

フォン・ノイマン環の連続接合積

(Co-作用と Roberts の作用)

九大・理 中神祥臣

序論. 此こでは, 竹崎正道氏と準備中の仕事の一部を紹介する.

フォン・ノイマン環の連続接合積の研究は「フォン・ノイマン環 M 上に可換な局所コンパクト群 G が作用 α を通して働いているとき, その接合積 $(M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ を作ると, これが $M \otimes L(L^2(G))$ と同型になる」という竹崎の双対定理に端を発している. 初めに問題に成ったのは, G が非可換な場合にこの命題がどう成るか, ということであつたが, その背景には Haag, Doplicher, Roberts がこれに先立ち発展させていた代数的場の理論に現われるゲージ理論が在った, [2, 3]. 非可換な G の双対としては, フーリエ環 $A(G)$ とか十分沢山のユニタリー表現の自己共役表現環 $\mathcal{K}$ があり, それに応じて, それぞれのフォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ 上への作用 δ と ρ が考えられる. こゝでは, δ を Co-作用, ρ を Roberts の作用という. ちなみに, δ はホップ・フォン・ノイ

マン環での Co-積との類似から考え出されたものであり, p はゲージ理論の中から発見されたものである. これらを使って二種の接合積 $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}} G$ と $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}$ を定義し, それらの上に自然な双対作用を与え, 見掛け上同一視し難いこの二つの共変系が, 実は同値に成ることを示すのがここでの目的である.

全体は $\mathfrak{A}$ 1部と $\mathfrak{A}$ 2部に分け, $\mathfrak{A}$ 1部では Co-作用に関する結果を用意し, $\mathfrak{A}$ 2部では Roberts $\times$ 作用に関するものを準備して, 最後に両者の関係を付ける.

$\mathfrak{A}$ 1部 フーリエ環による接合積

§ 1. 正則表環とフーリエ環

$\{G, dt, \Delta\}$ をそれぞれ局所コンパクト群, 右不変ハール測度, モジュラー関数とする. 右と左の正則表現

$$(p(s)\xi)(t) = \xi(ts), \quad (\lambda(s)\xi)(t) = \Delta(s)^{1/2} \xi(st)$$

により導かれる $L^2(G)$ (または $L(L^2(G))$) 上の作用^(*) を

(*) G からフォン・ノイマン環 $\mathcal{M}$ 上の自己同型写像群 α 中の準同型写像 α で $t \in G \mapsto \langle \alpha_t(x), y \rangle$, $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}_*$ が連続なものを G の $\mathcal{M}$ 上への作用という.

$$\rho_t(x) = \rho(t) \times \rho(t)^*, \quad \lambda_t(x) = \lambda(t) \times \lambda(t)^*$$

とする. $(\rho(x))(t) = \rho_t(x)$ と置けば, $\rho(x)$ は $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G) = L^\infty(L^\infty(G), G)$ の元と見做すことができる. したがって, ρ は $L^\infty(G)$ から $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$ の中への同型写像になる. さらに, $(\rho(f))(s, t) = f(st)$ であるから, $\rho_s \rho_t = \rho_{st}$ は

$$(1.1) \quad (\rho \otimes 1) \circ \rho = (1 \otimes \rho) \circ \rho$$

と表わせる. 同じように, $(\lambda(f))(s, t) = f(t+s)$ だから,

$$(1.2) \quad (\lambda \otimes 1) \circ \lambda = (1 \otimes \alpha'_G) \circ \lambda$$

となる. ただし, $(\alpha'_G f)(s, t) = f(ts)$.

次に, $\rho(G)$ と $\lambda(G)$ から生成されるフォン・ノイマン環をそれぞれ $\mathcal{R}(G)$, $\mathcal{R}'(G)$ と書き,

$$A(G) = \{g^\# * f : f, g \in L^2(G)\}, \quad g^\#(t) = \overline{g(t^{-1})}$$

とおく. この $A(G)$ はフーリエ環と呼ばれ, 対応:

$$\omega_{f, g} \in \mathcal{R}(G)_* \longleftrightarrow g^\# * f \in A(G) \quad (f, g \in L^2(G))$$

により $\mathcal{R}(G)_*$ と同一視される. 良く知られているように,

$A(G)$ は積 $(\varphi\psi)(t) = \varphi(t)\psi(t)$ と $\mathcal{R}(G)_*$ のノルムにより, 半単純で正則な対合バナッハ環に成る. とりわけ, 次の交換関係の定理や双対定理を通して, $A(G)$ が G の双対の一つであることが推測される.

定理 1.1 (von Neumann-Mackey) u を G のヒルベルト

空間 $\mathcal{H}$ 上へのユニタリ-表現, π を $L^\infty(G)$ または $A(G)$ の $\mathcal{H}$ 上への $*$ 表現とする. もし

$$u(t)\pi(f) = \pi(p_t(f))u(t), \quad t \in G, \quad f \in L^\infty(G)$$

ならば, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と全射等距離^{線形}写像 $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, L^2(G) \otimes \mathcal{H})$ が存在して

$$U u(t) U^{-1} = p(t) \otimes 1_{\mathcal{H}}, \quad t \in G$$

$$U \pi(f) U^{-1} = f \otimes 1_{\mathcal{H}}, \quad f \in L^\infty(G) \text{ または } A(G).$$

定理 1.2 (Steinspring - Eymard - 春藤, 辰馬) $\mathcal{R}(G)$ の元 $x \neq 0$ に対し次の 2 条件は同値である:

- (i) 或る $t \in G$ が存在して, $x = p(t)$.
- (ii) 任意な $\varphi, \psi \in A(G)$ に対して, $\langle x, \varphi\psi \rangle = \langle x, \varphi \rangle \langle x, \psi \rangle$.

さて, G が可換な場合には, $L^2(G)$ から $L^2(\hat{G})$ の上へのフーリエ変換子を通して

$$\mathcal{F} L^\infty(G) \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{R}(\hat{G}), \quad \mathcal{F} \mathcal{R}(G) \mathcal{F}^{-1} = L^\infty(\hat{G})$$

となる. $\hat{G}$ の正則表現により $L^\infty(\hat{G})$ 上へ導かれる作用 $\hat{\rho}$ は, 前と同様に, $L^\infty(\hat{G})$ から $L^\infty(\hat{G}) \otimes L^\infty(\hat{G})$ の中への同型写像になり, $(\hat{\rho} \otimes 1) \circ \hat{\rho} = (1 \otimes \hat{\rho}) \circ \hat{\rho}$ を満たしている. これをフーリエ変換を使って $L^2(\hat{G})$ から $L^2(G)$ の議論へ引き戻してみると次のように言い換えられる.

$$\delta_G = (\text{Ad}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}})^{-1} \cdot \hat{\rho} \cdot \text{Ad}_{\mathcal{F}}$$

は $\mathcal{R}(G)$ から $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$ の中への同型写像で

$$(1.3) \quad (\delta_G \otimes 1) \cdot \delta_G = (1 \otimes \delta_G) \cdot \delta_G$$

をみたしている。ここで、 δ_G は $\delta_G(\rho(t)) = \rho(t) \otimes \rho(t)$ をみたしている。したがって、このような δ_G は、 $\hat{G}$ の作用の古い換えである以上に、非可換な G に対しても、 G の双対の作用としての働きをするものと解釈することができる。

§2 作用と Co-作用

前節で与えた $L^0(G)$ 上の作用 ρ と $\mathcal{R}(G)$ 上の作用 δ_G の概念を一般のフォン・ノイマン環に拡張して以後の議論の準備とする。いま、 G の $\mathcal{M}$ 上への作用 α が与えられたとき

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(t) = \alpha_t(x)\xi(t), \quad \xi \in \mathcal{E} \otimes L^2(G)$$

とすれば、 π_α は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M} \otimes L^0(G)$ の中への同型写像であり、(1.1)式と同じように、

$$(\pi_\alpha \otimes 1) \cdot \pi_\alpha = (1 \otimes \alpha_G) \cdot \pi_\alpha, \quad (\alpha_G = \rho)$$

をみたしている。次の命題により逆も成り立つ。

命題 2.1. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M} \otimes L^0(G)$ の中への同型写像 π が

$$(2.1) \quad (\pi \otimes 1) \circ \pi = (1 \otimes \alpha_G) \circ \pi$$

をみたすなら, G の m 上への作用 α が存在して $\pi = \pi_\alpha$.

