

テータ級数によるヒルベルトカスプ形式の表示

埼玉大学理工学研究科 小嶋 久社

Hisashi Kojima
Graduate School of Science and Engineering,
Saitama University

本講演は坂田 裕氏（早稲田大学高等学院）との共同研究に基づく。

1 研究の背景.

N, k は自然数とする. 本講演を通じて

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}, \quad \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$S_k(N) = \left\{ f : \mathfrak{H} \text{ 上の正則関数} \left| \begin{array}{l} (1) \text{ 任意の } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ に対して} \\ f(g(z)) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z). \\ (2) f \text{ は } \Gamma_0(N) \text{ の各 cusp で } 0 \text{ となる.} \end{array} \right. \right\}$$

とする. $S_k(N)$ の元を重さ k , レベル N の楕円 cusp 形式とよぶ.

楕円 cusp 形式の具体例. 正定値対称行列 $Q = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{Z})$ に付随する球関数 P に対して, Q と P に付随する Theta 級数

$$\vartheta(z; Q, P) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} P(l) \exp(2\pi\sqrt{-1} {}^t l Q l) \quad (z \in \mathfrak{H})$$

はある条件の下で楕円 cusp 形式である.

基底問題. $S_k(N)$ の各元が Theta 級数の 1 次結合で記述できるか.

Hecke の問題. Hecke は 1940 年に, 素数 p の場合の $S_2(p)$ に関する基底問題を提出.

M. Eichler の解答. M. Eichler は 1956 年に, $S_2(p)$ 上の Hecke 作用素 $T_2(n)$ と $\mathbb{Q}$ 上の四元数環に付随する Brandt 行列 $B(n)$ の跡を比較して Hecke の問題を肯定的に解決した. さらに M. Eichler は 1958 年, 1973 年に Eichler-Selberg の跡公式を証明し, その応用として k は 2 以上の, N は平方因子を持たない自然数の場合の $S_k(N)$ に関する基底問題を肯定的に解決した. その後, 基底問題は次の様に一般化されて解明されてきた;

- (1) Hijikata, Pizer 等は Eichler-Selberg の跡公式を一般のレベルに拡張し、これを用いて任意の自然数 N の場合の $S_k(N)$ に関する基底問題を肯定的に解決した.
- (2) Jacquet-Langlands-Shimizu は保型表現を用いて $GL(2)$ 上の保型形式のなす空間に関する基底問題を肯定的に解決した.
- (3) Waldspurger は 1979 年に, Zagier-Cohen による巧妙で興味深い解析的手法と Siegel の主定理を組み合わせて任意の自然数 N の場合の cusp 形式のなす空間 $S_k(N)$ に関する基底問題を肯定的に解決した.
- (4) Böcherer と Kuang は Garret の Siegel-Eisenstein 級数の pull back formula と Siegel-Weil の定理を用いて Siegel 保型形式のなす空間に関する基底問題を肯定的に解決した.

本研究目的. Waldspurger の基底定理を Hilbert cusp 形式の場合に一般化する.

主定理 (定理 4.7(H. Kojima- H. Sakata)). F を狭義類数 1 の総実代数体とする. 重さ k , 任意レベル N を持つ Hilbert cusp 形式の空間 $S_k((N))$ は球関数付き Theta 級数の 1 次結合で張られる.

主定理の証明には解析的でデリケートな技巧が求められる. 上記のアイデアは cusp 形式のなす空間を生成する cusp 形式を具体的に構成し, その Fourier 係数を計算して同じ Fourier 係数を持つ Theta 級数を見出すことである. その証明において, それら 2 つの保型形式はそれぞれ, Eisenstein 級数と同様, Fourier 係数が Non-archimedean part と archimedean part の積で記述出来ることが重要な鍵となる. 特に主定理の証明において本質的で鍵となる命題は定理 2.1(A), (B) である.

杉山 真悟氏 (金沢大学) から本講演後に貴重なコメントを頂いた. この場を借りて感謝致します.

2 記法等の準備.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で自然数全体, 有理整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体をそれぞれ表わす. F は次数 n の総実代数体, $\mathfrak{o}, \mathfrak{d}, D_F$ を F の極大整環, F の $\mathbb{Q}$ に対する共役差積, F の判別式とする. $\mathfrak{a} = \{v_1, \dots, v_n\}$ を F の archimedean 素点全体とする. $v_i \in \mathfrak{a}$ に対して F_{v_i} を F の v_i -完備化とし, v_i を F から $\mathbb{R}$ への埋め込みと見て F_{v_i} と $\mathbb{R}$ を同一視する.

E を F の単数群とする. $\alpha \in F, v_i \in \mathfrak{a}$ に対して $\alpha^{(i)} = v_i(\alpha)$, $N(\alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha^{(i)}$ とおく. 本稿では F の狭義類数を 1, または $[E : E^+] = 2^n$ と仮定する. 但し, $E^+ = \{\alpha \in E \mid \alpha \gg 0\}$ とし, $\alpha \gg 0$ は全ての i ($1 \leq i \leq n$) に対して $\alpha^{(i)} > 0$ を満たすことを表わす.

