

楢田保型関数 λ の無限積表示

9 州大 6 本松 数理 吉田正章 (Masaaki YOSHIDA)
Department of Mathematics Kyushu University

January 1, 2003

1 ご挨拶

この研究集会では皆さん次々と難しいことをお話になって、私はさっぱり付いて行けません。私は勉強が嫌いというか、本や論文を読んでも人の話を聞いてもよく分からないので、以下のように学部学生の知識だけで出来る数学をやってます、済みません。

先ず表題にあります楢田保型関数 λ の定義をします。この講演の前の、志賀弘典さんの講演では theta 関数の比の 4 乗として現れましたが、別の言い方をすると、上半平面

$$H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{虚}(\tau) > 0\}$$

で正則で、そこに働く楢田芋蔓群

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \text{奇} & \text{偶} \\ \text{偶} & \text{奇} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \right\} / \{\pm 1\}$$

で不変で、同型

$$H/\Gamma(2) \longrightarrow \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \quad 0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto 1$$

を与える関数を λ (岡本和夫氏考案の当て字では「乱舞だ」と言います。関数論的に、 H 内の 2 半直線 $\text{実}(\tau) = 0, 1$ と半円 $|\tau - 1/2| = 1/2$ で囲まれる三角形を上半平面に等角に写し、 $0 \mapsto 0, 1 \mapsto \infty, \infty \mapsto 1$ となるものとしてもいいですが、存在と一意性を「理満の写像定理」という難しい(構成的でない)定理に負っているという欠点があります。

上に出てきた 2 直線と円に関する反転

$$\bar{\gamma}_1: \tau \mapsto -\bar{\tau}, \quad \bar{\gamma}_2: \tau \mapsto 2 - \bar{\tau}, \quad \bar{\gamma}_3: \tau \mapsto \frac{\bar{\tau}}{2\bar{\tau} - 1}$$

で生成される群を $\bar{\Gamma}$ とし、

$$\gamma_1: \tau \mapsto -\tau, \quad \gamma_2: \tau \mapsto 2 - \tau, \quad \gamma_3: \tau \mapsto \frac{\tau}{2\tau - 1}$$

で生成される群を $\Gamma(\subset PGL_2(\mathbb{Z}))$ とします。 $\Gamma, \bar{\Gamma}$ 共に、生成元の偶数個の文字列による単語の全体のなす指数 2 の部分群は $\Gamma(2)$ です。 Γ の生成元には位数が 2 以外の関係はないので、元の「長さ」や元と元との間の「距離」が自然に定義されます($\bar{\Gamma}$ に関しても全く同じ)。以下の定理の報告がこの講演の目的であります。

定理 楕円保型関数乱舞だ λ は以下の無限積表示を有する：

$$\lambda(\tau) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{\tau - \gamma(0)}{\tau - \gamma(1)},$$

ここで右辺の無限積は Γ の元の長さの短い方から掛ける、もう少し正確に言うと、 $g \in \Gamma$ に対して有限集合

$$\Gamma(g, n) = \{\gamma \in \Gamma \mid \text{距離}(g, \gamma) \leq n\}$$

上の有限積を

$$\lambda_{(g,n)}(\tau) = \prod_{\gamma \in \Gamma(g,n)} \frac{\tau - \gamma(0)}{\tau - \gamma(1)}$$

とすると、 $g \in \Gamma$ の如何に関わらず、 τ が H の有界閉集合内に留まっておれば、 τ に関して一様に

$$\lambda(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{(g,n)}(\tau)$$

となるというものである。

注 1 この無限積は絶対収束はしません。

注 2 こんな簡単な等式が今まで知られていなかったというのも不思議な気がします。100年前から知られていたと言うような情報があれば御一報下さい。

この講演では (1) 何故こんな式が出てきたかの由来と (2) どういうからくりで (条件) 収束するのかを簡単に述べます。

2 何故こんな式が出てきたかの由来

微分方程式の業界ではなかなか認めてくれませんが、私は自分では微分方程式をやっているつもりです。そこで、非自明で最も簡単な超幾何微分方程式 $E(a, b, c)$

$$x(1-x)u'' + \{c - (a+b+1)x\}u' - abu = 0$$

を考えます。こんな易しい方程式を相手にしているから評判が悪いのかなあ。ともかくこの狐型微分方程式を P -関数表示しますと

$$P \begin{Bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{Bmatrix}$$

となりますが、今

$$1-c = i\theta_0, \quad c-a-b = i\theta_1, \quad a-b = i\theta_2, \quad \theta_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

