

Error analysis of Lagrange interpolation on tetrahedrons

小林 健太 (一橋大学大学院商学研究科)

Kenta Kobayashi (Hitotsubashi University)

土屋 卓也 (愛媛大学大学院理工学研究科)

Takuya Tsuchiya (Ehime University)

1 概要

三次元有限要素法の誤差解析において、四面体上の補間誤差評価は本質的な役割を果たしている。従来の補間誤差評価は、正則性条件や（一般化された）最大角条件など、四面体に幾何学的な制約を課した上で得られるものばかりであった。それに対して我々は、四面体の形状に制約のない、新しいタイプの Lagrange 補間誤差評価を得た。この補間誤差評価は、四面体の射影外接半径という幾何学的な量に基づいており、補間誤差が悪化しないような四面体の潰れ方にも対応した誤差評価になっている。なお、主結果である誤差評価の証明等の詳細については [6] を参照されたい。

2 Lagrange 補間

K を四面体とし、閉集合として考える。 K の重心座標（体積座標）を

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$$

とし、整数 $k \geq 1$ に対して点集合 $\Sigma^k(K)$ を

$$\Sigma^k(K) = \left\{ \left(\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}, \frac{a_3}{k}, \frac{a_4}{k} \right) \mid 0 \leq a_i \leq k, \sum_{i=1}^4 a_i = k \right\}$$

と定義する ($k = 3$ の場合を図 1 に示す)。このとき、与えられた連続関数 v に対して $\Sigma^k(K)$ のすべての点で v と一致する高々 k 次の多項式 $\Pi_K^k v$ がただ一つ存在する。この $\Pi_K^k v$ を v の k 次 Lagrange 補間という。本稿では、この k 次 Lagrange 補間による補間誤差 $|v - \Pi_K^k v|_{m,p,K}$ の上界について考える。ここで $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ は領域 Ω 上の Sobolev セミノルムであり、略さずに書くと $|\cdot|_{W^{m,p}(\Omega)}$ のことである。また、 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ を $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ と表記する。

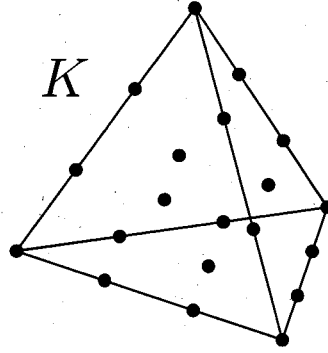


図 1: $\Sigma^3(K)$ の点配置

3 有限要素解の事前誤差評価への応用

主結果について説明する前に, Lagrange 補間の誤差評価が有限要素解の誤差評価にどう応用されるのかを紹介する. 今回の結果は非線形偏微分方程式を含む様々な方程式に応用可能だが, ここでは簡単のため, 以下のポアソン方程式の弱解を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^3$ の非凸な多角形領域とし, $f \in L^2(\Omega)$ を仮定する. このとき, 弱解 u は $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ の滑らかさを持つ. 弱解の満たす方程式は

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \text{for } \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

となり, 数値解を求めるため, 有限要素法では Ω を多数の四面体に分割し, その分割に沿って連続な区分多項式を考えることが多い. ここでは, 区分一次関数による近似を考えよう. Ω 上の区分一次関数で境界で零になるものの集合を S_h とすると, 有限要素解は

$$(\nabla u_h, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \text{for } \forall \varphi \in S_h$$

を満たす $u_h \in S_h$ として定義される. S_h は有限次元であるから, u_h は連立一次方程式を解くことにより求められる.

Ω の有限要素分割を構成する四面体要素を $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ とし, $u \in W^{2,2}(\Omega)$ に対し, 各 τ_k 上で定義される $\Pi_{\tau_k}^1 u$ を接続して Ω 全体を定義域にしたものを $\Pi^1 u$ とする. このとき, $\Pi^1 u$ は Ω 全体で連続になる. $\Pi^1 u$ を u の $\mathcal{P}_1$ 補間, もしくは区分線形補間, 区分一次補間などと呼ぶ.