証明. 任意な $x \in m$ と $g \in L^1(G)$ に対し $\pi(x)g$ を

$$(2.2) \quad \langle \pi(x)g, \omega \rangle = \langle \pi(x), \omega \otimes g \rangle, \quad \omega \in m_*$$

で定義する. $f, g \in L^1(G)$ に対し

$$\begin{aligned} \langle \pi(\pi(x)g), \omega \otimes f \rangle &= \langle \pi(x)g, \pi_*(\omega \otimes f) \rangle \\ &= \langle \pi(x), \pi_*(\omega \otimes f) \otimes g \rangle = \langle (\pi \otimes 1)(\pi(x)), \omega \otimes f \otimes g \rangle \\ &= \langle (1 \otimes \alpha_G)(\pi(x)), \omega \otimes f \otimes g \rangle = \langle (1 \otimes p_g)(\pi(x)), \omega \otimes f \rangle, \end{aligned}$$

ただし, $p_g = \int g(t) p_t dt$. したがって

$$\pi(\pi(x)g) = (1 \otimes p_g)(\pi(x))$$

となる. 作用 p は連続だから, $g(t)dt$ を点 $s \in G$ のディラック測度へ収束させれば, 右辺は $(1 \otimes p_s)(\pi(x))$ へ収束し, 左辺の $\pi(x)g$ は m の或る元 $\pi(x)_s$ へ収束する. したがって, $(1 \otimes p_s)(\pi(x))$ は $\pi(m)$ の元である. ここで

$$\alpha_s = \pi^{-1} \circ (1 \otimes p_s) \circ \pi,$$

つまり, $\alpha_s(x) = \pi(x)_s$ とすれば, α は G の m 上への作用であり, $\alpha g(x) = \pi(x)g$ をみたす. したがって, (2.2) 式により, $\pi(x) = \pi_\alpha(x)$. 証了.

この命題により, 次の定義が意味を持つ.

定義 2.2 (作用と Co-作用) (a) M から $M \otimes L^\infty(G)$ の中への同型写像 α が (2.1) 式をみたすとき, α を G の M 上への 作用 という.

(b) N から $N \otimes \mathcal{K}(G)$ の中への同型写像 δ が

$$(2.2) \quad (\delta \otimes 1) \cdot \delta = (1 \otimes \delta_G) \cdot \delta$$

をみたすとき, δ を G の N 上への Co-作用 という.

例えば, (1.1) 式により $\alpha_G = \rho$ は G の $L^\infty(G)$ 上への作用であり, (1.3) 式により δ_G は G の $\mathcal{K}(G)$ の上への Co-作用である.

このような作用と Co-作用を, 左正則表現を用いて定義することができる. M から $M \otimes L^\infty(G)$ の中への同型写像 α' が $(\alpha' \otimes 1) \cdot \alpha' = (1 \otimes \alpha'_G) \cdot \alpha'$ をみたすとき, α' を $\mathcal{K}'(G)$ に関する G の M 上への作用といい, N から $N \otimes \mathcal{K}(G)$ の中への同型写像 δ' が $(\delta' \otimes 1) \cdot \delta' = (1 \otimes \delta'_G) \cdot \delta'$ をみたすとき, δ' を $\mathcal{K}'(G)$ に関する G の N 上への Co-作用という. ただし, δ'_G は $\mathcal{K}'(G)$ から $\mathcal{K}'(G) \otimes \mathcal{K}'(G)$ の中への同型写像で $\delta'_G(\lambda(t)) = \lambda(t) \otimes \lambda(t)$ をみたすものである.

次に, 作用と Co-作用を用いてそれぞれの接合後を与える.

定義 2.3 (接合積) (a) $\alpha(M)$ と $\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}(G)$ が生成する $\mathcal{H} \otimes L^2(G)$ 上のフォン・ノイマン環 $M \rtimes_\alpha G$ を M と G の α に関する 接合積 という.

(b) $\delta(N)$ と $\mathbb{C} \otimes L^\infty(G)$ が生成する $\mathcal{H} \otimes L^2(G)$ 上のフォン・ノイマン環 $N \rtimes_\delta G$ を N と G の δ に関する 接合積 という.

接合積上で双対作用や双対 $\mathbb{C}^*$ -作用を考えるとき重要になる $L^2(G) \otimes L^2(G)$ 及び $L^2(G)$ 上のユニタリー作用素を挙げておこう.

$$(W_G \xi)(s, t) = \xi(s, ts), \quad (W'_G \xi)(s, t) = \Delta(s)^{1/2} \xi(s, s^{-1}t)$$

$$(V_G \xi)(s, t) = \xi(st, t), \quad (V'_G \xi)(s, t) = \Delta(t)^{1/2} \xi(t^{-1}s, t)$$

$$(J\xi)(t) = \Delta(t)^{1/2} \xi(t^{-1}).$$

これらの定義から直ちにわかることは

$$W_G^*(f(t) \otimes 1) W_G = \rho(f) \otimes \rho(t), \quad W'_G(1 \otimes J) = (1 \otimes J) W'_G,$$

$$V_G(f \otimes 1) V_G^* = \rho(f), \quad V'_G(f \otimes 1) V'_G{}^* = \lambda(f).$$

などがある.

命題 2.4 (双対) (a) 各 $y \in M \rtimes_\alpha G$ に対し

$$\hat{\alpha}(y) = (1 \otimes W_G^*)(y \otimes 1)(1 \otimes W_G) = \text{Ad}_{1 \otimes W_G}(y \otimes 1)$$

とすれば, $\hat{\alpha}$ は G の $M \rtimes_\alpha G$ 上への $\mathbb{C}^*$ -作用になる. これを

α の 双対 としよう.

(b) 各 $x \in \mathcal{N}_{x_f} G$ に対し

$$\hat{\delta}(x) = (1 \otimes V'_G)(x \otimes 1)(1 \otimes V_G'^*) = \text{Ad}_{1 \otimes V'_G}(x \otimes 1)$$

とすれば, $\hat{\delta}$ は G の $\mathcal{N}_{x_f} G$ 上への作用となる. これと δ の 双対 としよう.

証明. (a) $\mathcal{M}_{x_f} G$ の生成元 $\alpha(x)$ と $1 \otimes p(r)$ に対し

$$(2.3) \quad \hat{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(x) \otimes 1$$

$$(2.4) \quad \hat{\alpha}(1 \otimes p(r)) = 1 \otimes p(r) \otimes p(r).$$

したがって, $\hat{\alpha}$ は $\mathcal{M}_{x_f} G$ から $(\mathcal{M}_{x_f} G) \otimes \mathcal{R}(G)$ の中への同型写像である. 更に生成元の上で

$$(\hat{\alpha} \otimes 1) \cdot \hat{\alpha} = (1 \otimes \alpha_G) \cdot \hat{\alpha}$$

が確かめられるので, $\hat{\alpha}$ は G の $\mathcal{M}_{x_f} G$ 上への Co-作用である.

(b) 上と同様に $\mathcal{N}_{x_f} G$ の生成元 $\delta(y)$ と $1 \otimes f$ に対し

$$(2.5) \quad \hat{\delta}(\delta(y)) = \delta(y) \otimes 1$$

$$(2.6) \quad \hat{\delta}(1 \otimes f) = 1 \otimes \lambda(f).$$

したがって, $\hat{\delta}$ は生成元上で $(\hat{\delta} \otimes 1) \cdot \hat{\delta} = (1 \otimes \delta_G) \cdot \hat{\delta}$ をみたすので, $\hat{\delta}$ は G の $\mathcal{N}_{x_f} G$ 上への作用である. 証了.

この他にも有用な作用や Co-作用の例が知られている, [6].