と指数 (の差) を純虚数にします。何故そんなことをするのか、そうですね、20 世紀を通じて、指数を有理数にして、超幾何微分方程式を代数多様体の族の周期と解釈し、その一般化の研究というものが多かった訳ですが、私は一寸変わったことをやりたいと思っただけです。(超幾何微分方程式を保持構造の変形を記述する我曰

魔人系等と現代的に捉えるのはこの方程式の一面しか見てない訳です。) このようなものが、何らかの数学的対象の族の「周期」みたいなものを表しているという解釈が出来るのを期待してます。位相数学の専門家と十分沢山お酒を飲んで、この話をすると思って「これは臀捻り (Dehn twist) だ」という結論に至るのですが、素面になってみるとどうもよく分かりません。

何しろこの場合、 u_1, u_2 を上半 x -平面での方程式の線形独立解としますと、黒写像 $s: x \mapsto u_1(x)/u_2(x)$ での 3 区間 $(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$ の像は 3 つの円になります。このことは未知関数 u に x や $1-x$ の冪を掛けて方程式を少し変形すると

$$u'' + p(x)u = 0,$$

$$4p(x) := \frac{1 - (i\theta_0)^2}{x^2} + \frac{1 - (i\theta_1)^2}{(1-x)^2} + \frac{1 + (i\theta_2)^2 - (i\theta_0)^2 - (i\theta_1)^2}{x(1-x)}$$

となります。ここで純虚数は 2 乗すると実数になるということを思い出すと、上の微分方程式は実係数であることが分かります。ですから、特異点を含まない区間で線形独立な 2 つの実数値関数が存在します。一次分数変換で円は円に移ることを使えば上記 3 区間の像が 3 つの円になることが分かります。

一方、球面内の不交 3 円には 2 態あり、一方は矢的の様であり、他方は豚の鼻の様であります。我々の場合は豚鼻様であることも分かります。一次分数変換でそれらの 3 円はすべて中心が実軸に持ってくる事が出来ますからそうしておきます。それらの円を C_1, C_2, C_3 として、それらに関する鏡映を $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3$ として二つの群

$$\bar{\Gamma}_\theta = \langle \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3 \rangle, \quad \Gamma_\theta = \langle \delta_1, \delta_2, \delta_3 \rangle \subset PGL_2(\mathbf{R})$$

を定義します。

注 3 微分方程式 $E(a, b, c)$ の測多価群は上記生成元の偶数個の文字列よりなる単語全体のなす Γ_θ の指数 2 の部分群 Λ_θ であります。 $\bar{\Gamma}_\theta$ でも全く同じです。

注 4 黒写像による上半 x -平面の像が豚の鼻の穴の周りの 2-連結な領域になる訳ではありません；的平面全体を無限回覆います。

事実 (市川) Ω_θ を一寸来群 Λ_θ の不連続領域 ($C-(\mathbf{R}$ の関東集合)), $p, q \in \Omega_\theta, \Gamma_\theta \cdot p \neq \Gamma_\theta \cdot q$ とすると無限積

$$f_\theta(p, q, s) = \prod_{\gamma \in \Gamma_\theta} \frac{s - \gamma(p)}{s - \gamma(q)}$$

は s が Ω_θ の有界閉集合内に留まっておれば、 s に関して一様に絶対収束して、 Γ_θ で不変な Ω_θ で正則な関数を定義し、同型

$$f_\theta(p, q) : \Omega_\theta / \Gamma_\theta \longrightarrow \mathbf{P}^1, \quad p \mapsto 0, q \mapsto \infty, \infty \mapsto 1$$

を与える。

注 5 $\Omega_\theta / \Lambda_\theta$ は実数体上定義された種数 2 の曲線である。 θ を動かせば、そのようなものの全てを網羅する。

こういう事実があれば、つい悪戯心で $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$ としてみたくなるでしょう。すると3円は互いに接吻しまして、 Ω_θ は上下に分かれまして

$$\bar{\delta}_j \rightarrow \bar{\gamma}_j, \quad \delta_j \rightarrow \gamma_j, \quad \Gamma_\theta \rightarrow \Gamma, \quad \Lambda_\theta \rightarrow \Gamma(2)$$

