi}(f) = \overline{\Phi}^0 + \overline{\Phi}^1 + \dots + \overline{\Phi}^{n+k}$ ($\overline{\Phi}^i \in H^i(M, \overline{M}; \mathbb{Q})$) とすると $\overline{\Phi}^{k+i} = 0$ ($i \neq 0 \pmod{4}$ or $i < 0$) となる。

略証 $\overline{\Phi}^0, \overline{\Phi}^0 + \overline{\Phi}^1, \dots, \overline{\Phi}^0 + \overline{\Phi}^1 + \dots + \overline{\Phi}^{n+k}$ の順に帰納的に構成することが出来る。自然な写像 $\Omega_+^{ev}(M, \overline{M}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*(M, \overline{M}; \mathbb{Q})$ が全射であることから一意性がわかる。 $\overline{\Phi}^{k+i} = 0$ ($i \neq 0 \pmod{4}$ or $i < 0$) は関係式からわかる。

定義 2.2 補題 2.1 において M を X の $\mathcal{D}^N$ での $\mathcal{P}$ の正則近傍で $2\mathcal{D}^N \cap M = \widetilde{M}$ とする。そのとき $L(X)$ を $L(X) = f_*^{-1}([M] \cap \overline{\Phi}(f))$ で定義する。

次の定理が成り立つ。

定理 2.3 $f: (X, 2X) \rightarrow (M, \widetilde{M})$ を包含写像とする。任意の $(\varphi, V) \in \Omega_*(M, \overline{M})$ に対し $\langle \varphi_*([V] \cap \ell(V)), ([M] \cap)^{-1}(f_* L(X) \cap \ell(M)) \rangle = \alpha_f(\varphi, V)$ が成り立つ。さらに $f_* L(X)$ はこの関係式で特徴付けられる。

系 2.4 $L_*(X) = L(X)$.

証明 $f \in [X, S^k]$ が与えられたとする。そのとき PL 的埋め込み $\tilde{f}: X \rightarrow S^k \times D^N$ で $\tilde{f} \simeq f \times f_0$ なるものが十分大きな $N > 0$ に対して存在する。 $M = S^k \times D^N$, $\bar{M} = \emptyset$, $\bar{M} = S^k \times \partial D^N$, $V = D^N$ とし $\varphi: D^N \rightarrow S^k \times D^N$ を $\varphi(x) = (*, x)$ で定義し 定理 2.3 を使うと $\langle \varphi_*[D^N], ([S^k \times D^N] \cap)^{-1} \tilde{f}_* L(X) \rangle = \alpha_{\tilde{f}}(\varphi, D^N)$ 。又定義より、 $\theta(f) = \alpha_{\tilde{f}}(\varphi, D^N)$ 。故に $\langle f_* L(X), u \rangle = \theta(f)$ 。従って $L(X) = L_*(X)$ 。

定理 2.3 が証明された後は $L(X)$ が L-ホモロジー類であるのだから、定理 2.3 は L-ホモロジー類 $L_*(X)$ に対して成り立つ。定理 2.3 の証明は次の章で与える。以下では $L(X)$ の別な特徴付けを与える。

$f: X \rightarrow Y$ を向きを保つ余次元 0 の PL 的埋め込みとする。このとき

- (1) $f(X)$ が Y の閉集合である。
- (2) $f(\partial X) \cap \partial Y = \emptyset$
- (3) $f|_{\partial X}$ が開写像である。

の条件をみたすとき f を正則と呼ぶことにする。

正則な PL 的埋め込み $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき
 準同型写像 $f^\#: H_*(Y, \partial Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(X, \partial X; \mathbb{Q})$ が
 $f^\# = (f_*)^{-1} \circ i_*$ で定義される。但し $i: (Y, \partial Y) \rightarrow (Y, Y - f(\partial X))$
 は包含写像とし f は $f: (X, \partial X) \rightarrow (Y, Y - f(\partial X))$ とみなす。
 $\mathcal{E}$ をコンパクトな向き付けられた PL-擬多様体で余次元偶数
 の strata のみを許すものの category で morphisms は正則な埋
 め込みとする。

任意の $X \in \mathcal{E}$ ($\dim X = n$) のホモロジー類

$$L_A(X) = L_0(X) + L_1(X) + \cdots + L_n(X) \in H_*(X, \partial X; \mathbb{Q})$$