§3 竹崎の双対定理

この節では後で必要となる竹崎の双対定理を紹介する。この定理は連続接合積を研究する際の出発点であった。

定理 3.1 (双対定理) (a) α を G の m 上への作用, σ を $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ なる同型写像とすれば,

$$(3.1) \quad \tilde{\alpha} = \text{Ad}_{1 \otimes V_G'} \circ (\iota \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \iota)$$

は G の $m \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$ 上への作用になり, $\tilde{\alpha}_t = \alpha_t \otimes \lambda_t$ かつ

$$(3.2) \quad \{(m \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G, \hat{\tilde{\alpha}}\} \cong \{m \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G)), \tilde{\alpha}\}.$$

(b) δ を G の n 上への Co -作用とすれば,

$$(3.3) \quad \tilde{\delta} = \text{Ad}_{1 \otimes W_G^*} \circ (\iota \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes \iota)$$

は G の $n \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$ 上への Co -作用になり

$$\{(n \rtimes_\delta G) \rtimes_{\tilde{\delta}} G, \hat{\tilde{\delta}}\} \cong \{n \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G)), \tilde{\delta}\}.$$

この定理の証明には次の補題が本質的である。

補題 3.2. (a) $m \bar{\otimes} L^\infty(G) = \alpha(m) \vee (\mathbb{C} \otimes L^\infty(G)).$

(b) $n \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G)) = \delta(n) \vee (\mathbb{C} \otimes \mathcal{L}(L^2(G))).$

証明. (a) m の表現空間を調節して, 作用 α は G の $\mathbb{I}$

ニタリ一表現 u により $\alpha(x) = u(x \otimes 1)u^*$ と表わされてゐるものと仮定できる. $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes L^\infty(G)$ だから

$$\begin{aligned}\alpha(m) \vee (\mathbb{C} \otimes L^\infty(G)) &= u(m \otimes L^\infty(G))u^* \\ &= m \otimes L^\infty(G).\end{aligned}$$

(b) 証明はフーリエ環の表現論を使うと行ふが, ここでは省く. (この命題の簡単な証明は未だない). 証了.

定理 3.1 の証明. (a) $\mathcal{L}(L^2(G)) = \mathcal{K}(G) \vee L^\infty(G)$ だから, 補題 3.2 (a) により, $\alpha(x)$, $1 \otimes p(r)$, $1 \otimes f$ は $m \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ の生成元である. 命題 2.4 (a) により, $\hat{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(x) \otimes 1$, $\hat{\alpha}(1 \otimes p(r)) = 1 \otimes p(r) \otimes p(r)$, $1 \otimes 1 \otimes f$ は $(m \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ の生成元である. $m \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ から $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes L^2(G) \otimes L^2(G))$ の中への写像を

$$(3.5) \quad \pi = \text{Ad}_{1 \otimes \nabla_G^*} \circ (\alpha \otimes 1)$$

とすれば,

$$(3.6) \quad \pi(\alpha(x)) = \alpha(x) \otimes 1$$

$$(3.7) \quad \pi(1 \otimes p(r)) = 1 \otimes p(r) \otimes p(r)$$

$$(3.8) \quad \pi(1 \otimes f) = 1 \otimes 1 \otimes f$$

をみたす. したがって, π は $m \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ から $(m \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ の上への同型写像である. さうに

$$\hat{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(x) \otimes 1$$

$$\hat{\alpha}(\alpha(y)) = \alpha(y) \otimes 1$$

$$\hat{\alpha}(1 \otimes p(r)) = 1 \otimes p(r) \otimes 1$$

$$\hat{\alpha}(1 \otimes 1 \otimes f) = 1 \otimes 1 \otimes \wedge(f)$$

$$\tilde{\alpha}(1 \otimes f) = 1 \otimes \lambda(f)$$

より, $n \otimes L(L^Y(G))$ 上で $(\pi \otimes 1) \cdot \tilde{\alpha} = \hat{\alpha} \cdot \pi$ を得る.

(c) 上と同様に, $n \otimes L(L^Y(G))$ から $L(n \otimes L^Y(G) \otimes L^Y(G))$ の中への写像を

$$(3.9) \quad \pi = \text{Ad}_{(1 \otimes 1 \otimes J)(1 \otimes W_G)} \circ (\delta \otimes 1)$$

とすれば, π は $n \otimes L(L^Y(G))$ の生成元 $\delta(y)$, $1 \otimes f$, $1 \otimes \lambda(r)$ を $(n \times_\delta G) \times_\delta G$ の生成元 $\hat{\delta}(\delta(y)) = \delta(y) \otimes 1$, $\hat{\delta}(1 \otimes f) = 1 \otimes \lambda(f)$, $1 \otimes 1 \otimes p(r)$ へ移す. さらに

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(\delta(y)) &= \delta(y) \otimes 1 & \hat{\delta}(\hat{\delta}(x)) &= \hat{\delta}(x) \otimes 1 \\ \tilde{\delta}(1 \otimes f) &= 1 \otimes f \otimes 1 & \hat{\delta}(1 \otimes 1 \otimes p(r)) &= 1 \otimes 1 \otimes p(r) \otimes p(r) \\ \tilde{\delta}(1 \otimes \lambda(r)) &= 1 \otimes \lambda(r) \otimes p(r) \end{aligned}$$

だから, $n \otimes L(L^Y(G))$ 上で $(\pi \otimes 1) \cdot \tilde{\delta} = \hat{\delta} \cdot \pi$ を得る. 証了.

§4 接合積の不動点

双対作用, 双対 $\mathbb{C}_0$ -作用の不動点を調べる. G が離散的な場合には, ほとんど自明な結果である.

$$\text{定理 4.1. (a) } (m \times_\alpha G)^{\hat{\alpha}} = \alpha(m).$$

$$(b) (n \times_\delta G)^{\hat{\delta}} = \delta(n).$$

定理の証明には次の補題が使われる.

補題 4.2. (a) $L^{\circ}(G) = \{x \in \mathcal{L}(L'(G)) : W_G^*(x \otimes 1)W_G = x \otimes 1\}.$

(b) $\mathcal{R}(G) = \{y \in \mathcal{L}(L'(G)) : V_G'(y \otimes 1)V_G'^* = y \otimes 1\}.$

証明. (a) $\alpha_G = \rho$ は G の $L^{\circ}(G)$ 上への作用だから, 補題 3.2 (a) より, $\alpha_G(L^{\circ}(G)) \vee (\mathbb{C} \otimes L'(G)) = L'(G) \bar{\otimes} L^{\circ}(G)$ を得る. 他方, $\alpha_G(L^{\circ}(G)) = W_G^*(\mathbb{C} \otimes L'(G))W_G'$ と $W_G' = (1 \otimes J)W_G(1 \otimes J)$ に注意すれば,

$$(W_G^*(\mathbb{C} \otimes L'(G))W_G) \vee (\mathbb{C} \otimes L'(G)) = L'(G) \bar{\otimes} L^{\circ}(G)$$

を得る. ここで, $W_G^*(x \otimes 1)W_G = x \otimes 1$ を仮定すれば

$$x \otimes 1 \in (W_G^*(\mathbb{C} \otimes L^{\circ}(G))W_G)' \cap (\mathbb{C} \otimes L'(G))'$$

したがって, $x \in L^{\circ}(G)$. 逆は明らかである.

(b) $V_G'(1 \otimes \lambda(r))V_G'^* = \lambda(r) \otimes \lambda(r)$ だから

$$(V_G'(\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}'(G))V_G'^*) \vee (\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}'(G)) = \mathcal{R}'(G) \bar{\otimes} \mathcal{R}'(G).$$

したがって, $V_G'(y \otimes 1)V_G'^* = y \otimes 1$ は上と同様に, $y \in \mathcal{R}'(G)' = \mathcal{R}(G)$ と同値である. 証了.