$(N) = N\mathfrak{o}$ は F の整イデアルでかつ $N \gg 0$ とする. このとき, レベル (N) の Hilbert modular 群を次で定義する;

$$\begin{aligned} \Gamma^0((N)) &= \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F) \mid \begin{array}{l} a, d \in \mathfrak{o}, b \in \mathfrak{d}^{-1}, \\ c \in \mathfrak{d}(N), \det g \gg 0 \end{array} \right\}, \\ \Gamma((N)) &= \{g \in \Gamma^0((N)) \mid \det g = 1\}. \end{aligned}$$

$$g = (g_1, \dots, g_n) \in GL_2^+(\mathbb{R})^n \quad \left(g_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}) = \{g \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\} \right)$$

は $\mathfrak{H}^n$ に次の様に群作用する； $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{H}^n$ に対して

$$g(z) = g(z_1, \dots, z_n) = (g_1(z_1), \dots, g_n(z_n)) \quad \left(g_i(z_i) = \frac{a_i z_i + b_i}{c_i z_i + d_i} \right).$$

k は 3 以上の自然数とする． $\mathfrak{H}^n$ 上の関数 $f(z)$ に対して

$$f|_k g(z) = \prod_{i=1}^n (\det g_i)^{\frac{k}{2}} (c_i z_i + d_i)^{-k} f(g(z)) \quad (z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{H}^n)$$

とおく．さらに埋め込み

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (g^{(1)}, \dots, g^{(n)}) \quad \left(g^{(i)} = \begin{pmatrix} a^{(i)} & b^{(i)} \\ c^{(i)} & d^{(i)} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n) \right)$$

により， $GL_2(F)$ を $GL_2(\mathbb{R})^n$ の部分群として見る．空間

$$M_k^0((N)) = \left\{ f : \mathfrak{H}^n \text{ 上の正則関数} \mid \begin{array}{l} (1) \text{ 任意の } g \in \Gamma^0((N)) \text{ に対して } f|_k g = f \text{ を満たす.} \\ (2) f \text{ は } \Gamma^0((N)) \text{ の各 cusp で正則.} \end{array} \right\}$$

の元 f を $\Gamma^0((N))$ に関する重さ k の Hilbert modular 形式とよぶ．さらに

$$S_k^0((N)) = \{ f \in M_k^0((N)) \mid f \text{ は } \Gamma^0((N)) \text{ の全ての cusp で } 0 \}$$

の元 f を $\Gamma^0((N))$ に関する重さ k の Hilbert cusp 形式とよぶ．

$S_k((N))$ の newform, oldform からなる空間をそれぞれ $S_k^{\text{new}}((N))$, $S_k^{\text{old}}((N))$ と置く．

$1 \leq r \leq k-1$ を満たす整数 r と $t, n \in \mathfrak{o}$ に対して

$$P_{k,r}(t, n) = \prod_{i=1}^n P_{k,r}(t^{(i)}, n^{(i)}),$$

と定義する．ただし， $P_{k,r}(t, n)$ は関係式

$$(1 - tx + nx^2)^{-r} = \sum_{k=r+1}^{\infty} P_{k,r}(t, n) x^{k-r-1}$$

から与えられるものとする． $s \in \mathbb{C}$ に対して $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2 \cdot (2\pi)^{-s} \Gamma(s)$ とおく． $\Delta \in \mathfrak{o}$ と $\Re(s) > 1$ を満たす $s \in \mathbb{C}$ に対して L 関数を次で定義する；

$$L^{(N)}(s, \Delta) = \xi_F(s) N(N)^{-s} \sum_{\alpha \in \mathfrak{o}/E, \alpha \gg 0} n^{(N)}(\alpha, \Delta) N(\alpha)^{-s}.$$

但し， $\xi_F(s) = \zeta_F(2s) \zeta_F(s)^{-1}$ ($\zeta_F(s)$ は F の Dedekind zeta 関数) であり，

$$n^{(N)}(\alpha, \Delta) = \#\{x \in \mathfrak{o}/(2\alpha N) \mid x^2 \equiv \Delta \pmod{4\alpha N}\}.$$

このとき Euler 積表示 $L^{(N)}(s, \Delta) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}^{(N)}(s, \Delta)$ が得られる．

$\Lambda = \{\tilde{\lambda} = \{\lambda(m)\}_{m \in \mathfrak{o}, m \gg 0, (m, (N))=1}\}, \tilde{\lambda} \in \Lambda$ に対して,

$$S_k((N); \tilde{\lambda}) = \left\{ f \in S_k((N)) \mid T(m)f = \lambda(m)f \left((m, (N)) = 1, \tilde{\lambda} = \{\lambda(m)\} \right) \right\}.$$

$\mathcal{L} = \{\tilde{\lambda} \in \Lambda \mid S_k((N); \tilde{\lambda}) \neq 0\}$ とおけば,

$$S_k((N)) = \bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \mathcal{L}} S_k((N); \tilde{\lambda}).$$

と正規直交分解出来る. $\tilde{\lambda} = \{\lambda(m)\} \in \mathcal{L}$ に対して $a_1(f_{\tilde{\lambda}}) = 1$ をみたす $f_{\tilde{\lambda}} \in S_k((N))$ をとるとき,

$$a_{\xi}(f_{\tilde{\lambda}}) = \lambda(m), \quad ((\xi) = (m), \xi \in \mathfrak{o}, \xi \gg 0)$$

も成り立つ. $S_k((N); \tilde{\lambda})$ の Hecke eigen form からなる正規直交基底 $\{f_{\tilde{\lambda}, i}\}_{i \in I_{\tilde{\lambda}}}$ をとるとき, 関数 $\varphi_s^N(z)$ を次の様に定義する;

$$\varphi_s^{(N)}(z) = (-1)^{\frac{nk}{2}} \gamma(s)^n \sum_{\tilde{\lambda} \in \mathcal{L}} f_{\tilde{\lambda}}(z) \left(\sum_{i \in I_{\tilde{\lambda}}} \mathbf{D}_{f_{\tilde{\lambda}, i}}(s+k-1) \right).$$

ここで, $\gamma(s)$ は Γ 因子

$$(4\pi)^{-1} \exp(\sqrt{-1}\pi(s-k+1)/2) \Gamma(k) \Gamma(s)^{-1} \Gamma(k-s)^{-1}$$

であり, また $i \in I_{\tilde{\lambda}}$ に対して $\mathbf{D}_{f_{\tilde{\lambda}, i}}(s)$ は

$$\mathbf{D}_{f_{\tilde{\lambda}, i}}(s) = (\Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{R}}(s-k+2))^n \xi_F(s-k+1) \sum_{\xi \in \mathfrak{o}/E, \xi \gg 0} \left| a_{\xi}(f_{\tilde{\lambda}, i}) \right|^2 N(\xi)^{-s}$$

で定義される上の s で pole を持たない関数である.