で次の様な公理をみたすものを考える。

A 1. $L_i(X) \in H_i(X, \partial X; \mathbb{Q})$ で

$$L_{n-i}(X) = 0 \quad (i \not\equiv 0 \pmod{2}).$$

A 2. $L_n(X) = [X]$

A 3. $f: X \rightarrow Y$ が $\mathcal{E}$ の morphism なら

$$L_A(X) = f^\# L_A(Y).$$

A 4. $L_A(X \times Y) = L_A(X) \times L_A(Y).$

A 5. $\partial X = \emptyset$ なら $\langle L_A(X), 1^\circ \rangle = \alpha(X).$

公理 A 1, 2, 3, 4, 5 をみたすホモロジー類をここでは
 公理的 L-ホモロジー類と呼ぶことにする。実際には一意で
 L-ホモロジー類に一致する。

命題 2.5 $L(X)$ は A1, 2, 3, 4, 5 をみたす。

補題 2.1 の $\Phi(f)$ の構成から大部分わかるので証明は省く。

系 2.6 $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (M, \bar{M})$ を包含写像とする。

任意の $(\varphi, V) \in \Omega_{\star}^{\text{ev}}(M, \bar{M})$ に対して

$$\langle \varphi_{\star} L(V), ([M]_{\wedge})^{-1} (f_{\star} L(X) \wedge \bar{L}(M)) \rangle = \overline{\alpha}_f(\varphi, V) \text{ をみたす。}$$

証明 補題 2.1 の関係式の $[V]_{\wedge} \ell(V)$ を $L(V)$ に α_f を $\overline{\alpha}_f$ におきかえたものに対し同様なコホモロジー類 $\Phi(f) \in H^*(M, \bar{M}; \mathbb{Q})$ が存在し一意である。 $(\varphi, V) \in \Omega_{\star}(M, \bar{M})$ に対し $L(V) = [V]_{\wedge} \ell(V)$ であるから定理 2.3 より $\Phi(f) = ([M]_{\wedge})^{-1} (f_{\star} L(X) \wedge \bar{L}(M))$ である。

この系は交叉公式を証明する計算の途中で必要であり、定理 2.3 が証明されたとすれば $L_{\star}(V)$, $L_{\star}(X)$ で足りた。

3. 定理 2.3 の証明

コンパクト多面体上の向き付けられたブロックバンドルの ℓ -コホモロジー類と L -コホモロジー類との関連を調べる必要がある。そのために次の 2 つの準同型写像を定義する。

$$\alpha_z : \Omega_*(E, \bar{E}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$\bar{\alpha}_z : \Omega_*^{ev}(E, \bar{E}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

ここで $z = (E, z, B)$ はコンパクト多面体 B 上の向き付けられたプロックバンドルとし $\bar{E}$ は z に付随した球面バンドルの全空間とする。

B を $\mathbb{R}^N$ に埋め込んだときの正則近傍を A とし $p: A \rightarrow B$ を deformation retraction とする $p^*z = (E(p^*z), z', A)$ を誘導バンドルとする。 $(\bar{p}, p): (E(p^*z), A) \rightarrow (E, B)$ と $(\bar{z}, z): (E, B) \rightarrow (E(p^*z), A)$ をバンドル写像とし z と $\bar{z}$ を包含写像とする。 α_z と $\bar{\alpha}_z$ を $\alpha_z(\varphi, V) = \alpha_{z'}(\bar{z} \circ \varphi, V)$, $\bar{\alpha}_z(\varphi, V) = \bar{\alpha}_{z'}(\bar{z} \circ \varphi, V)$ で定義する。

命題 3.1 任意の $(\varphi, V) \in \Omega_*^{ev}(E, \bar{E})$ に対して $\langle \varphi_* L(V), U_z \cup z'^{-1} \bar{z}(\xi) \rangle = \bar{\alpha}_z(\varphi, V)$ がなりたつ
さらに $\bar{z}(\xi)$ は上の関係式で特徴付けられる。

この命題を証明するのに次の補題を使う。

補題 3.2 任意の $(\varphi, V) \in \Omega_*(E, \bar{E})$ に対して $\langle \varphi_* L(V), U_z \cup z'^{-1} \bar{z}(\xi) \rangle = \alpha_z(\varphi, V)$ がなりたつ
さらに $\bar{z}(\xi)$ は上の関係式で特徴付けられる。

証明 $(\varphi, V) \in \Omega_*(E, \bar{E})$ に対し $L(V) = [V] \cap l(V)$.