定理 4.1 の証明. (a) (2.3) 式により $\alpha(m) \subset (m_{\chi}G)^{\hat{\alpha}}$ だから, 逆の包含関係を示せばよい. 先ず $\hat{\alpha}(y) = \text{Ad}_{1 \otimes W_G^*}(y \otimes 1)$ だから, 補題 4.2 (a) により, $(m_{\chi}G)^{\hat{\alpha}}$ は $\mathcal{L}(G) \bar{\otimes}$

$L^*(G)$ に含まれている. また, この定理は共変系の同値関係により保存される性質であり, $\{m, \alpha\} \cong \{\alpha(m), 1 \otimes \alpha_G\}$ だから, α は $\mathfrak{g}$ 上のユニタリ表現 u により $\alpha(x) = u(x \otimes 1)u^*$ と表わされているものと仮定できる. このとき, $u(1 \otimes \lambda(t))u^* = u(t) \otimes \lambda(t)$ かつ $\text{Ad}_{u(t) \otimes \lambda(t)}(\alpha(x)) = \alpha(x)$ だから

$$m_{X_G} \subset (m' \otimes \mathbb{C})' \cap (u(\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}'(G))u^*)'$$

である. したがって

$$(4.1) \quad (m_{X_G})^{\hat{}} \subset (m' \otimes \mathbb{C})' \cap (u(\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}'(G))u^*)' \cap (\mathbb{C} \otimes L^*(G))'.$$

他方,

$$\alpha'(x') = u^*(x' \otimes 1)u, \quad x' \in m'$$

と置けば, α' は $\mathcal{R}'(G)$ に関する G の m' 上への作用である. ここで補題 3.2 (a) を使うと

$$m' \otimes L(L^*(G)) = (u^*(m' \otimes \mathbb{C})u) \vee (\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}'(G)) \vee (\mathbb{C} \otimes L^*(G)).$$

両辺に Ad_u を作用させて Commutant を考えると

$$\alpha(m) = (m' \otimes \mathbb{C})' \cap (u(\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}'(G))u^*)' \cap (\mathbb{C} \otimes L^*(G))'.$$

したがって, (4.1) より $(m_{X_G})^{\hat{}} \subset \alpha(m)$ を得る.

(b) (2.4) 式により $\delta(\mathcal{N}) \subset (n_{X_G})^{\hat{}}$ だから逆の包含関係を示す. 先ず $\hat{\delta}(x) = \text{Ad}_{1 \otimes v_G^*}(x \otimes 1)$ だから, 補題 4.2 (b) により, $(n_{X_G})^{\hat{}} \subset L(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{R}(G)$ となる. $\{n, \delta\} \cong \{\delta(n), 1 \otimes \delta_G\}$ だから δ は

$$(4.2) \quad (w \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(w \otimes 1) = (1 \otimes \delta_G)(w)$$

をみたす $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{R}(G)$ のユニタリ作用素 w により, $\delta(y)$
 $= w^*(y \otimes 1)w$ と表わされているものと仮定できる.

さて, 各 $f \in L^0(G)$ に対し $\pi(f) = w^*(1 \otimes f)w$ と置けば,
 (4.2) 式より

$$\text{Ad}_{1 \otimes w_G}(\pi(f) \otimes 1) = \pi(f) \otimes 1$$

を得る. 補題 4.2 (a) により, $\pi(h) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes L^0(G)$ だから,

$$\mathcal{N} \times_\delta G \subset (\mathcal{N}' \otimes \mathbb{C})' \cap \pi(L^0(G))'$$

となる. したがって

$$(4.3) \quad (\mathcal{N} \times_\delta G)^\delta \subset (\mathcal{N}' \otimes \mathbb{C})' \cap \pi(L^0(G))' \cap (\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}'(G))'.$$

他方,

$$w' = (1 \otimes J)w(1 \otimes J)$$

$$\delta'(y') = w'(y' \otimes 1)w'^*, \quad y' \in \mathcal{N}'$$

とすれば, $w' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{R}'(G)$ かつ

$$(w' \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(w' \otimes 1) = (1 \otimes \delta'_G)(w')$$

となり, δ' が $\mathcal{R}'(G)$ に関する G の $\mathcal{N}'$ 上への Co-作用であることがわかる. ここで補題 3.2 (b) を使うと

$$\mathcal{N}' \otimes \mathcal{L}(L^0(G)) = (w'(\mathcal{N}' \otimes \mathbb{C})w'^*) \vee (\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}(G)) \vee (\mathbb{C} \otimes L^0(G))$$

を得る. 両辺に $\text{Ad}_{w^*(1 \otimes J)}$ を作用させて Commutant を考えると

$$\delta(\mathcal{N}) = (\mathcal{N}' \otimes \mathbb{C})' \cap (\mathbb{C} \otimes \mathcal{R}'(G))' \cap \pi(L^0(G))'.$$

したがって, (4.3) より $(\mathcal{N} \times_\delta G)^\delta \subset \delta(\mathcal{N})$ を得る. 証了.

竹崎の双対定理と定理 4.2 を組み合わせると次の定理が得られる.

$$\text{定理 4.3. (a) } (m \overline{\otimes} L(L^*(G)))^{\tilde{\alpha}} = m \times_{\alpha} G.$$

$$(b) (n \overline{\otimes} L(L^*(G)))^{\tilde{\delta}} = n \times_{\delta} G.$$

証明. (a) (3.5) 式で与えられた $m \overline{\otimes} L(L^*(G))$ から $(m \times_{\alpha} G)$ の上への同型写像 π を使うと

$$\pi((m \overline{\otimes} L(L^*(G)))^{\tilde{\alpha}}) = \hat{\alpha}(m \times_{\alpha} G)$$

となる. (2.3), (2.4), (3.6), (3.7) より $\hat{\alpha}$ と π は $m \times_{\alpha} G$ の生成元上で一致している. したがって, (a) が得られる.

(b) (3.9) 式で与えられた $n \overline{\otimes} L(L^*(G))$ から $(n \times_{\delta} G)$ の上への同型写像 π を使うと

$$\pi((n \overline{\otimes} L(L^*(G)))^{\tilde{\delta}}) = \hat{\delta}(n \times_{\delta} G)$$

となる. $n \times_{\delta} G$ 上で $\hat{\delta} = \pi$ だから, (b) が得られる. 証了.

§ 5. 接合積の特徴付け

まず, 作用に関する接合積の特徴付けを述べる.

定理 5.1. δ を G の $\mathcal{N}$ 上への Co-作用としたとき, 次の 3 条件は同値である:

(i) 作用の共変系 $\{m, \alpha\}$ が存在して

$$\{\mathcal{N}, \delta\} \cong \{m \times_{\alpha} G, \hat{\alpha}\}.$$

(ii) $\mathcal{N}$ の G の中へのユニタリ-表現 u が存在して

$$\delta(u(t)) = u(t) \otimes \rho(t), \quad t \in G.$$

(iii) ユニタリ-作用素 $u \in \mathcal{N} \otimes L^{\infty}(G)$ が存在して

$$(u \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(u \otimes 1) = (1 \otimes \alpha_G)(u),$$

$$\bar{\delta}(u) = (u \otimes 1)(1 \otimes W_G). \quad (\bar{\delta} \triangleq (1 \otimes \sigma) \circ (\delta \otimes 1))$$

特に, 条件 (ii) の下で, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\delta} \vee u(G)$.

これを双対化したものは次のようになる.

定理 5.2. α を G の $\mathcal{M}$ 上への作用としたとき, 次の 3 条件は同値である:

(i) Co-作用の共変系 $\{\mathcal{N}, \delta\}$ が存在して

$$\{m, \alpha\} \cong \{\mathcal{N} \times_{\delta} G, \hat{\delta}\}.$$

(ii) $\mathcal{M}$ の中への $L^{\infty}(G)$ または $A(G)$ の * 表現 π が存在して, $L^{\infty}(G)$ または $A(G)$ 上で

$$(5.1) \quad \alpha_t \circ \pi = \pi \circ \lambda_t. \quad ((\alpha \otimes 1) \circ \pi = (\pi \otimes 1) \circ \lambda)$$

(iii) ユニタリ-作用素 $w \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{K}(G)$ が存在して

$$(5.2) \quad (w \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(w \otimes 1) = (1 \otimes j_G)(w),$$

$$(5.3) \quad \bar{\alpha}(w^*) = (w^* \otimes 1)(1 \otimes V_G). \quad (\alpha_t \otimes 1)(w^*) = w^*(1 \otimes \rho(t)).$$

特に条件 (ii) の下で, $\mathcal{M} = \mathcal{M}^\alpha \vee \pi(L^\infty(G))$.

