

On groups generated by an involution and an element of order 3

北大 大学院 水谷 一

次の関係式を満たす二つの元 x, y で生成される群を決定したい。

$$x^2 = y^3 = (xy)^7 = f(x, y) = 1$$

ここで $f(x, y)$ は x と y からなるある文字列とする。

$xy = s, xy^2 = t$ とおくと、共役元をとることに伴い、 $f(x, y) = 1$ は $s^{i_1} t^{j_1} \dots s^{i_n} t^{j_n} = 1$ なる形としてよい。また、
 $s t^3 s = t s^2 t, t s^3 t = s t^2 s$ に注意すれば、 i_k, j_k は 1 または 2 としてよい。いま $l(s^{i_1} t^{j_1} \dots s^{i_n} t^{j_n}) = \sum i_k + \sum j_k$ とおく。

Proposition 1. Suppose $l(f(x, y)) \leq 16$, then the group $G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^7 = f(x, y) = 1 \rangle$ is determined as follows.

- i) $f(x, y) = (st)^4 \Rightarrow G \cong PSL(2, 7)$
- ii) $f(x, y) = (st)^6 \Rightarrow G \cong PSL(2, 13)$
- iii) $f(x, y) = (s^2 t^2)^3 \Rightarrow G \cong PSL(2, 7)$

$$\text{iv) } f(x, y) = (st)^7 \Rightarrow G \cong \text{PSL}(2, 13)$$

$$\begin{aligned} \text{v) } f(x, y) &= s^2 t s^2 t s^2 t s^2 t s^2 t \\ &= (s^2 t s^2 t^2)^2 \Rightarrow G \cong \text{PSL}(2, 8) \end{aligned}$$

$$\text{vi) } f(x, y) = (s^2 t s t)^3 \Rightarrow G \cong \text{PSL}(2, 13)$$

$$\begin{aligned} \text{vii) } f(x, y) &= (st)^8 \Rightarrow G \supset N, N \cong (\mathbb{Z}_2)^6 \\ G/N &\cong \text{PSL}(2, 7) \end{aligned}$$

viii) In other cases $f(x, y)$ is reduced to one of the above 7 cases or $G = 1$.

証明の方針. $l(f(x, y))$ の小さい順に $f(x, y)$ をとる.

例 1. $l(f(x, y)) \leq 7$ とする $f(x, y)$ は次のいずれかとしてよい.

$$\begin{aligned} \text{i. } & s, t, st, s^2 t, (st)^2, s^2 t^2, s^2 t s t, (st)^3, \\ & s^2 t^2 s t, (s^2 t)^2, s^2 t (st)^2, s^2 t^2 s^2 t. \end{aligned}$$

これらのどの場合も $G = 1$ となることは、簡単な計算により確かめられる.

例 2. $f(x, y) = (s^2 t^2 s t)^2 \Rightarrow G = 1$ の証明

$$s^2 t (t s)^2 s t^2 s t = 1 \text{ より } (t s)^2 = (s t^2 s t s^2 t)^{-1}$$

$$(st)^5 = s t s (t s)^2 t s t$$

$$= s t s (t^{-1} s^2 t^{-1} s^{-1} t^{-2} s^{-1}) t s t$$

$$= s t^4 s t s^4 t = (t s)^3$$

$$\therefore \exists z = (st)^5 = (ts)^3 \text{ と } z \neq 1. \quad C_G(z) \ni st, ts.$$

容易にわかるように $G = \langle st, ts \rangle$ である $z \in Z(G)$.

ところが $G/Z(G) = 1$ であることは 例1. $(st)^3$ の場合
よりわかる. $G' = G$ より $G = 1$.

このように, 各々の場合について調べよう.

次に, i) ~ vii) の同型対応を示す.

$$i) \quad x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{成分は GF}(7)\text{ の元}$$

$$ii) \quad x \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{成分は GF}(13)\text{ の元}$$

iii) i) と同じ.

$$iv) \quad x \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{成分は GF}(13)\text{ の元}$$

$$v) \quad x \rightarrow \begin{pmatrix} r^2 & 1 \\ 1+r+r^2 & r^2 \end{pmatrix}, \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} 1+r & 1+r^2 \\ 1+r^2 & r \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} r \in \text{GF}(8) \\ r^3 + r + 1 = 0 \end{array}$$

$$vi) \quad x \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{成分は GF}(13)\text{ の元.}$$

vii) 置換表示する.

$$x \rightarrow (1)(8)(2,3)(9,10)(4,7)(11,14)(5,12)(6,13) \\ (1')(8')(2',3')(9',10')(4',7')(11',14')(5',12')(6',13')$$

$$y \rightarrow (1,3,7)(8,10,14)(2)(9)(6,4,12)(13,11,5) \\ (1',7',3')(8',14',10')(2')(9')(4',6',12')(13',5',11')$$

Proposition 2. $G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^7 = (st)^9 = 1 \rangle$ is
an infinite group.

Proof.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と置く。この3は関係式を満たし、

$$(s^2 t^2 s^2 t)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & 0 \\ 0 & & & 1 & & & \\ 0 & & & & 1 & & \\ 0 & & 0 & & & 1 & \\ 0 & & 0 & & & & 1 \\ 0 & & 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

は無限位数である。