又 PL 的埋め込み $\gamma: V \rightarrow E(p^*\xi)$ で $\gamma \simeq \bar{c} \circ \varphi$ か $\gamma(V) \perp A$ なるものがとれる。 $\downarrow: \gamma(V) \cap A \rightarrow V$ を $\downarrow(x) = \gamma^{-1}(x)$ で定義する。 以上より

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_* L(V), U_\xi \cup z^{*-1} \bar{l}(\xi) \rangle \\ &= \langle \gamma_* ([V] \cap l(V)), \bar{p}^* U_\xi \cup \bar{p}^* z^{*-1} \bar{l}(\xi) \rangle \\ &= \langle [V] \cap \gamma^* U_{p^*\xi}, l(V) \cup \gamma^* z^{*-1} \bar{l}(p^*\xi) \rangle \\ &= \langle \downarrow_* [\gamma(V) \cap A], l(V) \cup \gamma^* z^{*-1} \bar{l}(p^*\xi) \rangle \\ &= \langle [\gamma(V) \cap A], l(\gamma(V) \cap A) \rangle \\ &= \alpha_{z'}(\bar{c} \circ \varphi) \\ &= \alpha_\xi(\varphi, V). \end{aligned}$$

又一意性は補題 2.1 と同様である。

命題 3.1 の証明

任意の $(\varphi, V) \in \Omega_*^{ev}(E, \bar{E})$ に対し

$\langle \varphi_* L(V), \bar{\pi}' \rangle = \alpha_\xi(\varphi, V)$ をみたす $\bar{\pi}'$ は存在して一意である。 その $\bar{\pi}'$ は補題 3.2 より $\bar{\pi}' = U_\xi \cup z^{*-1} \bar{l}(\xi)$ 。

定理 2.3 の証明

$(\varphi, V) \in \Omega_*(M, \bar{M})$ が与えられたとき 特に

$\varphi: V \rightarrow M$ が PL 的埋め込みで $\varphi(V) \perp X$ とした場合

に関係式のみなりたつことを示せば一般の場合はそれのみ簡単になる。そこでその様な場合に証明する。

φ の 法アノックバンドルを $\mathcal{L} = (E, \varphi_E, V)$ とし X は $\mathcal{L}$ に横断的であるとする。

$$P = \langle \varphi_* ([V] \cap \mathcal{L}(V)), ([M] \cap)^{-1} (f_* L(X) \cap \mathcal{L}(M)) \rangle \text{ とおく。}$$

又 $f_E : X \cap E \rightarrow E$ を包含写像とすると計算により

$$P = (-1)^{\text{codim } V \cdot \text{codim } X} \langle f_{E*} L(X \cap E), \cup_V \cup \varphi_E^{*-1} \mathcal{L}(V) \rangle.$$

命題 3.1 より $P = (-1)^{\text{codim } V \cdot \text{codim } X} \overline{\alpha}_V(f_E, X \cap E).$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_V \text{ と } \alpha_f \text{ の定義より } P &= (-1)^{\text{codim } V \cdot \text{codim } X} \alpha((X \cap E) \cdot V) \\ &= \alpha(V \cdot X) \\ &= \alpha_f(\varphi, V). \end{aligned}$$

一意性は 補題 2.1 による。

補題 3.2 を使わずに $\mathcal{L}(X)$ の公理的性質を用いたことだけを使って 命題 3.1 を証明することが出来る。その方法だと 命題 3.1 は $L(V)$ の代わりに $L_A(V)$ に対してなりたつ。その結果 定理 2.3 も $L(X)$ のかわりに $L_A(X)$ でなりたつ。定理 2.3 の一意性ある公理的 L -モジュール類 $L_A(X)$ が $L(X)$ と一致することがわかる。系 2.4 も考えに入れると $L_A(X) = L(X) = L_*(X)$ かわかる。

4. 交叉公式の証明

定理を証明する計算の途中で 次の L-ホモロジー類に対する ハルペリン型の公式が必要である。(ハルペリン型の公式は本来 ステッフェル-ホイットニー ホモロジー類に対するもので [2][5][6] を参考にせよ。) 証明は [6] の場合と同様であるので省略する。実際の証明は定理 2.3 を使う。

命題 4.1 $\zeta = (E, \mathcal{Z}, X)$ を向き付けられた
ブロックバンドルとすると次がなりたつ。

$$\mathcal{Z}_* L_*(X) = (L_*(E) \cap \mathcal{V}_\zeta) \cap \mathcal{Z}^{*-1} \bar{\mathcal{L}}(\zeta).$$