次の定理は本研究で最も基本となる命題の 1 つである;

定理 2.1. $k > 2$, r は奇数かつ $3 \leq r \leq k-3$ であるとき,

(A) $S_k^{\text{new}}((N)) \subset \cup_{(m, (N))=1} \mathbb{C} \cdot T(m) \varphi_r^{(N)}(z)$.

(B) m が平方数でないとき,

$$a_m(\varphi_r^{(N)}(z)) = \frac{(2^{-r-2}\pi^{-1}(k-1))^n}{N(\mathfrak{d})^r} \sum_{\substack{t \in \mathfrak{o} \\ t^2 \ll 4m}} N(4m-t^2)^{r-\frac{1}{2}} L^{(N)}(r, t^2-4m) \prod_{i=1}^n P_{k,r}(t^{(i)}, m^{(i)}).$$

この定理を示す前に次の命題を用意する (この命題は New form の理論から導かれる).

命題 2.2. s は $\Re(s) > 1$ をみたす複素数か $s = 1$ とするとき, $S_k^{\text{new}}((N)) \subset \cup_{(m, (N))=1} \mathbb{C} \cdot T(m) \varphi_s^{(N)}(z)$.

さらに, $m \gg 0$ である $m \in \mathfrak{o}$, $n > 2$ である $k \in \mathbb{Z}$ および $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z' \in (z'_1, \dots, z'_n) \in \mathfrak{H}^n$ に対して

$$\omega_m(z, z') = \sum_{(a, b, c, d) \in F^4} \prod_{i=1}^n \left(c^{(i)} z_i z'_i + d^{(i)} z'_i + a^{(i)} z_i + b^{(i)} \right)^{-k}$$

と置く. ただし, $(a, b, c, d) \in F^4$ は $a, d \in \mathfrak{o}$, $d \in \mathfrak{d}^{-1}$, $c \in \mathfrak{d}(N)$ かつ $ad - bc = m$ をみたしながら走るものとする. このとき, 次を得る.

補題 2.3. $m \gg 0$, $(m, (N)) = 1$ である $m \in \mathfrak{o}$ に対して

$$\omega_m(z, z') = N(m)^{1-k} c_k^n \sum_{\tilde{\lambda} \in \mathcal{L}, i \in I_{\tilde{\lambda}}} \lambda(m) f_{\tilde{\lambda}, i}(z) \overline{f_{\tilde{\lambda}, i}(-z')}.$$

ただし, $c_k = 2^{-k+3}(-1)^{k/2}(k-1)^{-1}\pi$ でありかつ $\tilde{\lambda} = \{\lambda(m)\}_{\substack{m \in \mathfrak{o}, m \gg 0, \\ (m, (N))=1}}$ である.

補題 2.3 の証明は Cauchy の積分公式と Hecke 作用素の性質を用いて証明出来る. 命題 2.2 と補題 2.3 を用いて定理 2.1(A) が証明できる.

3 ある保型形式の Fourier 係数の計算

$$\mathcal{M}' = \left\{ (c, d) \in F^2 - \{(0, 0)\} \mid c \in \mathfrak{d}(N), d \in \mathfrak{o}, (c\mathfrak{d}^{-1}, d) = 1 \right\}.$$

に対して, 2 つの Eisenstein 級数

$$H(z, s) = \sum_{(c, d) \in \mathcal{M}'/E} \prod_{i=1}^n \left| c^{(i)} z_i + d^{(i)} \right|^{-2s}, \quad \mathbf{E}(z, s) = \xi_F(s) H(z, s) \prod_{i=1}^n y_i^s \quad (s \in \mathbb{C})$$

を定義する. このとき, 保型形式の Rankin convolution と Eisenstein 級数を用いて次の補題を得る.

補題 3.1.

$$a_m(\varphi_s^{(N)}(z)) = (-1)^{\frac{kn}{2}} \gamma(s)^n (N(m)^{1-k} c_k^n)^{-1} \int_{\Gamma((N)) \backslash \mathfrak{H}^n} \omega_m(z, -\bar{z}) \mathbf{E}(z, s) \prod_{i=1}^n y_i^{k-2} dx_i dy_i.$$

次に, この式の右辺の積分を詳しく計算していく.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathfrak{o}, b \in \mathfrak{d}^{-1}, c \in \mathfrak{d}(N), a + d = t, ad - bc = m \right\}$$

の任意元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に二次形式

$$q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2; \quad A = c, B = d - a, C = -b$$

を対応させ, この $q(x, y)$ に対して, $z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} = (x_i + \sqrt{-1}y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathfrak{H}^n$ の関数

$$R_q(z, t) = \prod_{i=1}^n y_i^k \left(A^{(i)} |z_i|^2 + B^{(i)} x_i + C^{(i)} - \sqrt{-1} t^{(i)} y_i \right)^{-k}; \quad |q| = B^2 - 4AC = t^2 - 4m$$

を定義する. このとき,

$$\omega_m(z, -\bar{z}) \prod_{i=1}^n y_i^k = \sum_{t \in \mathfrak{o}} \sum_{|q|=t^2-4m} R_q(z, t).$$

ここで, $b_m(s)$ を

$$\sum_{t \in \mathfrak{o}} \int_{\Gamma((N)) \backslash \mathfrak{H}^n} \sum_{|q|=t^2-4m} R_q(z, t) \xi_F(s)^{-1} \mathbf{E}(z, s) \prod_{i=1}^n \frac{dx_i dy_i}{y_i^2}$$

で定義すれば, 定義より

$$b_m(s) = \sum_{t \in \mathfrak{o}} \int_{\Gamma((N)) \backslash \mathfrak{H}^n} \sum_{|q|=t^2-4m} \sum_{(c, d) \in \mathcal{M}'/E} R_q(z, t) \prod_{i=1}^n |c^{(i)} z_i + d^{(i)}|^{-2s} \prod_{i=1}^n y_i^{s-2} dx_i dy_i$$

