

2 空間変数の強双曲系混合問題

東京理大 理工 谷口 勝

§1. 序

一階双曲系方程式の混合問題において、これまでほとんど、strictly hyperbolic system または symmetric hyperbolic system だけが扱われてきた。そこで、我々は strongly hyperbolic system に対する混合問題：

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + f(t, x, y) = L[u] + f \\ u(0, x, y) = 0 \\ S u(t, 0, y) = g(t, y), \quad (t, x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

を考える。ここで $u^T = (u_1, \dots, u_N)$, A 及 B は $N \times N$ constant complex matrix, A は non-singular, S は $l \times N$ constant matrix でその rank は l とする。このとき, Kreiss[2]と同じ形のエネルギー不等式が(1)に対して成立することを報告するのが本稿の目的である。

§2. 仮定と結果

我々は(1)に対して次の条件 I. — IV. を仮定する：

1.

I. $\text{op.}(\frac{\partial}{\partial t} - L)$ は strongly hyperbolic である.

II. A は次の形をもつ,

$$A = \begin{pmatrix} A_I & 0 \\ 0 & A_{II} \end{pmatrix},$$

$$A_I = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} < 0, \quad A_{II} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{pmatrix} > 0.$$

これは一般性を失っていない.

III. $\forall (\tau, \eta) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ に対して, $\exists$ に関する方程式 $\det(\tau I - (A\tau + B\eta)) = 0$ の実根は高々 double である.

IV. Boundary matrix S は uniform Lopatinski's condition を満たす.

方程式 (1) を Fourier-Laplace 変換すると,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dx} = A'(\tau I - \eta B)\hat{u} - A'\hat{f} & , x \geq 0 \\ S \cdot \hat{u} = \hat{g} & , x = 0 \end{cases}$$

となる. ここで $\hat{u}(\tau, x, \eta)$ は $u(\tau, x, \eta)$ を Fourier-Laplace 変換したものである.

我々は次の結果を得る.

Main Theorem 条件 I. - IV. を仮定する. そのとき,

(2) の解 $\hat{u}(\tau, x, \eta)$ に対して, エネルギー不等式

$$\begin{aligned}
 & \mu \|\hat{u}(\tau, \cdot, \eta)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^1)}^2 + |\hat{u}(\tau, 0, \eta)|^2 \\
 (3) \quad & \leq \text{const.} \left\{ \frac{1}{\mu} \|\hat{f}(\tau, \cdot, \eta)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^1)}^2 + |\hat{g}(\tau, \eta)|^2 \right\} \\
 & \quad (\forall \operatorname{Re} \tau = \mu \geq \mu_0)
 \end{aligned}$$

が成立する正数 μ_0 が存在する。

§3. 2 空間変数の strong hyperbolicity について

2 空間変数の strong hyperbolicity の一つの特徴づけを述べる。

Theorem. 次の 2 つは同値である。

(i) op. $(\frac{\partial}{\partial t} - A \frac{\partial}{\partial x} - B \frac{\partial}{\partial y})$ は strongly hyperbolic である。

(ii) - (a) $\forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ に対して, $C(\xi, \eta) = A\xi + B\eta$ は実の固有値だけをもち, かつ対角化可能である。

(b) $\forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ に対して, $C(w_1, w_2) = Aw_1 + Bw_2$ の固有値 λ に対応した projection op. は, (ξ, η) の $\mathbb{C}^2$ におけるある近傍で正則である。

§4. Main Theorem の証明の概略

まず, Kreiss [2] と同じ形の Lemma をのこすか述べる。

$$M(\tau, \eta) = A^{-1}(\tau I - i\eta B)$$

とする。

Lemma. 1 (Hersh [1]) $\forall \operatorname{Re} \tau > 0$ に対して, $M(\tau, \eta)$ は $\operatorname{Re} \lambda < 0$ なる k 個の固有値及び $\operatorname{Re} \lambda > 0$ なる $(N-k)$ 個の

固有値をもつ.

Lemma 2 $\forall \operatorname{Re} \tau > 0$ に対して, analytic matrix $U(\tau, \eta)$ が存在して

$$(4) \quad U^{-1} M U = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$$

と成る.

Lemma 3 $\forall \operatorname{Re} \tau \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^1$ に対して, 次の評価が成立する.

$$(5) \quad \| (M(\tau, \eta) - i\xi I)^{-1} \| \leq \frac{\text{const}}{|\operatorname{Re} \tau|}.$$

$\tau = \mu + i\nu$, $\zeta = (i\nu, \eta)$ とおき, $M(\tau, \eta) = M(\zeta, \mu)$ とかくことにする.

Lemma 4 任意の固定した $\zeta_0 = (i\nu_0, \eta_0) \neq 0$, $\mu = 0$ に対して, matrix T_0 が存在して,

$$(6) \quad T_0^{-1} M T_0 = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_g \end{pmatrix}$$

と成る. ここで M_j は次の性質をもつ;

(i) M_1 の固有値は $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ である.

(ii) M_j ($j \geq 2$) の固有値は $\operatorname{Re} \lambda = 0$ である M_j

($j \geq 2$) は次の3つの形の1つをもつ,

$$(7) \quad \begin{cases} ① M_j(\zeta_0, 0) = (\lambda_j(\zeta_0, 0)) \\ ② M_j(\zeta_0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_j(\zeta_0, 0) & i \\ 0 & \lambda_j(\zeta_0, 0) \end{pmatrix} \\ ③ M_j(\zeta_0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_j(\zeta_0, 0) & 0 \\ 0 & \lambda_j(\zeta_0, 0) \end{pmatrix} \end{cases}$$

但し $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Lemma 4 において, Kreiss [2] に与えられた形 ③ が現れた. これを Main Theorem の証明の基本となる次の Lemma で取り扱う.

Lemma 5 任意の固定した $\zeta_0 = (i\nu_0, \eta_0) \neq 0$, $\mu=0$ に対して, $(\zeta_0, 0)$ の近傍で次のような analytic matrix $T(\zeta, \mu)$ が存在する;

$$(8) \quad T^{-1} M T = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_g \end{pmatrix}.$$

さらに $M_j(\zeta_0, 0)$ が

$$M_j(\zeta_0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_j(\zeta_0, 0) & 0 \\ 0 & \lambda_j(\zeta_0, 0) \end{pmatrix}$$

なる形をとれば, $M_j(\zeta, \mu)$ は

$$M_j(\zeta, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda_{j1}(\zeta, \mu) & 0 \\ 0 & \lambda_{j2}(\zeta, \mu) \end{pmatrix}$$

なる形をとる.

以上の事を用いると, symmetrizer を construct できて,
Main Theorem を証明出来る.

文 献

- [1] R. Hersh , Mixed problems in several variables ,
J. Math. Mech. , 12(1963) , 317-334.
- [2] H.O. Kreiss , Initial boundary value problems for
hyperbolic systems , C.P.A.M. , 23(1970) , 277-298.
- [3] J.V. Ralston , Note on a paper of Kreiss , C.P.A.M. ,
24(1971) , 759-762.