一般に、四面体 K と $u \in W^{2,2}(T)$ について

$$|v - \Pi_K^1 v|_{1,2,K} \leq C_K |v|_{2,2,K}$$

なる評価が成り立つことが知られている。ここで C_K は K のみに依存する (u とは関係ない) 定数である。この C_K を補間誤差定数という。

さて、簡単な議論から、有限要素解 u_h は S_h の元のなかで $|u - u_h|_{1,2,\Omega}$ を最小にするものであることがわかるので、

$$|u - u_h|_{1,2,\Omega} \leq |u - \Pi^1 u|_{1,2,\Omega}$$

が成り立つ。ここで補間誤差定数の定義を用いると

$$\begin{aligned} |u - \Pi^1 u|_{1,2,\Omega} &= \sqrt{\sum_k |u - \Pi u|_{1,2,\tau_k}^2} \leq \sqrt{\sum_k C_{\tau_k}^2 |u|_{2,2,\tau_k}^2} \\ &\leq \max_k C_{\tau_k} \sqrt{\sum_k |u|_{2,2,\tau_k}^2} = \max_k C_{\tau_k} |u|_{2,2,\Omega} \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、多面体 Ω においては

$$|u|_{2,2,\Omega} = \|\Delta u\|_{2,\Omega}$$

が成り立つことが知られているので、最終的に

$$|u - u_h|_{1,2,\Omega} \leq \max_k C_{\tau_k} |u|_{2,2,\Omega} = \max_k C_{\tau_k} \|\Delta u\|_{2,\Omega} = \max_k C_{\tau_k} \|f\|_{2,\Omega}$$

が成り立つ。 L^2 誤差については、Aubin-Nitsche の技巧を用いることにより

$$\|u - u_h\|_{2,\Omega} \leq \left(\max_k C_{\tau_k} \right)^2 \|f\|_{2,\Omega}$$

が得られる。 f は与えられている関数なので、この定理は、有限要素法による誤差の上限が、実際に数値計算を実行する前から見積もれることを意味している。このようなタイプの誤差評価を事前誤差評価という。

4 先行研究

本章では、Lagrange 補間誤差評価に関する先行研究について述べる。また、本章に限り K は三角形もしくは四面体とする。これ以降、 $h_K = \text{diam}(K)$ を K の直径 (すなわち、最大辺の長さ)、 ρ_K を内接円の直径とする。

Ciarlet[3] や Brenner and Scott[2] など、多くの有限要素法の教科書に記載されているのが以下の正則性条件である。

定理 1 (正則性条件) $\sigma > 0$ を定数とする. $h_K/\rho_K \leq \sigma$ が成り立つとき, σ のみに依存する定数 $C = C(\sigma)$ が存在して

$$|v - \Pi_K^1 v|_{1,2,K} \leq Ch_K |v|_{2,2,K}, \quad \forall v \in H^2(K)$$

が成り立つ.

K が三角形の場合には, 正則性条件よりもさらに一般的な条件として, 最大角条件 [1] が知られている. すなわち,

定理 2 (最大角条件) $\alpha < \pi$ を定数とする. もし三角形 K の全ての角の大きさが α 以下ならば, α のみに依存する定数 $C = C(\alpha)$ が存在して

$$|v - \Pi_K^1 v|_{1,2,K} \leq Ch_K |v|_{2,2,K}, \quad \forall v \in H^2(K)$$

が成り立つ.

最大角条件は Křížek [7] により四面体へ拡張されている.

K が三角形のとき, 我々は, 外接半径条件とよぶ以下の評価を得た [4, 5].