となる. $m, t \in \mathfrak{o}$ に対して集合

$$M(t, m) = \left\{ (q, (c, d)) \left| \begin{array}{l} q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2, A \in \mathfrak{d}(N), \\ B \in \mathfrak{o}, C \in \mathfrak{d}^{-1}, (c, d) \in \mathcal{M}'/E, \\ |q| = B^2 - 4AC = t^2 - 4m \end{array} \right. \right\}.$$

を与えれば, $\Gamma((N))$ の元 γ は $M(t, m)$ に次の様に作用する;

$$\gamma \cdot (q, (c, d)) = ({}^t\gamma q \gamma, (c, d) \gamma) \quad ((q, (c, d)) \in M(t, m)).$$

$M(t, m)$ のこの作用による同値類 $[(q, (c, d))]$ 全体を $M(t, m)/\sim$ とおく. このとき,

$$b_m(s) = \int_{\Gamma((N)) \backslash \mathfrak{H}^n} \sum_{[q, (c, d)] \in M(t, m)/\sim} \sum_{\gamma \in \Gamma((N))} R_q(\gamma(z), t) \prod_{i=1}^n |c^{(i)}(\gamma^{(i)}(z_i)) + d^{(i)}|^{-2s} \\ \times \Im(\gamma^{(i)}(z_i))^s \frac{dx_i dy_i}{y_i^2}.$$

$m, t \in \mathfrak{o}$ を固定して $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ をとり,

$$M^{(\epsilon)}(t, m) = \left\{ (q, (c, d)) \in M(t, m) \left| \operatorname{sgn}(q(d, -c)^{(i)}) = \epsilon_i \ (1 \leq i \leq n) \right. \right\}$$

$$\text{かつ} \quad M^{(0)}(t, m) = \left\{ (q, (c, d)) \in M(t, m) \left| q(d, -c) = 0 \right. \right\}$$

とおけば, $M(t, m)/\sim$ の直和分解

$$M(t, m) = \coprod_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} \left(M^{(\epsilon)}(t, m)/\sim \right) \coprod \left(M^{(0)}(t, m)/\sim \right)$$

が得られる. 従って,

$$b_m(s) = \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} \sum_{[q, (c, d)] \in M^{(\epsilon)}(t, m)/\sim} \int_{\mathfrak{H}^n} R_q(z, t) \prod_{i=1}^n |c^{(i)} z_i + d^{(i)}|^{-2s} y_i^{s-2} dx_i dy_i \\ + \sum_{[q, (c, d)] \in M^{(0)}(t, m)/\sim} \int_{\mathfrak{H}^n} R_q(z, t) \prod_{i=1}^n |c^{(i)} z_i + d^{(i)}|^{-2s} y_i^{s-2} dx_i dy_i.$$

そこで,

$$\xi_m^{(\epsilon)}(s) = \sum_{[q, (c, d)] \in M^{(\epsilon)}(t, m)/\sim} \int_{\mathfrak{H}^n} R_q(z, t) \prod_{i=1}^n |c^{(i)} z_i + d^{(i)}|^{-2s} y_i^{s-2} dx_i dy_i.$$

と置いて、この解析を進める。 $\tilde{\Delta} < (\tilde{t})^2$ を満たす実数 $\tilde{\Delta}, \tilde{t}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$I_k(\tilde{\Delta}, \tilde{t}, s) = \int_{\mathfrak{H}} \left(|z|^2 - \sqrt{-1} \cdot \tilde{t}y - \tilde{\Delta}/4 \right)^{-k} y^{k+s-2} dy \quad (z = x + \sqrt{-1}y \in \mathfrak{H})$$

と置く。 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ と $R_q(z, t)$ に対して

$$R_{q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) = y_i^k \left(A^{(i)}|z_i|^2 + B^{(i)}x_i + C^{(i)} - \sqrt{-1}t^{(i)}y_i \right)^{-k} \quad (z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i \ (1 \leq i \leq n))$$

と置けば、

$$\begin{aligned} \xi_m^{(\epsilon)}(s) = & \sum_{[q, (c, d)] \in M^{(\epsilon)}(t, m)/\sim} \prod_{i \in L(\Delta)} \int_{\mathfrak{H}} R_{q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) \left| c^{(i)}z_i + d^{(i)} \right|^{-2s} \\ & \times y_i^{s-2} dx_i dy_i \prod_{i \notin L(\Delta)} \int_{\mathfrak{H}} R_{q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) \left| c^{(i)}z_i + d^{(i)} \right|^{-2s} y_i^{s-2} dx_i dy_i. \end{aligned}$$

ただし、 $L(\Delta) = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \Delta^{(i)} > 0 \right\}$. ここで、

$$q(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad q^{(i)}(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} A^{(i)} & B^{(i)}/2 \\ B^{(i)}/2 & C^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考える。もし $q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)}) > 0$ ならば

$$g^{(i)} = \begin{pmatrix} d^{(i)} & -B^{(i)}d^{(i)}/2 + C^{(i)}c^{(i)} \\ -c^{(i)} & A^{(i)}d^{(i)} - B^{(i)}c^{(i)}/2 \end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ への変換 $z_i \mapsto g^{(i)}z_i$ を与える。このとき、長い計算を通じて

$$\begin{aligned} & R_{q^{(i)}}(g^{(i)}z_i, t^{(i)}) \left| c^{(i)}(g^{(i)}z_i) + d^{(i)} \right|^{-2s} \left| \Im(g^{(i)}z_i) \right|^s \\ &= |q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)})|^{-s} \left(|z_i|^2 + \frac{4m^{(i)} - (t^{(i)})^2}{4} - \sqrt{-1}t^{(i)}y_i \right)^{-k} y_i^{s+k} \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{H}} R_{q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) \left| c^{(i)}z_i + d^{(i)} \right|^{-2s} y_i^{s-2} dx_i dy_i \\ &= |q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)})|^{-s} I_k \left(\Delta^{(i)}, -\text{sgn} \left(q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)}) \right) t^{(i)}, s \right). \end{aligned}$$