上の条件 (i) と (iii) はオ 2 部で Co-作用と Roberts の作用との関係を論ずる際に必要となる。紙数の関係上、後で使う定理 5.2 の証明だけを与える。

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) 明らか。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\mathcal{M}$ の表現空間を選び直して, α は G のユニタリ-表現 $\{u, \sigma\}$ により, $\alpha(x) = u(x \otimes 1)u^*$ と表わされているものと仮定できる。このとき, (5.1) 式は交換関係

$$u(t)\pi(f) = \pi(\lambda_t f)u(t), \quad t \in G, f \in L^2(G)$$

と同値であるから, 定理 1.1 により, 或るヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が存在して, $\mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes L^2(G)$ かつ

$$\pi(f) = 1_{\mathcal{H}} \otimes f$$

$$u(t) = 1_{\mathcal{H}} \otimes \lambda(t) \quad (\text{または, } u = 1_{\mathcal{H}} \otimes V'_G)$$

と仮定できる。ここで

$$w = 1_{\mathcal{H}} \otimes W_G$$

と置けば, $w \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{K}(G)$ 。また, 直接計算により

$$(W_G \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(W_G \otimes 1) = \text{Ad}_{1 \otimes W_G^*}(W_G \otimes 1)$$

$$(1 \otimes \sigma)((u \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(1_E \otimes W_G^* \otimes 1)(u \otimes 1)^*) = (1_E \otimes W_G^* \otimes 1)(1_E \otimes 1 \otimes V_G)$$

だから, それぞれ

$$(w^* \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(w \otimes 1) = (1 \otimes \delta_G)(w^*)$$

$$\bar{\alpha}(w^*) = (w^* \otimes 1)(1 \otimes V_G) \quad ((\alpha_t \otimes 1)(w^*) = w^*(1 \otimes \rho(t)))$$

と成る.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) 先ず

$$w_J = (1 \otimes J)w$$

$$\pi_0(f) = w_J(1 \otimes f)w_J^*, \quad f \in L^\infty(G)$$

と置けば, $\pi_0(f) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ である. 条件 (5.3) より

$$\bar{\alpha}(w_J^*) = (w_J^* \otimes 1)(1 \otimes V_G').$$

したがって, $\text{Ad}_{w_J \otimes 1} \circ \bar{\alpha} = \tilde{\alpha} \circ \text{Ad}_{w_J}$ と成る. したがって,

$$\tilde{\alpha}(\pi_0(f)) = \pi_0(f) \otimes 1. \quad \text{定理 4.3 (a) により, } (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(L^2(G)))^{\tilde{\alpha}} = \mathcal{M} \times_\alpha G \quad \text{だから}$$

$$\pi_0(f) \in \mathcal{M} \times_\alpha G.$$

他方, 条件 (5.2) より

$$(1 \otimes W_G)(w \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(w \otimes 1) = (w \otimes 1)(1 \otimes W_G).$$

そこで, $W_G^* = (J \otimes 1)W_G(J \otimes 1)$ であることを使えば

$$(1 \otimes W_G^*)(w_J \otimes 1)(1 \otimes \sigma)(w \otimes 1) = (w_J \otimes 1)(1 \otimes W_G)$$

を得る. したがって

$$\text{Ad}_{1 \otimes W_G^*}(\pi_0(f) \otimes 1) = \pi_0(f) \otimes 1$$

となる. 定理 4.1 (a) により, $(\mathcal{M} \times_\alpha G)^{\hat{\alpha}} = \alpha(\mathcal{M})$ だから

$$\pi_0(f) \in \alpha(\mathcal{M}).$$

さて, 二二二

$$\pi = \alpha^{-1} \circ \pi_0.$$

とすれば, π は $L^0(G)$ から $\mathcal{M}$ の中への同型写像である. α は $\alpha \circ \alpha_t = (1 \otimes \rho_t) \circ \alpha$ なる共変表現だから, $L^0(G)$ 上で

$$\begin{aligned} \alpha \circ \alpha_t \circ \pi &= (1 \otimes \rho_t) \circ \alpha \circ \pi = (1 \otimes \rho_t) \circ \pi_0 \\ &= \pi_0 \circ \lambda_t = \alpha \circ \pi \circ \lambda_t. \end{aligned}$$

したがって, (5.1) 式が得られる.

(ii) から (iii) $\Rightarrow$ (i) 先ず

$$\delta(y) = w^*(y \otimes 1)w, \quad y \in \mathcal{M}^\alpha$$

とすれば, $\delta(y) \in \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$. 条件 (5.3) を使って

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\delta(y)) &= \bar{\alpha} \circ \text{Ad}_{w^*}(y \otimes 1) \\ &= \text{Ad}_{w^* \otimes 1} \cdot \text{Ad}_{1 \otimes \nabla_G} \cdot \bar{\alpha}(y \otimes 1) \\ &= \delta(y) \otimes 1 \end{aligned}$$

と成るので, $\delta(y) \in \mathcal{M}^\alpha \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$. ところで, $w \in \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{R}(G)$ だから, δ は $\mathcal{M}^\alpha$ から $\mathcal{M}^\alpha \bar{\otimes} \mathcal{R}(G)$ の中への同型写像である. 条件 (5.2) により, δ は G の $\mathcal{M}^\alpha$ 上への Co -作用である.

さて, 条件 (5.3) により, Ad_{w^*} は $\{\bar{m}, \bar{\alpha}\}$ から $\{\bar{m}, \bar{\alpha}\}$ の上への同型写像と与える. したがって $\bar{m} = \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$. 補題 3.2 (a) により, $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G = \bar{m}^{\bar{\alpha}}$ だから, $\bar{m}$ は $\bar{m}^{\bar{\alpha}} = \mathcal{M}^\alpha \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$ と $\text{Ad}_{w^*}(\mathbb{C} \otimes L^0(G))$ により生成される. ここで, (i) $\Rightarrow$ (iii) の証明

明の記号を使って

$$\mathcal{C}_g = \mathbb{C} \otimes L^2(G), \quad \pi(f) = 1_{\mathbb{C}} \otimes f, \quad \alpha \circ \pi = (\pi \otimes 1) \circ \lambda$$

と仮定する. $w = 1 \otimes W_g$ だったから, 補題 4.2(a) により

$$w_j^*(\mathbb{C}_g \otimes L^2(G)) w_j \subset \mathbb{C}_g \otimes L^2(G) \otimes L^2(G).$$

したがって, $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}^\alpha$ と $\pi(L^2(G))$ により生成される.

もし, $y \in \mathcal{M}^\alpha$, $f \in L^2(G)$ とすれば,

$$(5.4) \quad w_j^* \alpha(y) w_j = w_j^* (y \otimes 1) w_j = \delta(y)$$

$$(5.5) \quad w_j^* \alpha(\pi(f)) w_j = w_j^* \pi_0(f) w_j = 1 \otimes f$$

となる. したがって, $\text{Ad}_{w_j^*} \circ \alpha$ は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}^\alpha \rtimes_\delta G$ の $\pm$ への同型写像である. また, 条件 (5.4) と (5.5) により, $\mathcal{M}^\alpha$ と $\pi(L^2(G))$ 上で

$$\text{Ad}_{w_j^* \otimes 1} \circ (\alpha \otimes 1) \circ \alpha = \hat{\delta} \circ \text{Ad}_{w_j^*} \circ \alpha$$

をみたすので, $\{\mathcal{M}, \alpha\} \cong \{\mathcal{M}^\alpha \rtimes_\delta G, \hat{\delta}\}$ を得る. 証了.