定理 3 (外接半径条件) $1 \leq p \leq \infty$ とし, k, m を $k \geq 1$ かつ $0 \leq m \leq k$ なる整数とする. このとき, 三角形 K 上の k 次 Lagrange 補間について以下の誤差評価が成り立つ.

$$|v - \Pi_K^k v|_{m,p,K} \leq CR_K^m h_K^{k+1-2m} |v|_{k+1,p,K}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(K)$$

ここで, R_K は K の外接半径であり, $C = C(k, m, p)$ は k, m, p のみに依存する定数である.

外接半径条件は, K に幾何学的な制約がなく, 任意の三角形に適用可能であるという点で, 正則性条件や最大角条件よりも一般的な評価であるといえる. しかしながら, 四面体については, 幾何学的な制約なしに成り立つような誤差評価は今まで知られていなかった.

5 主結果

まず, 射影外接半径について定義を示したのち, 主結果を述べる.

四面体 K について, 一つの面を選び, それを B とする. B の外接半径を R_B , 直径を h_B とする. また, K を B に垂直な平面に射影すると三角形になり, 三角形の形状は射影する方向によって変わるが, あらゆる方向への射影を考えたときの三角形の外接半径の最大値を R_P とする. このとき, K の射影外接半径を

$$R_K = \min_B \frac{R_B R_P}{h_B}$$

と定義する. $\min_B$ は, K の 4 つの面すべてについて考え, その最小値を取ることを意味している. このとき, 以下の誤差評価が成り立つ.

定理 4 (射影外接半径による評価) k, m を $k \geq 1$ かつ $0 \leq m \leq k$ なる整数とする. また, p は

$$\begin{cases} 2 < p \leq \infty & (k = m) \\ \frac{3}{2} < p \leq \infty & (k = 1, m = 0) \\ 1 \leq p \leq \infty & (k \geq 2, k - m \geq 1) \end{cases}$$

を満たすとする. このとき, 四面体 K 上の k 次 Lagrange 補間について以下の誤差評価が成り立つ.

$$|v - \Pi_K^k v|_{m,p,K} \leq C R_K^m h_K^{k+1-2m} |v|_{k+1,p,K}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(K)$$

ここで, R_K は K の射影外接半径であり, $C = C(k, m, p)$ は k, m, p のみに依存する定数である.

証明の詳細については [6] を参照のこと.

有限要素法への応用上は $p = 2$ の場合が重要であるが, 区分一次要素を用いた場合, すなわち $m = k = 1$ のときには $p > 2$ でなければならず, $p = 2$ には適用できない. しかし, $m = k = 1, p = 2$ の場合が除外されてしまうのは本質的であって, 上で述べた誤差評価を満たさない K と v の例を構成することができる (Appendix 参照). 区分 2 次 Lagrange 要素を用いた場合は $p = 2, m = 1, k = 2$ として

$$|v - \Pi_K^2 v|_{1,2,K} \leq C R_K h_K |v|_{3,2,K}, \quad \forall v \in W^{3,2}(K)$$

なる誤差評価が重要となる. つまり, 要素分割を細分化していく際には, 四面体要素の射影外接半径を小さくしていくことが重要となる. 我々の導出した補間誤差評価を用いると, 例えば, $\varepsilon > 0$ を小さな数として, $(0, 0, 0), (\varepsilon h, 0, 0), (0, \varepsilon h, 0), (0, 0, h)$ を頂点とする四面体 (図 2) や, $(0, 0, 0), (h, 0, 0), (h, \varepsilon h, 0), (0, 0, \varepsilon h)$ を頂点とする四面体 (図 3) や, $(0, 0, 0), (h, 0, 0), (0, h, 0), (0, 0, \varepsilon h)$ を頂点とする四面体 (図 4) などは射影外接半径が大きくなるので, 有限要素解の精度を悪化させる要因にはならないが, 図 5~図 10 の