また $q^{(i)}(d^{(i)}, -c^{(i)}) < 0$ ならば $R_{-q^{(i)}}(z_i, t^{(i)}) = R_{q^{(i)}}(z_i, -t^{(i)})$ に注意して同様の方法でこの計算を行うことが出来る。 $(c, d) \in (\mathcal{M}'/E)/\sim$ に対して適当な $\gamma \in \Gamma((N))$ をとって $(c, d)\gamma = (0, 1)$ と出来るため、

$$M^{(\epsilon)}(t, m)/\sim = \left\{ (q, (0, 1)) \left| \begin{array}{l} q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \\ A \in \mathfrak{d}(N), B \in \mathfrak{o}, C \in \mathfrak{d}^{-1}, \\ B^2 - 4AC = t^2 - 4m, \text{sgn} A = \epsilon \end{array} \right. \right\} / \sim.$$

の代表系集合として

$$K^{(\epsilon)} = \left\{ (A, B) \left| \begin{array}{l} \delta N | A, \text{sgn}(A) = \epsilon, B \in \mathfrak{o}/2A\mathfrak{d}^{-1}, \\ B^2 \equiv t^2 - 4m \pmod{4A\mathfrak{d}^{-1}} \end{array} \right. \right\}$$

がとれる。従って,

$$\begin{aligned}
 \xi_m(s) &= \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} \xi_m^{(\epsilon)}(s) \\
 &= \sum_{t \in \mathfrak{o}} \sum_{\substack{\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \\ \epsilon \in \{\pm 1\}^n}} \sum_{\substack{(A, B) \\ \in K(\epsilon)}} |N(A)|^{-s} \prod_{i=1}^n I_k \left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, -\epsilon_i t^{(i)}, s \right) \\
 &= \xi_F(s)^{-1} N(\mathfrak{d})^{-s} \sum_{t \in \mathfrak{o}} L^{(N)}(s, t^2 - 4m) \sum_{\substack{\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \\ \epsilon \in \{\pm 1\}^n}} \prod_{i=1}^n I_k \left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, -\epsilon_i t^{(i)}, s \right).
 \end{aligned}$$

さらに

$$I_k \left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, \epsilon_i t^{(i)}, s \right) = \begin{cases} \epsilon_i I_k \left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, t^{(i)}, s \right) & \text{if } i \in L(\Delta) \\ I_k \left((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, t^{(i)}, s \right) & \text{if } i \notin L(\Delta) \end{cases}$$

に注意すれば, 次の命題を得る.

命題 3.2. m は $\mathfrak{o}$ の $m \gg 0$ かつ非平方な元とすると,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma((N)) \backslash \mathfrak{H}^n} \omega_m(z, -\bar{z}) \mathbf{E}(z, s) \prod_{i=1}^n y_i^{k-2} dx_i dy_i \\
 = N(\mathfrak{d})^{-s} \sum_{t \in \mathfrak{o}} L^{(N)}(s, t^2 - 4m) \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} I_k(t^2 - 4m, \epsilon t, s).
 \end{aligned}$$

ただし $I_k(t^2 - 4m, \epsilon t, s) = \prod_{i=1}^n I_k((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, \epsilon_i t^{(i)}, s)$ とする.

次にこの $I_k(\Delta, t, s)$ を詳しく調べる. 積分公式

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \left(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4} + 2\sqrt{-1}y \cdot \frac{t^2 - \Delta}{4}u \right)^{-r-\frac{1}{2}} dy \\
 = \frac{\Gamma(r)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(r+\frac{1}{2})} \left(\frac{t^2 - \Delta}{4} \right)^{-r} \left(1 + tu + \frac{t^2 - \Delta}{4}u^2 \right)^{-r}
 \end{aligned}$$

の両側をそれぞれ u に関する Taylor 展開して u^{k-r-1} の係数を比較すれば,

$$\begin{aligned}
 \frac{(-1)^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \prod_{i=0}^{k-r-2} \left(\frac{2r+2i+1}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4} \right)^{-k+\frac{1}{2}} \left(2\sqrt{-1}y \cdot \frac{t^2 - \Delta}{4} \right)^{k-r-1} dy \\
 = \frac{\Gamma(r)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(r+\frac{1}{2})} \left(\frac{t^2 - \Delta}{4} \right)^{-r} P_{k,r} \left(-t, \frac{t^2 - \Delta}{4} \right).
 \end{aligned}$$

ここで $P_{k,r}(s, t)$ は Gegenbauer 多項式, すなわち $(1 - sx + tx^2)^{-s}$ の $x = 0$ における Taylor 展開の x^{k-s-1} の係数である. この左辺の積分に注目する.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \left(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4} \right)^{\frac{1}{2}-k} y^{k+(-s+1)-2} dy &= I_{k,1-s} \left(\frac{\sqrt{-1}t}{2a} \right) \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right)^{1-s-k}, \\
 I_{k,s}(z) &= \int_0^{\infty} \frac{x^{k+s-2}}{(x^2 + 2xz + 1)^{k-\frac{1}{2}}} dx \quad (1-k < \Re(s) < k, z \in \mathbb{C} - (-\infty, -1]).
 \end{aligned}$$

また,

$$I_{k,1-s}(z) = \frac{2^{1-k} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)} \Gamma(k-s) \Gamma(k+s-1) (z^2-1)^{-\frac{k-1}{2}} P_{-(1-s)}^{1-k}(z) \quad (z \in \mathbb{C} - (-\infty, 1]).$$