第2部 表現環による接合積

§6 表現環と結合作用素

第1部では, 局所コンパクト群 G の双対として, フーリエ環を使った. 第2部では, 表現論の立場に立ち, 双対として十分沢山のユニタリー表現からなる環を採用する. 話の煩

雑さを避けるために、以後 G は可分なコンパクト群、フォン・ノイマン環 $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ が作用するヒルベルト空間 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ も可分と仮定することにする。さらに、 G のハール測度は正規化しておく。

定義 6.1. G の (連続な) エニタリー表現の作る集合 $\mathcal{R}$ で次の2条件をみたすものを G の 表現環 という:

- (i) $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{R}$ ならば $\pi_1 \oplus \pi_2, \pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathcal{R}$.
- (ii) 自明な表現 $\{1, \mathcal{H}_1\}$ が存在して

$$\pi = \pi \otimes 1 = 1 \otimes \pi, \quad \pi \in \mathcal{R}.$$

特に、表現環 $\mathcal{R}$ が次の条件をみたすとき自己共役という。

- (iii) $\pi \in \mathcal{R}$ ならば, $\bar{\pi} \in \mathcal{R}$.

次に、相互の表現を結び付ける、結合作用素を考えることにする。 $\{\pi_1, \mathcal{H}_1\}, \{\pi_2, \mathcal{H}_2\} \in \mathcal{R}$ に対し

$$\mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2) = \{a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1) : \pi_1(t)a = a\pi_2(t), t \in G\}$$

と置く。この定義より直ちに、

$$\mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2) \mathcal{I}_G(\pi_2, \pi_3) \subset \mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_3)$$

$$\mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2) \oplus \mathcal{I}_G(\pi_1', \pi_2') \subset \mathcal{I}_G(\pi_1 \oplus \pi_1', \pi_2 \oplus \pi_2')$$

$$\mathcal{I}_G(\pi_1, \pi_2) \otimes \mathcal{I}_G(\pi_1', \pi_2') \subset \mathcal{I}_G(\pi_1 \otimes \pi_1', \pi_2 \otimes \pi_2')$$

がわかる。フォン・ノイマン環 $\mathcal{M}$ のすべての $*$ 自己準同型

写像全体を $\text{End}(\mathcal{N})$ と書く. 各 $p_1, p_2 \in \text{End}(\mathcal{N})$ に対し, それらの結合作用素全体を

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1, p_2) = \{u \in \mathcal{N} : p_1(y)u = u p_2(y), y \in \mathcal{N}\}$$

と置く. この定義より直ちに

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1, p_2) \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_2, p_3) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1, p_3)$$

$$p(\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1, p_2)) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p \cdot p_1, p \cdot p_2)$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1 \circ p, p_2 \circ p) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1, p_2)$$

がわかる. これらの包含関係を組み合わせると

$$p'_1(\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1, p_2)) \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p'_2, p'_2) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p'_1 \circ p_1, p'_2 \circ p_2)$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1, p_2) p_2(\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p'_1, p'_2)) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{N}}(p_1 \circ p'_1, p_2 \circ p'_2).$$

最後に, 表現環の大切な例を与えるために, フォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ の 中の ヒルベルト空間なる概念を導入する.

定義 6.2. $\mathcal{N}$ の閉部分ベクトル空間 $\mathcal{H}$ が次の 2 条件をみたすとき, $\mathcal{N}$ の中のヒルベルト空間という:

- (i) $x, y \in \mathcal{H}$ ならば, $y^*x \in \mathbb{C}$.
- (ii) $a \in \mathcal{N}$ かつ $a \neq 0$ ならば, $a\mathcal{H} \neq \{0\}$.

$\mathcal{H}$ の内積 $(x|y)$ は条件 (i) の y^*x で与えられている. もし $\mathcal{N}$ が有限型ならば, 常に $\dim \mathcal{H} = 1$ である. $\mathcal{H}$ の正規直交基底を $\{v_1, \dots, v_n\}$ とすれば, 各 v_j は等距離作用素

で $\sum u_j u_j^* = 1$ をみたす. ここで

$$p_g(y) = \sum u_j y u_j^*, \quad y \in \mathcal{N}$$

とすれば, p_g は $\text{End}(\mathcal{N})$ の元である.

$\mathcal{N}$ の中のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ に対し, もし $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ なら yx^* は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の元と同一視できるので, $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \mathcal{N}$ と考えられる. さらに, $p_g(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})'$ だから,

$$\mathcal{N} = p_g(\mathcal{N}) \overline{\otimes} \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

となる.

再び, $\mathcal{N}$ の中のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ に対し, $\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2 = \{xy : x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\}$ はテンソル積 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の $\mathcal{N}$ の中での実現である. w_1, w_2 を $w_1 w_1^* + w_2 w_2^* = 1$ をみたす m^α の等距離作用素としたとき, $w_1 \mathcal{H}_1 + w_2 \mathcal{H}_2$ は直和 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ の $\mathcal{N}$ の中での実現の一つである.

さて, m^α が真無限型の共変系 $\{m, G, \alpha\}$ を考える. α で不変な m の中のヒルベルト空間全体を $\mathcal{H}_\alpha(m)$ とする. $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_\alpha(m)$ に対し, もし $x, y \in \mathcal{H}$ なら,

$$(\alpha_t(x) | \alpha_t(y)) = \alpha_t(y^* x) = y^* x = (x | y)$$

となるから, α の $\mathcal{H}$ 上への制限は G の $\mathcal{H}$ 上へのユニタリー表現になる. これを $\{\alpha, \mathcal{H}\}$ と書くことにする. こうして $\mathcal{H}_\alpha(m)$ は G の表現の集合と考えられ, しかも次の

$$\{a, b_1 b_2\} \cong \{a, b_1\} \otimes \{a, b_2\}$$

$$\{a, w_1 b_1 + w_2 b_2\} \cong \{a, b_1\} \oplus \{a, b_2\}$$

$$\{a, c\} \cong \{1, b_1\}$$

の意味で表現環になる.

§7 Roberts の作用と接合積

以後 $\mathcal{R}$ は常に G の表現環とする. ここでは, この $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ に作用させることを考えよう.

定義 7.1. $\mathcal{R}$ の $\mathcal{N}$ 上への Roberts の作用 $\{\rho, \gamma\}$ とは次の 5 条件を満たす $\rho_\pi \in \text{End}(\mathcal{N})$, $(\pi \in \mathcal{R})$ と弱連続な線形写像 $\gamma_{\pi, \pi'}: \mathcal{G}_G(\pi, \pi') \rightarrow \mathcal{G}_\mathcal{N}(\rho_\pi, \rho_{\pi'})$, $(\pi, \pi' \in \mathcal{R})$ の集まりを云う:

$$(i) \quad \rho_{\pi_1 \otimes \pi_2} = \rho_{\pi_1} \circ \rho_{\pi_2}.$$

$$(ii) \quad a \in \mathcal{G}_G(\pi_1, \pi_2), \quad a' \in \mathcal{G}_G(\pi'_1, \pi'_2) \quad \text{に対し}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\pi_1 \otimes \pi'_1, \pi_2 \otimes \pi'_2}(a \otimes a') &= \gamma_{\pi_1, \pi_2}(a) \rho_{\pi_2}(\gamma_{\pi'_1, \pi'_2}(a')) \\ &= \rho_{\pi_1}(\gamma_{\pi'_1, \pi'_2}(a')) \gamma_{\pi_1, \pi_2}(a). \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \gamma_{\pi, \pi}(1) = 1.$$

$$(iv) \quad a \in \mathcal{G}_G(\pi_1, \pi_2) \quad \text{に対し} \quad \gamma_{\pi_1, \pi_2}(a)^* = \gamma_{\pi_2, \pi_1}(a^*).$$

$$(v) \quad a \in \mathcal{G}_G(\pi_1, \pi_2), \quad b \in \mathcal{G}_G(\pi_2, \pi_3) \quad \text{に対し}$$

$$\gamma_{\pi_1, \pi_2}(a) \gamma_{\pi_2, \pi_3}(u) = \gamma_{\pi_1, \pi_3}(au).$$

Roberts の作用は G が可換な場合には, 第 1 部での作用に成, ことに注意しよう. 非可換な場合は, 前節で与えた表現環 $M_\alpha(m)$ を使, て

$$\rho_{af_g}(y) = \rho_g(y), \quad g \in M_\alpha(m)$$

$$\gamma_{af_{g_1}, af_{g_2}}(a) = a, \quad a \in \mathcal{G}_G(\alpha \upharpoonright f_{g_1}, \alpha \upharpoonright f_{g_2})$$

と置く事により, $\{\rho_{af_g}, \gamma_{af_{g_1}, af_{g_2}} : g, g_1, g_2 \in M_\alpha(m)\}$ が, $M_\alpha(m)$ の m^α 上への Roberts の作用であることがわかる.