となります。しかし、上の無限積が極限でも意味がある保証は何もありません。例えば絶対収束する無限和

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad |x| < 1$$

に於いて、 $x \rightarrow -1$ とすれば左辺は大人しく何の問題もなく $1/2$ に収束しますが、右辺はどう並べ替えても収束しません。我々の場合も（序に $p \rightarrow 0, q \rightarrow 1$ にすれば）左辺は乱舞だ関数に収束します。実は市川さんに、右辺は収束しないだろうと言われて、意地で無理にでも右辺を収束させてやろうとこの一年半程努力したのでした。ええっ？ この無限積にどういう意味があるかですか？ 応用ですか？ さあ考えていません。

3 収束のからくり

群 $\bar{\Gamma}$ は $HUQU\{\infty\}$ に鏡映群として働いていて、 $\bar{\Gamma}$ の各元は猥流部屋 (Weyl chambers) と対応しています。無限積の各項を

$$\frac{\tau - \gamma(0)}{\tau - \gamma(1)} = 1 + \frac{\gamma(1) - \gamma(0)}{\tau - \gamma(1)}$$

と変形しておいて、無限和

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\gamma(1) - \gamma(0)}{\tau - \gamma(1)} \quad \text{及び} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \left| \frac{\gamma(1) - \gamma(0)}{\tau - \gamma(1)} \right|^2$$

の収束を問題にします（この二つが収束すれば無限積も収束することは高木「解析概論」に書いてあります）。区間 $[0, 1]$ の上にある猥流部屋に対応する元 γ での和を先ず考えます。何故なら、 $|\gamma(1) - \gamma(0)| < 1$ ですから $\gamma(1)$ が遠くに行く時は、有名な枯淡等式

$$\frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) = \pi \cotan \pi x$$

の右辺が収束する理屈で、 $\gamma(1)$ が右に行くのと左に行くのと一方に偏らないように足してゆけばよいでしょうから。

区間 $[0, 1]$ の上にある猥流部屋を子細に検討しましょう。

- Γ の単位元（長さ零の元）は、直径1の円 $C(0, 1)$ とそれに接する垂直な2つの壁で仕切られた帯状領域 $\nabla(0, 1)$ に対応します。

- 長さ1の元は円 $C(0, 1)$ とそれと肌を接する2つの直径 $\frac{1}{2}$ の円 $C(1, 1)$ と $C(1, 2)$ で仕切られた円弧三角形 $\nabla(1, 1)$ に対応します。

- 長さ1の2元は、円 $C(1, 1)$ 及び直径が $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ なる円 $C(2, 1), C(2, 2)$ で仕切られた円弧三角形 $\nabla(2, 1)$ と、円 $C(1, 2)$ 及び直径が $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ なる円 $C(2, 3), C(2, 4)$ で仕切られた円弧三角形 $\nabla(2, 2)$ に対応します。

- 長さ n の 2^{n-1} 元は、円弧三角形

$$\nabla(n, j), \quad 1 \leq j \leq 2^{n-1}$$

で互いに肌を接した 3 円

$$C(n-1, j), \quad C(n, 2j-1), \quad C(n, 2j)$$

で仕切られています。

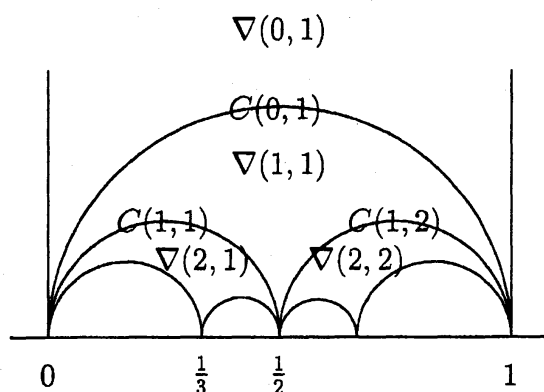


図 1: 円 $C(n, j)$ と猿流部屋 $\nabla(n, j)$

区間 $[0, 1]$ の上にある猿流部屋に対応する元 γ について上記和を考えるなら、 τ が H の有界閉集合に留まっていると思えば、本質的に和

$$\sum (\gamma(1) - \gamma(0)) \quad \text{及び} \quad \sum |\gamma(1) - \gamma(0)|^2$$