ここで $P_\nu^\mu(z)$ は超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ から与えられる第1種 Legendre 関数, すなわち

$$\begin{aligned} P_\nu^\mu(z) = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Gamma(-\nu-1/2)}{2^{\nu+1} \Gamma(-\mu-\nu)} \frac{1}{(z^2-1)^{(\nu+1)/2}} F\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}, \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{1-z^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} (z^2-1)^{\nu/2} F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, \frac{-\mu-\nu}{2}, \frac{1}{2}-\nu; \frac{1}{1-z^2}\right) \right) \\ & (2\nu \notin 2\mathbb{Z}+1, |1-z^2| > 1, z-1 \notin \mathbb{R}_{\leq 0}) \end{aligned}$$

である. これより $P_{-(1-s)}^{1-k}(z)$, すなわち $I_{k,1-s}(z)$ は偶関数になる. 従って,

$$\int_0^\infty \left(y^2 - \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4} \right)^{\frac{1}{2}-k} y^{k-s-1} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \left(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4} \right)^{\frac{1}{2}-k} y^{k-s-1} dy.$$

これより,

$$\begin{aligned} I_k(\Delta, t, 1-s) &= \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(k)} \int_{-\infty}^\infty \left(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4} \right)^{\frac{1}{2}-k} y^{k-s-1} dy \\ &= \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(k)} \frac{\Gamma(s) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k-s)}{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t^2 - \Delta}{4} \right)^{1-k} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} \right)^{k-s-1} \\ &\quad \times P_{k,s}\left(t, \frac{t^2 - \Delta}{4}\right). \end{aligned}$$

従って, $4m - t^2 \gg 0$ のとき,

$$\begin{aligned} I_k(t^2 - 4m, t, s) &= \prod_{i=1}^n I_k((t^{(i)})^2 - 4m^{(i)}, t^{(i)}, s) \\ &= 2^{n(-k-s+1)} \pi^n (-1)^{\frac{n(k-s-1)}{2}} \left(\frac{\Gamma(k-s) \Gamma(s)}{\Gamma(k)} \right)^n N(m)^{1-k} |N(t^2 - 4m)|^{s-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n P_{k,s}(t^{(i)}, m^{(i)}). \end{aligned}$$

故に次を得る.

命題 3.3. m は $m \gg 0$, $(m, (N)) = 1$ を満たす $\mathfrak{o}$ の非平方元とする. $3 \leq s \leq k-3$ をみたす奇数 s に対して,

$$a_m(\varphi_s^{(N)}(z)) = (2^{-s-2} \pi^{-1} (k-1))^n N(\mathfrak{d})^{-s} \sum_{\substack{t \in \mathfrak{o} \\ t^2 \ll 4m}} N(4m - t^2)^{s-\frac{1}{2}} L^{(N)}(s, t^2 - 4m) P_{k,s}(t, m).$$

ここで, $P_{k,s}(t, m) = \prod_{i=1}^n P_{k,s}(t^{(i)}, m^{(i)})$.

この命題から定理 2.1(B) を得る.

4 Theta 級数と主定理

$${}^tQ = Q, \quad Q^{(i)} = (a_{ij}^{(i)}) > 0 \quad (1 \leq i \leq n), \quad a_{ii} \in 2\mathfrak{o} \quad (1 \leq i \leq m), \quad \det Q = D$$

を満たすレベル N の行列 $Q = (a_{ij}) \in M_m(\mathfrak{o})$ をとる. $k > \frac{m}{2}$ に対して,

$$q^{(i)}(x) = \frac{{}^txQ^{(i)}x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}^m), \quad \langle x, y \rangle^{(i)} = {}^txQ^{(i)}y \quad (x, y \in \mathbb{R}^m), \quad r = \frac{m}{2} - 1$$

そして $P_k^{(i)}(x, y) = P_{k,r}(\langle x, y \rangle^{(i)}, q^{(i)}(x)q^{(i)}(y))$ と置く. g を Q の属する種とし, $\{Q_j\} (j \in I(g))$ を g に属する全ての類の代表系とする. $q_j^{(i)}$ と $\langle \cdot, \cdot \rangle_j^{(i)}$ をそれぞれ $Q_j^{(i)}$ に属する二次形式と内積とする.

$$w_j = \# \{U \in GL_m(\mathfrak{o}) \mid {}^tUQ_jU = Q_j\}, \quad M_g = \sum_{j \in I(g)} w_j^{-1}, \quad \mathfrak{o} \ni d \gg 0$$

に対して Theta 級数 $\vartheta_{g,d}(z)$ を

$$\vartheta_{g,d}(z) = M_g^{-1} \left(\sum_{j \in I(g)} w_j^{-1} \sum_{\substack{x, y \in \mathfrak{o}^m \\ {}^t_y Q_j y = d}} P_k^j(x, y) e[{}^t_z q_j(x)] \right)$$

で定義する. このとき, [5], [24] により次の結果が得られる.

命題 4.1. 上記仮定のもとで $\vartheta_{g,d}(z) \in S_k((N))$.

${}^tG = G, G^{(i)} > 0 (1 \leq i \leq n)$ かつ $m' < m$ を満たす $M_{m'}(\mathfrak{o})$ の行列 G と, F の 素イデアル $\wp = (\pi) (\pi \in \mathfrak{o})$ をとる. $a \geq 0$ を満たす整数 a に対して,

$$\begin{aligned} A(Q, G) &= \# \{X \in \mathfrak{o}_{m'}^m \mid {}^tXQX = G\}, \\ A_{\pi^a}(Q, G) &= \# \{X \in (\mathfrak{o}/\pi^a\mathfrak{o})_{m'}^m \mid {}^tXQX \equiv G \pmod{\pi^a}\}, \\ \alpha_\pi(Q, G) &= \lim_{a \rightarrow \infty} N(\pi)^{a[m'(m'+1)/2 - mm']} A_{\pi^a}(Q, G) \end{aligned}$$

と置く. ここで, R_n^m は環 R -係数の $m \times n$ 行列全体とする. $\alpha_\pi(Q, G)$ は (Q, G) の局所密度とよぶ. [26] と同じ方法で次の命題を示すことが出来る.