さて, これから, $\mathcal{M}$ と $\mathcal{R}$ との接合積を作るに先立ち, 二つの表現 $\pi_{\mathcal{R}}$ と $\nu_{\mathcal{R}}$ を考えることから始めよう.

$$\{\pi_{\mathcal{R}}, f_{\mathcal{R}}\} = \sum_{\pi \in \mathcal{R}}^{\oplus} \{\pi, f_{\pi}\}$$

と置く. $f_{\mathcal{R}}$ 上の連続作用素は行列 $(a_{\pi, \pi'})_{\pi, \pi' \in \mathcal{R}}$ の形に表わせる. 結合作用素の性質を使, て

$$(a_{\pi, \pi'}) \in \pi_{\mathcal{R}}(G)' \iff a_{\pi, \pi'} \in \mathcal{G}_G(\pi, \pi') \quad (\forall \pi, \pi' \in \mathcal{R})$$

を得る. 各既約表現 $\{\pi, f_{\pi}\} \in \mathcal{R}$ と各 $\xi \in f_{\pi}$ に対し

$$\nu_{\mathcal{R}}(\xi) \sum^{\oplus} \gamma_{\pi'} = \sum^{\oplus} \gamma_{\pi'} \otimes \xi, \quad \gamma_{\pi'} \in f_{\pi'},$$

とすれば,

$$\|\nu_{\mathcal{R}}(\xi)\| = \|\xi\|, \quad \xi \in f_{\pi}$$

$$\nu_{\mathcal{R}}(\xi \otimes \eta) = \nu_{\mathcal{R}}(\eta) \nu_{\mathcal{R}}(\xi), \quad \eta \in f_{\pi'}$$

が成り立つ. 特に, $\|\xi\|=1$ ならば, $\nu_{\mathcal{R}}(\xi)$ は等距離作用素に

なる。さらに、 π_R と ν_R は交換関係

$$\pi_R(t) \nu_R(\xi) = \nu_R(\pi(t)\xi) \pi_R(t), \quad \xi \in \mathcal{H}_\pi$$

をみたす。

次に、Roberts の作用による接合積が作用するヒルベルト空間を考えよう。 $\mathcal{H}_R$ から $\mathcal{H}$ への有界線形作用素 Φ で

$$\gamma_{\pi, \pi'}(a) \Phi \xi = \Phi a \xi, \quad a \in \mathcal{G}_G(\pi, \pi'), \xi \in \mathcal{H}_\pi$$

をみたすものの全体を $F(\rho, \mathcal{H})$ とする。 Φ の $\mathcal{H}_\pi$ への制限を $\Phi(\pi)$ と書くことにすれば、 Φ の定義は

$$\gamma_{\pi, \pi'}(a) \Phi(\pi') = \Phi(\pi) a, \quad a \in \mathcal{G}_G(\pi, \pi')$$

とも表わせる。ここで、 $\mathcal{R}$ は 右正則表現と準同値な表現

$\{\pi_r, \mathcal{H}_r\}$ を含んでいるものと仮定しよう。 θ を $\pi_r(G)''$ から

$\mathcal{R}(G)$ 上への同型写像で $\theta(\pi_r(t)) = \rho(t)$ をみたすものとする。

$\mathcal{G}_G(\pi_r, \pi_r) = \pi_r(G)'$ だから、 $\theta(\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r))$ は $\mathcal{R}(G)$ の元

である。 Φ のセミノルムを、 $\mathcal{R}(G)$ 上のプランシェレル重み

ψ_G ($\psi_G(\rho(f)\rho(g)^*) = (f|g) = f * g^b(e)$) を使って

$$(7.1) \quad \|\Phi\|^2 = \psi_G(\theta(\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r)))$$

で与える。 $F(\rho, \mathcal{H})$ の元 Φ で $\|\Phi\| < \infty$ をみたすものの全体を

$F_0(\rho, \mathcal{H})$ とする。次の補題により、(7.1) で与えられたセミ

ノルムは、 $F_0(\rho, \mathcal{H})$ 上でのノルムに成っていることがわかる。

補題 7.2. $\Phi(\pi_r) = 0$ ならば、 $\Phi = 0$.

証明. θ を上で与えられた, $\pi_r(G)''$ から $\mathcal{R}(G)$ 上への同型写像とする. ある重複度をもつ自明な表現を 1 と置けば

$$\Phi(\pi_r \otimes 1)a = \gamma_{\pi_r \otimes 1, \pi_r}(a)\Phi(\pi_r)$$

が任意な $a \in \mathcal{G}_G(\pi_r \otimes 1, \pi_r)$ に対して成り立ち, $\Phi(\pi_r \otimes 1) = 0$ を得る. 任意な表現 $\{\pi, \mathcal{G}_\pi\}$ に対し, $L^2(G) \otimes L^2(\mathcal{G}_\pi)$ のユニタリ作用素 U を $(U\xi)(t) = \pi(t)\xi(t)$, $\xi \in L^2(G) \otimes \mathcal{G}_\pi$ で与えれば,

$$(7.2) \quad \text{Ad}_{(U \otimes 1)^{-1}}(U)(\pi_r(t) \otimes 1) = \pi_r(t) \otimes \pi(t)$$

となる. したがって, $\Phi(\pi_r \otimes \pi) = 0$ である. さらに

$$\Phi(\pi)\xi = \gamma_{\pi, \pi_r \otimes \pi}(\xi)\Phi(\pi_r \otimes \pi)$$

が任意な $\xi \in \mathcal{G}_G(\pi, \pi_r \otimes \pi)$ で成り立つから, $\Phi(\pi) = 0$ となる. π は $\mathcal{R}$ の任意な元であったから, $\Phi = 0$ である. 証了.

定義 7.3. $F_0(p, \tilde{n})$ を (7.1) に与えられたノルムにより完備にしたものを $L^2(p, \tilde{n})$ と書く.

補題 7.4. $y \in \mathcal{R}$ かつ $\xi \in \mathcal{G}_\pi$ とする. もし $\Phi \in F(p, \tilde{n})$ ならば, $p(y)\Phi, \Phi \cup_{\mathcal{R}}(\xi) \in F(p, \tilde{n})$. したがって, $(p(y)\Phi)(\pi) = p_\pi(y)\Phi(\pi)$ である.

証明. $\Phi \in F(p, \tilde{n})$ とする. 先ず, 任意な $\xi \in \mathcal{G}_G(\pi, \pi')$ に対し, $p_\pi(y)\gamma_{\pi, \pi'}(\xi) = \gamma_{\pi, \pi'}(\xi)p_{\pi'}(y)$ である. したがって, 任

意な $a \in \mathcal{G}_Q(\pi, \pi')$ に対し $\tilde{a} = \gamma_{\pi, \pi'}(a)$ と置けば

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\rho(y)\Phi)(\pi') &= \tilde{a} \rho_{\pi'}(y)\Phi(\pi') = \rho_{\pi}(y)\tilde{a}\Phi(\pi') \\ &= \rho_{\pi}(y)\Phi(\pi)a = (\rho(y)\Phi)(\pi)a\end{aligned}$$

となる。つまり, $\rho(y)\Phi \in F(\rho, \mathcal{R})$ である。

定義 7.1 (ii) より, 任意な $a \in \mathcal{G}_Q(\pi, \pi')$ に対し

$$(a \otimes 1_{\pi})^{\sim} = \tilde{a} \rho_{\pi'}(\tilde{1}_{\pi}) = \tilde{a}$$

となるので

$$\begin{aligned}\Phi \nu_{\mathcal{R}}(\xi) a \xi_{\pi'} &= \Phi(\pi' \otimes \pi)(a \otimes 1_{\pi})(\xi_{\pi'} \otimes \xi) = (a \otimes 1_{\pi})^{\sim} \Phi(\pi' \otimes \pi)(\xi_{\pi'} \otimes \xi) \\ &= \tilde{a} \Phi(\pi' \otimes \pi)(\xi_{\pi'} \otimes \xi) = \tilde{a} \Phi \nu_{\mathcal{R}}(\xi) \xi_{\pi'}\end{aligned}$$