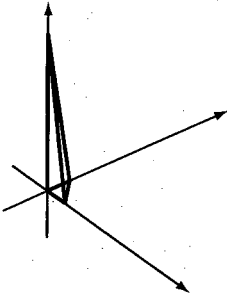


図 2: Spire

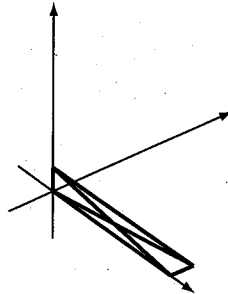


図 3: Splinter

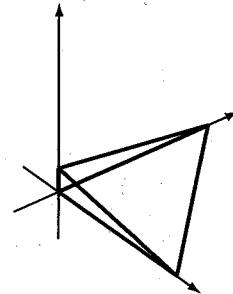


図 4: Wedge

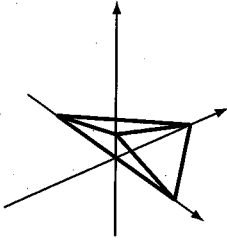


図 5: Spade

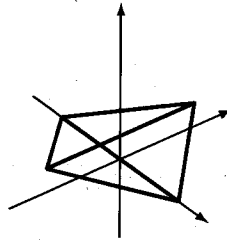


図 6: Sliver

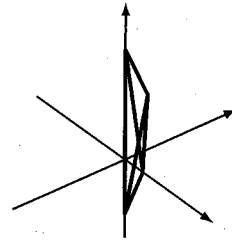


図 7: Spindle

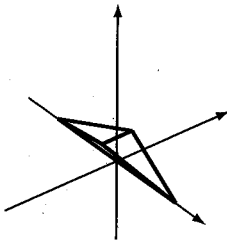


図 8: Spear

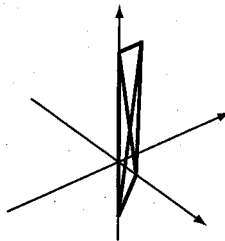


図 9: Spike

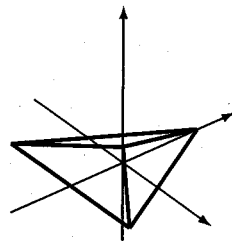


図 10: Cap

ような潰れ方をする四面体は、射影外接半径が大きくなってしまいうため有限要素解の精度に対して悪影響が生じることがわかる。

6 結論と今後の課題

我々は、任意の形状の四面体に適用できる、四面体上の Lagrange 補間の誤差評価を得ることに成功した。我々の誤差評価においては、射影外接半径という量が本質的な役割を果たしている。我々の結果と最大角条件の関係は現時点では明らかではないが、最大角条件は我々の誤差評価から導ける、つまり、我々の結果は最大角条件を含んでいるのではないかと考えている。ただし、証明は今後の課題である。四面体の形状が潰れていくときの補間誤差の発散レートについて、我々の誤差評価が最適であるかどうかは分かっていない。恐らく最適ではないと思われるが、どういう場合に実際の発散レートと違いが現れるかについては、今のところ分かっていない。我々の結果は $k = m = 1$, $p = 2$ の時には適用できないので、この場合については、射影外接半径を用いない誤差評価を構築したい。

参考文献

- [1] I. Babuška, A.K. Aziz: On the angle condition in the finite element method, SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), 214–226.
- [2] S.C. Brenner, L.R. Scott: The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd edition. Texts in Applied Mathematics 15, Springer, New York, 2008.
- [3] P.G. Ciarlet: The Finite Element Methods for Elliptic Problems, Classics in Applied Mathematics 40, SIAM, Philadelphia, 2002, Reprint of the 1978 original (North Holland, Amsterdam).
- [4] K. Kobayashi, T. Tsuchiya: A priori error estimates for Lagrange interpolation on triangles, Appl. Math., 60 (2015), 485–499.
- [5] K. Kobayashi, T. Tsuchiya: Extending Babuška-Aziz theorem to higher order Lagrange interpolation, Appl. Math., 61 (2016), 121–133.
- [6] K. Kobayashi, T. Tsuchiya: Error analysis of Lagrange interpolation on tetrahedrons,
<https://arxiv.org/abs/1606.03918>
- [7] M. Křížek: On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements, SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), 513–520.
- [8] N. A. Shenk: Uniform error estimates for certain narrow Lagrange finite elements, Math. Comp., 63 (1994), 105–119.