命題 4.2. $n \in \mathfrak{o}$ は $n \gg 0$ かつ nd が非平方な元とする. $k > m/2$ に対して, $\vartheta_{g,d}(z)$ の n 番目の Fourier 係数は次式で与えられる,

$$a_n(\vartheta_{g,d}(z)) = c_1(\det Q)^{-1} \sum_{\substack{t \in \mathfrak{o} \\ t^2 \ll 4nd}} N(4nd - t^2)^{(m-3)/2} P_{k,r}(t, nd) \prod_{\pi} \alpha_\pi \left(Q, \begin{pmatrix} 2d & t \\ t & 2n \end{pmatrix} \right).$$

ここで c_1 は m にのみ依存する定数で, $\prod_{\pi}$ は $\mathfrak{o} \ni \pi \gg 0$ を満たす全ての素イデアル (π) についての積とする.

命題 4.2 の証明は次の Siegel の主定理を用いて行う.

定理 4.3 (Fractman[7], Corollary 4.4). 上記仮定の下,

$$A(Q, G) = D_F^{m'(m'+1)/4 - mm'/2} \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m-m'}} \right)^n (\det Q)^{-\frac{m'}{2}} (\det G)^{\frac{m-m'-1}{2}} \prod_{(\pi)} \alpha_\pi(Q, G).$$

ここで $\rho_l = \prod_{s=1}^l (\pi^{s/2}/\Gamma(s/2))$ とし, 積 $\prod_{(\pi)}$ は $\mathfrak{o}$ の全ての素イデアル (π) についての積とする. .

$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, m は $m \equiv 0 \pmod{8}$ を満たす正整数, N は $N \gg 0$ である $\mathfrak{o}$ の元とする.

次の命題は本結果の中での Key Proposition になる.

命題 4.4. $Q^{(i)} \gg 0$ ($1 \leq i \leq n$) を満たす $\mathfrak{o}$ 上の偶対称行列 Q の中で, 次を満たすものが存在する; Q のレベルは N , $\det Q = N^{m-2}$ で Q は $\mathfrak{o}_\wp$ 上次の行列と同値である;

$$Nf_1 \oplus \cdots \oplus Nf_1 \oplus f_1.$$

ここで, $\wp$ は F の任意の素イデアルとし, $\mathfrak{o}_\wp$ は $\mathfrak{o}$ の $\wp$ -完備化とする.

命題 4.4 の証明のアウトライン.

$\mathbb{Q}^m$ 上の二次形式 $f(x) = \sum_{i=1}^m x_i^2$ ($x = {}^t(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Q}^m$) を考える. $x, y \in \mathbb{R}^m$ に対して $\mathbb{R}^m$ の内積を以下で定める;

$$(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (x = {}^t(x_1, \dots, x_m), y = {}^t(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m).$$

次に $\mathbb{Q}^m$ の $\mathbb{Z}$ -格子 L を定義する;

$$L = \{x \in \mathbb{Z}^m \mid f(x) \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

$e = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ に対して $L_0 = L + \mathbb{Z}e$ とおく. このとき, $[L_0 : L] = 2$ で $f(L_0) \subseteq 2\mathbb{Z}$ となる. $\{a_1, \dots, a_m\}$ を L_0 の $\mathbb{Z}$ -基底とし, 行列 $S = ((a_i, a_j))$ を考えると $\det S = 1$ が分かる. $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, \dots, 0, 1)$ に対して $a_1 = e - (e_2 + \dots + e_{m-1})$, $a_2 = e_1 + e_2$, $a_i = e_{i-1} - e_{i-2}$ ($3 \leq i \leq m$) とおく. このとき, $\{a_1, \dots, a_m\}$ は L_0 の $\mathbb{Z}$ -基底であることが分かる. 故に S は偶でかつ $\det S = 1$ となる. ここで

$$\tilde{S} = \overbrace{f_1 \oplus \cdots \oplus f_1}^{\frac{m}{2}}.$$

とおくと, 全ての素数 p に対して $S, \tilde{S}$ の Hasse 記号 $\epsilon_p(S), \epsilon_p(\tilde{S})$ は 1 に等しい. それ故に S と $\tilde{S}$ は $\mathbb{Q}$ 上同値となる. ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 &= \left\{ a_1, a_2, a_3, \overbrace{Na_4, \dots, Na_{\frac{m-2}{2}+4}}^{\frac{m-2}{2}}, a_{\frac{m-2}{2}+5}, \dots, a_m \right\} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \dots, \tilde{a}_m\}, \\ \tilde{A} &= ((\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)) \end{aligned}$$

と置くと,

$$\tilde{A} = {}^t X S X, \quad \text{ただし} \quad X = \text{diag} \left(1, 1, 1, \overbrace{N, \dots, N}^{\frac{m-2}{2}}, 1, \dots, 1 \right).$$

このとき, $\tilde{A}$ は偶でレベルは N かつ $\det \tilde{A} = N^{m-2}$ となり, S は全ての p で $\mathbb{Q}_p$ 上 hyperbolic になる. 故に $\tilde{A}$ も $\mathbb{Q}_p$ 上 hyperbolic になり, さらに $\tilde{A}$ は次の様に分解する;

$$\tilde{A} = {}^t M_\wp \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & & & 0 \\ & \tilde{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{A}_{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} M_\wp, \quad M_\wp \in GL_m(\mathfrak{o}_\wp) \text{ かつ } \tilde{A}_i \in M_2(\mathfrak{o}_\wp) (1 \leq i \leq m/2).$$

さらに $\tilde{A}_i (1 \leq i \leq m)$ を詳しく分析することで, F の全ての素イデアル $\wp$ に対して $\widetilde{M}_\wp \in GL_m(\mathfrak{o}_\wp)$ を適切にとって

$$\tilde{A} = {}^t \widetilde{M}_\wp \begin{pmatrix} Nf_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & Nf_1 & \\ 0 & & & f_1 \end{pmatrix} \widetilde{M}_\wp$$

と出来る.