の収束が問題になります。そのためには円 $C(n, j)$ の直径が分からなくてはなりません。これは閉じた形では書けませんが以下のように帰納的に計算出来ます。そのために先ず整数列

$$w(n, j), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad j = 1, 2, \dots, 2^n$$

を帰納的に

$$w(0, 0) = 1, \quad w(1, 0) = 1, \quad w(1, 1) = 2, \quad w(1, 2) = 1,$$

$$w(n, j) = \begin{cases} w\left(n-1, \frac{j}{2}\right) & j \text{ が偶数のとき,} \\ w\left(n-1, \frac{j-1}{2}\right) + w\left(n-1, \frac{j+1}{2}\right) & j \text{ が奇数の時} \end{cases}$$

と定義します。これ、なかなか面白いものです。ひょっとしたら私が初めて見つけたのかな、まさかね、でもそうだとうれしいな、と思いながら金子昌信さんに聞きましたら、電子的情報提供網で「整数列」というところに入って初めの数項を打ち込んだら直ちにこれは星の双原子数列 (Stern's diatomic series) として知られている

ものであり、この数列の関して私が見つけた公式は全て既知でした、はい。それはともかく、

円 $C(n, j)$ の直径を $d(n, j)$ とすると

$$d(n, j) = \frac{1}{w(n, j-1)w(n, j)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad j = 1, 2, \dots, 2^n$$

と言う具合に分かる訳です。

和 $\sum(\gamma(1) - \gamma(0))$ は $d(n, j)$ に適宜符号 $\{0, 1, -1\}$ を付けて足せばいいのですが、ちょっと收拾が付きません。和 $\sum |\gamma(1) - \gamma(0)|^2$ もどうしていいのか見当が付きません。そこで、長さ n の γ について、量 $\gamma(1) - \gamma(0)$ を 2 図の様に縦軸に n をとって書いてゆきます。矢印は正負を表します。