Appendix: $k = m = 1, p = 2$ のときの反例

$k = m = 1, p = 2$ のときには

$$|v - \Pi_K^1 v|_{1,2,K} \leq CR_K |v|_{2,2,K}, \quad \forall v \in W^{2,2}(K)$$

なる誤差評価が成り立たないことを、実際に反例を構成することで示す。このような反例については Shenk[8] でも言及されているが、Shenk の反例は関数の構成が間接的で、何が本質なのかわかり難い。ここでは、より具体的な関数で反例を構成する。

$h > 0$ について $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, h)$ を頂点とする四面体を K とする。また

$$v(x, y, z) = z \log(1 + 2k(x + y))$$

とする。ただし $k > 0$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
 |v - \Pi_K^1 v|_{1,2,K}^2 &= |v|_{1,2,K}^2 \\
 &= \int_T (|v_x|^2 + |v_y|^2 + |v_z|^2) dV \geq \int_T |v_z|^2 dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{h(1-x-y)} \left\{ \log(1 + 2k(x+y)) \right\}^2 dz dy dx \\
 &= h \int_0^1 t(1-t) \left(\log(1 + 2kt) \right)^2 dt \geq \frac{h}{2} \int_0^{1/2} t \left(\log(1 + 2kt) \right)^2 dt \\
 &\geq \frac{h}{4} \int_0^{1/2} t \left(\log(1 + 2kt) \right) \left(\log(1 + 2kt) + \frac{2kt}{1 + 2kt} \right) dt \\
 &= \frac{h}{8} \left[t^2 \left(\log(1 + 2kt) \right)^2 \right]_0^{1/2} = \frac{h}{32} \left(\log(1 + k) \right)^2
 \end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned}
 |v|_{2,2,K}^2 &= \int_T (|v_{xx}|^2 + 2|v_{xy}|^2 + |v_{yy}|^2 + 2|v_{xz}|^2 + 2|v_{yz}|^2) dV \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{h(1-x-y)} \left(\frac{64k^4 z^2}{(1 + 2k(x+y))^4} + \frac{16k^2}{(1 + 2k(x+y))^2} \right) dz dy dx \\
 &\leq \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{h(1-x-y)} \left(\frac{64k^4 h^2}{(1 + 2k(x+y))^4} + \frac{16k^2}{(1 + 2k(x+y))^2} \right) dz dy dx \\
 &= 8kh \int_0^1 2kt \left(\frac{4k^2 h^2}{(1 + 2kt)^4} + \frac{1}{(1 + 2kt)^2} \right) dt \\
 &\leq 8kh \left(\int_0^1 \frac{4k^2 h^2}{(1 + 2kt)^3} dt + \int_0^1 \frac{dt}{1 + 2kt} \right) \\
 &\leq 8kh \left(\int_0^\infty \frac{4k^2 h^2}{(1 + 2kt)^3} dt + \int_0^1 \frac{dt}{1 + kt} \right) \\
 &= 8h \left(k^2 h^2 + \log(1 + k) \right)
 \end{aligned}$$

よって $k = 1/h$ と取ると、 $h \rightarrow 0$ のとき、 K の射影外接半径は有界である一方、

$$\frac{|v - \Pi_K^1 v|_{1,2,K}^2}{|v|_{2,2,K}^2} \geq \frac{\frac{h}{32} \left(\log(1 + 1/h) \right)^2}{8h \left(1 + \log(1 + 1/h) \right)} = \frac{\left(\log(1 + 1/h) \right)^2}{256 \left(1 + \log(1 + 1/h) \right)} \rightarrow \infty$$

となるので、射影外接半径を用いる誤差評価は適用できないということがわかる。