[26] と同じ議論を行うことで次の結果が分かる.

補題 4.5. Q は上記命題と同じ行列とする. $(n, d) = 1, t^2 - 4nd \neq 0$ を満たす $n, t, d \in \mathfrak{o}$ に対して,

$$\prod_{(\pi)} \alpha_\pi \left(Q, \begin{pmatrix} 2d & t \\ t & 2n \end{pmatrix} \right) = c_3 L^{(N)}(r, t^2 - 4nd).$$

ただし, c_3 は N と r のみに依存する定数である.

定理 2.1, 命題 4.2, 命題 4.4, 補題 4.5 より次の結果を得ることが出来る.

定理 4.6. $n \gg 0, d \gg 0$ をみたす $n, d \in \mathfrak{o}$ をとる. $k > m/2$ に対して

$$a_n(\vartheta_{g,d}(z)) = c_4 a_n \left(T(d) \tilde{\varphi}_r^{(N)}(z) \right).$$

ただし, c_4 は N と r のみに依存する 0 でない定数である.

この定理 4.6 より, 次の結果が導かれる;

定理 4.7. $m \equiv 0 \pmod{8}$ で k は $k > m/2$ かつ $k > 2$ をみたす偶数とする. このとき,

$$S_k^{\text{new}}((N)) \subset \Theta(m, k, N, N^2).$$

ここで, $\Theta(m, k, N, N^2) = S_k((N)) \cap \text{span}_{\mathbb{C}}\{\vartheta(lz, Q, P)\}_{l, Q, P}$ であり, $\text{span}_{\mathbb{C}}\{\vartheta(lz, Q, P)\}_{l, Q, P}$ は次の条件 (*) を満たす組 (l, Q, P) から定まる球関数付き Theta 関数 $\vartheta(lz, Q, P)$ 全体で生成される $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間である.

(*) Q は $\mathfrak{o}$ 上偶かつ総正でレベル M , $\det Q = M^2$ を満たし, l は $l \gg 0$ な $\mathfrak{o}$ の元で $lM|N$ を満たす. また P は Q に付随する次数 $k - m/2$ の球関数である.

参考文献

- [1] D. Blasius, Hilbert modular forms and the Ramanujan conjecture, *preprint*, math,NT/0511007v1, 1 November (2005).
- [2] M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **63**, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1974).
- [3] M. Eichler, Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, *J. reine angew. Math.*, **195** (1956), 156-171.
- [4] M. Eichler, The basis problem for modular forms and the traces of Hecke operators, Modular functions of one variable I, *Lecture notes Math.*, **320**, Springer-Verlag, Berlin and New York (1972), 75-152.
- [5] M. Eichler, On theta functions of real algebraic number fields, *Acta Arith.*, **XXXIII** (1977), 269-292.
- [6] A. Erdelyi et al, Higher Transcendental Functions, vol. I, McGraw-Hill, New York - Toronto - London (1953)
- [7] G. Fractman, On the product formula for quadratic forms, Ph. D. thesis, *Princeton University* (1991).
- [8] H. Hijikata, A. Pizer and T. Shemanske, The basis problem for modular forms on $\Gamma_0(N)$, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **82**, no. 418 (1989).
- [9] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, *Lecture notes Math.*, **114**, Springer-Verlag, Berlin and New York (1970).
- [10] S. Lang, Introduction to Modular Forms, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **222**, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1976).
- [11] W. Li, New forms and functional equation, *Math. Ann.*, **212** (1975), 285-315.
- [12] K. Martin, The basis problem revisited, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, **373** (2020), 4523-4559.
- [13] O. T. O'Meara, Introduction to Quadratic Forms, *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1973).
- [14] T. Miyake, On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators, *Ann. of Math.*, **94** (1971), 174-189.

- [15] T. Miyake, Modular Forms, *Springer Monographs in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1989).
- [16] S. Mizumoto, On the second L -functions attached to Hilbert modular forms, *Math. Ann.*, **269** (1984), 191-216.
- [17] S. Moriguchi et al., Mathematics Formula III - Special functions (in Japanese), Iwanami Shoten, Publishers (1996).
- [18] A. Ogg, Modular Forms and Dirichlet Series, *Mathematics lecture note series*, W. A. Benjamin, Inc., New York (1969).
- [19] J. P. Serre, Cours d'arithmétique, *Collection Le Mathématicien*, **2**, Presses universitaires de France, Paris (1970).
- [20] C. L. Siegel, Gesammelte Abhandlungen I, *Springer Collected Works in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1966).
- [21] H. Shimizu, Theta series and automorphic forms on $GL(2)$, *J. Math. Soc. Japan*, **24** (1972), 638-683.
- [22] H. Shimizu, Automorphic functions (in Japanese), *Iwanami on-demand books*, Iwanami Shoten, Publishers (2017).
- [23] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, *Duke Math. J.*, **45** (1978), 637-679.
- [24] G. Shimura, On the transformation formulas of theta series, *Amer. J. Math.*, **115** (1993), 1011-1052.
- [25] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **23** (1976), 393-417.
- [26] J-L. Waldspurger, Engendrement par des séries thêta de certains espaces de formes modulaires, *Invent. math.*, **50** (1979), 135-168.
- [27] D. Zagier, Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta functions of quadratic fields, Modular functions of one variable VI, *Lecture notes Math.*, **627**, Springer-Verlag, Berlin and New York (1976), 105-169.

Department of Mathematics, Graduate school of Science and Engineering,
 Saitama University
 255 Shimo-Okubo, Sakura-ku, Saitama City, 338-8570
 JAPAN
 E-mail: hkojima@rimath.saitama-u.ac.jp