交叉公式の証明 $h(2(X \cdot Y))$ の $2M$ での近傍を $\mathcal{M}$ とし $\bar{M} = \mathcal{Q}(2M - \mathcal{M})$ とする。定理 2.3 を利用して証明を与える。任意の $(\varphi, V) \in \Omega_*(M, \bar{M})$ が与えられたとする。

$P(f, g) = \langle \varphi_*([V] \cap \mathcal{L}(V)), ([M] \cap \{ (f_* L_*(X) \cdot g_* L_*(Y) \cap \mathcal{L}(M)) \cap \bar{\mathcal{L}}(M) \}) \rangle$ とおく。 $\varphi: (V, 2V) \rightarrow (M, \bar{M})$ は PL 的埋め込みとし $\varphi(V) \perp X, \varphi(V) \perp Y$ とし $P(f, g) = \alpha_h(\varphi, V)$ と示す。 $\mathcal{M} = (E, \varphi_E, V)$ を φ の法ブロックバンドルとする。 $f_E: X \cap E \rightarrow E, g_E: Y \cap E \rightarrow E$ を包含写像とする。

$$P(f, g) = (-1)^{\text{codim } \varphi \cdot \text{codim } h} \langle f_{E*} L_*(X \cap E), \{([E]_h)^{-1} g_{E*} (L_*(Y \cap E) \cap g_E^* U_\nu) \cap g_E^* \varphi_E^{*-1} \bar{I}(\nu)\} \cup \bar{I}(E) \rangle \text{ とする。}$$

$\varphi_Y : Y \cap \varphi(V) \rightarrow Y \cap E$ を包含写像とすると

$\nu' = (Y \cap E, \varphi_Y, Y \cap \varphi(V))$ は T^*D のバンドルとまり

$$U_{\nu'} = g_E^* U_\nu, \quad \varphi_Y^{*-1} \bar{I}(\nu') = g_E^* \varphi_E^{*-1} \bar{I}(\nu). \quad \text{又命題 4.1}$$

$$\text{より } (L_*(Y \cap E) \cap U_{\nu'}) \cap \varphi_{Y*}^{-1} \bar{I}(\nu') = \varphi_{Y*} L_*(Y \cap \varphi(V)).$$

$$\text{従って } P(f, g) = (-1)^{\text{codim } \varphi \cdot \text{codim } h} \langle f_{E*} L_*(X \cap E),$$

$$([E]_h)^{-1} (g_{E*} \varphi_{Y*} L_*(Y \cap \varphi(V)) \cap \bar{I}(E) \rangle.$$

$$g_V = g_E \circ \varphi_Y \text{ とおくと 系 2.6 より、}$$

$$\begin{aligned} P(f, g) &= (-1)^{\text{codim } \varphi \cdot \text{codim } h} \alpha_{g_V}(f_E, X \cap E) \\ &= (-1)^{\text{codim } \varphi \cdot \text{codim } h} \cap ((X \cap E) \cdot (Y \cap \varphi(V))) \\ &= (-1)^{\text{codim } \varphi \cdot \text{codim } h} \cap (X \cdot (Y \cap \varphi(V))) \\ &= \cap (\varphi(V) \cdot (X \cdot Y)) \\ &= \cap_h(\varphi, V). \end{aligned}$$

さらに一般の場合も D^N の積をとることにより $P(f, g) =$

$\cap_h(\varphi, V)$ が示せる。

故に定理 2.3 より

$$f_* L_*(X) \cdot g_* L_*(Y) \cap \bar{I}(M) = h_* L_*(X \cdot Y)$$

が成り立つ。

参考文献

- [1] S. Buoncristiano, C. R.ourke and B. J. Sanderson,
A geometric approach to homology theory, London Math.
soc. Lecture Notes 18, 1976.
- [2] W. Fulton and R. MacPherson, Categorical framework
for the study of singular spaces, Mem. Amer. Math.
soc. 283 1981.
- [3] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology
theory, Topology 19, 135-162 (1980).
- [4] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology II,
Invent. Math. 72, 77-129 (1983).
- [5] A. Matsui and H. Sato, Stiefel-Whitney homology classes
and homotopy type of Euler spaces, J. Math. Soc. Japan
37, 437-453 (1985).
- [6] A. Matsui and H. Sato, Stiefel-Whitney homology classes
and Riemann-Roch formula, Advanced Studies in Pure
Math. 9, 129-134 (1986).
- [7] A. Matsui, Intersection formula for Stiefel-Whitney
homology classes, preprint.