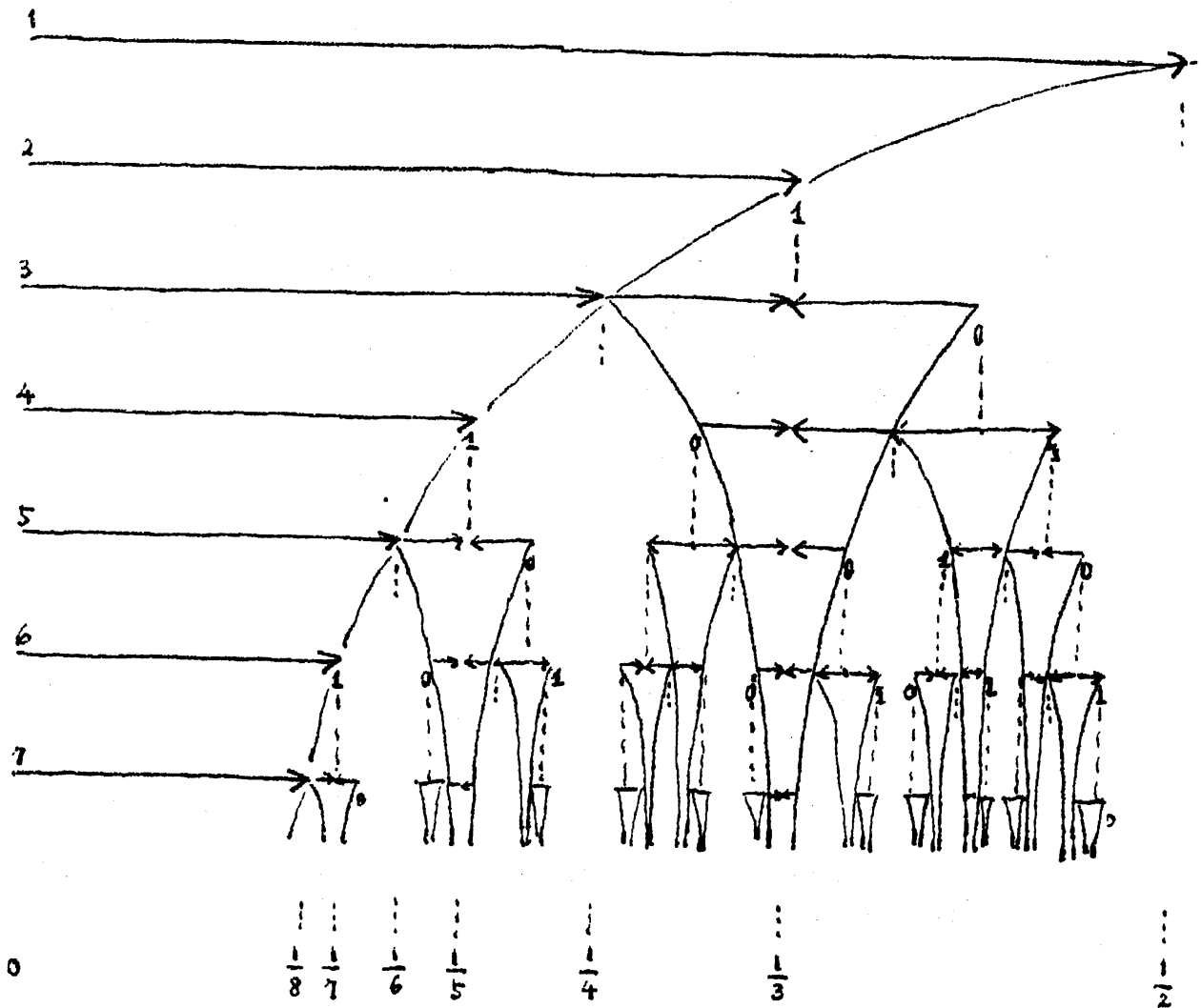


図2: $\gamma(1) - \gamma(0)$ を γ の長さ別に有向線分表示したもの
(多数の襷を洗濯して乾した様に見える)

そうすると、禪みたいなものがぶらぶらと沢山ぶら下がっているのが見えるでしょう、それらは中心から左右に互いに逆向きの矢印が付いているでしょう。因みにこれらの禪の中心は丁度

$$\frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, p: \text{奇数}$$

なる有理数と一致します。各禪では、対応する γ で和 $\sum(\gamma(1) - \gamma(0))$ を作りますと、正負で互いに打ち消し合いながら、和は閉じた形で（枯淡等式）表されます。各禪では、和 $\sum |\gamma(1) - \gamma(0)|^2$ も閉じた形で（枯淡等式の微分）表されます。

それらを、全ての禪で足し合わせるのですが、それは絶対収束します。そこで使われるのが次の変換 $\mathcal{H}$ です。区間 $[0, 1]$ で有界な関数 f に

$$(\mathcal{H}f)(x) = \sum_{t \geq 1} \left(\frac{1}{(2t-x)^2} f\left(\frac{1}{2t-x}\right) + \frac{1}{(2t+x)^2} f\left(\frac{1}{2t+x}\right) \right)$$

を対応させます。鍵は

$$f(x) + (\mathcal{H}f)(x) + (\mathcal{H}^2 f)(x) + \dots$$

が区間 $[0, 1/2]$ で収束することの証明でした。詳しい計算（効くのは $\zeta(2)/2 < 1$ という事実なのです）は勿論書きませんが、まあこのような具合です。

あとは、定理に述べた掛ける順序と、区間 $[n, n+1]$ でそこの中の各禪で今述べたように足してそれから n を $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ とやっていく順序が本質的に変わらないことを言って、そのことから、無限積で定義された関数が $\Gamma(2)$ 不変であることを見て、それから、尖点での振舞を調べて、遂に問題の無限積は乱舞だ関数だと分かるという仕組みであります。

余談：上の変換は本質的に

$$f \rightarrow \sum_{t \geq 1} \frac{1}{(t+x)^2} f\left(\frac{1}{t+x}\right)$$

と同じですから、私はこれを「調和積分」と名前を付けまして、その重要性を誰彼となく吹聴して回っていました。（積分する時に区間を等分するのは高校流、等比数列を使って細分するは弱損流、上みたいに調和数列を使って細分するのが一番高級なやりかたで調和流である。）昨年（2002年）の秋に詐欺屋鈍（Zagier Don 本人お気に入りの当て字、私は咲枝を好む）に会って、同じように自慢したら、彼は全く同じ式が書いてある彼の前刷か論文かを持ってきて、私に見せたので、その瞬間に私はこの変換に興味を失ってしまいました。この変換の重要性が失われた訳ではありません。

文献

市川・吉田：純虚指数超幾何関数より生ずる一寸来群について、米数学会会報 (2003).
佐々木・吉田：純虚指数超幾何関数の幾何的研究, 実験数学 10(2001), 321-330.