となる。つまり, $\Phi \nu_{\mathcal{R}}(\xi) \in F(\rho, \mathcal{R})$. 証了。

定義 7.5 (接合積) $\mathcal{R}$ を右正則表現と準同値な元を含む表現環とする。 $\rho(y)$ と $V(\xi)$ を, $\Phi \in F_0(\rho, \mathcal{R})$ に対し,

$$(7.3) \quad (\rho(y)\Phi)(\pi) = \rho_{\pi}(y)\Phi(\pi), \quad y \in \mathcal{N},$$

$$(7.4) \quad V(\xi)\Phi = \Phi \nu_{\mathcal{R}}(\xi), \quad \xi \in \mathcal{G}_{\pi}$$

で与えられる $L^2(\rho, \mathcal{R})$ 上の作用素としたとき, $\rho(\mathcal{N})$ と全ての既約な $\pi \in \mathcal{R}$ に対する $V(\mathcal{G}_{\pi})$, により生成されるフォン・ノイマン環 $\mathcal{N} \times_{\rho} \mathcal{R}$ を $\mathcal{N}$ と $\mathcal{R}$ の Roberts の作用 $\{\rho, \gamma\}$ に関する 接合積 という。

特に, (7.3) と (7.4) 式より

$$(7.5) \quad V(\xi) \rho(\eta) = \rho(\rho_\pi(\eta)) V(\xi), \quad \xi \in \mathcal{G}_\pi,$$

が成り立つ。

§8 Roberts の作用の双対とその不動点

ここでは、接合積 $\mathcal{N}_{X_p} \mathcal{R}$ 上に双対作用 $\hat{\rho}$ を与え、 $\mathcal{R}$ に含まれる任意な既約表現が $\hat{\rho}$ を $\mathcal{N}_{X_p} \mathcal{R}$ の中へ或るヒルベルト空間へ制限して実現されることと $(\mathcal{N}_{X_p} \mathcal{R})^{\hat{\rho}} = \rho(\mathcal{N})$ を示す。 G が可換な場合、前者は、任意な $p \in \hat{G}$ に対し

$$\hat{\alpha}_p(1 \otimes p(t)) = \overline{\langle t, p \rangle} (1 \otimes p(t)),$$

つまり、 p は $\hat{\alpha}$ を $\mathcal{M}_{X_p} G$ の中の 1 次元ヒルベルト空間 $\mathbb{C}(1 \otimes p(t))$ へ制限して実現されていることに対応している。

さて、 G の $L^2(p, \hat{\alpha})$ 上への表現 U を

$$U(t)\Phi = \Phi \pi_{\mathcal{R}(t)}^{-1}, \quad \Phi \in F_0(p, \hat{\alpha})$$

で与えれば、直ちに

$$(8.1) \quad U(t) \rho(\eta) = \rho(\eta) U(t), \quad \eta \in \mathcal{N},$$

$$(8.2) \quad U(t) V(\xi) = V(\pi(t)\xi) U(t), \quad \xi \in \mathcal{G}_\pi$$

を得る。このように、作用 $t \mapsto \text{Ad}_{U(t)}$ は $\mathcal{N}_{X_p} \mathcal{R}$ を不変にするので、 $\mathcal{N}_{X_p} \mathcal{R}$ 上への制限 $\hat{\rho}_t$ を Roberts の作用 $\{\rho, \eta\}$ の双対という。

命題 8.1. $\{\rho, \eta\}$ を $\mathcal{R}$ の $\mathcal{H}$ 上への Roberts 作用, $\hat{\rho}$ を ρ の双対とする. もし $\{\pi, \varphi_\pi\} \in \mathcal{R}$ が既約ならば,

$$(i) \quad \{\hat{\rho}, V(\varphi_\pi)\} \in \mathcal{H}_\rho(\mathcal{H} \times_\rho \mathcal{R}).$$

$$(ii) \quad \{\pi, \varphi_\pi\} \cong \{\hat{\rho}, V(\varphi_\pi)\}.$$

補題 8.2. もし $\{\pi, \varphi_\pi\} \in \mathcal{R}$ が既約ならば,

$$(8.3) \quad V(\eta)^* V(\xi) = (\xi | \eta) 1, \quad \xi, \eta \in \varphi_\pi.$$

証明. (7.2) 式により, π_r は $\pi_r \otimes \pi$ と準同値である. したがって, $\sigma(\pi_r(t)) = \pi_r(t) \otimes \pi(t)$ なる $\pi_r(G)''$ から $((\pi_r \otimes \pi)(G))''$ への同型写像が存在する. もし $a \in \mathcal{G}_G(\pi_r \otimes \pi, \pi_r)$ が等距離作用素かつ e がその値域への射影 aa^* ならば, $e(\varphi_r \otimes \varphi_\pi)$ 上で

$$(8.4) \quad e(\sigma(\pi_r(t)))e = a \pi_r(t) a^*$$

となる. もし $f = \eta_{\pi_r \otimes \pi, \pi_r}(a)^* \eta_{\pi_r \otimes \pi, \pi_r}(a)$ ならば,

$$(8.5) \quad \begin{aligned} a(\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r))a^* &= a(\Phi(\pi_r)^* f \Phi(\pi_r))a^* \\ &= e(\Phi(\pi_r \otimes \pi)^* \Phi(\pi_r \otimes \pi))e. \end{aligned}$$

ここで, a は $\mathcal{G}_G(\pi_r \otimes \pi, \pi_r)$ の任意な等距離作用素であるし, $\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r) \in \pi_r(G)''$ かつ $\Phi(\pi_r \otimes \pi)^* \Phi(\pi_r \otimes \pi) \in ((\pi_r \otimes \pi)(G))''$ であるから, (8.4), (8.5) と a の任意性により

$$\sigma(\Phi(\pi_r)^* \Phi(\pi_r)) = \Phi(\pi_r \otimes \pi)^* \Phi(\pi_r \otimes \pi)$$

を得る. もし $\Phi, \Psi \in F_0(\rho, \varphi)$ かつ $\xi, \eta \in \varphi_\pi$ ならば

$$\begin{aligned}
 (8.6) \quad (V(\xi)\bar{\Psi} | V(\eta)\bar{\Psi}) &= \psi_q(\theta(u_R(\eta)^* \bar{\Psi}(\pi_r \otimes \pi)^* \bar{\Psi}(\pi_r \otimes \pi) u_R(\xi))) \\
 &= \psi_q(\theta(u_R(\eta)^* \sigma(\bar{\Psi}(\pi_r)^* \bar{\Psi}(\pi_r)) u_R(\xi))).
 \end{aligned}$$

他方, $f \in A(G)$ かつ $\xi \in \mathcal{H}_r$ ならば,

$$\begin{aligned}
 u_R(\eta)^* \sigma(\pi_r(f)) u_R(\xi) \zeta &= u_R(\eta)^* \sigma(\pi_r(f)) (\zeta \otimes \xi) \\
 &= u_R(\eta)^* \int f(t) (\pi_r(t) \zeta \otimes \pi(t) \xi) dt = \int f(t) (\pi(t) \xi | \eta) \pi_r(t) \zeta dt \\
 &= \pi_r(q) \zeta, \quad (q(t) = f(t) (\pi(t) \xi | \eta)).
 \end{aligned}$$

したがって, (8.6) 式の右辺は, (7.1) 式により $(\xi | \eta)(\bar{\Psi} | \bar{\Psi})$ となり, (8.3) 式を得る. 証了.

命題 8.1 の証明. (i) $\{1, \mathcal{H}_1\}$ を $\pi = \pi \otimes 1 = 1 \otimes \pi$ なる自明な表現, ε_0 を $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C} \varepsilon_0$ なる正規化されたベクトルとする. $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}, \{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_d\}$ を $\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_{\bar{\pi}}$ の対応する正規直交基底とする. $a \in \mathcal{G}_G(\pi \otimes \pi, 1)$ と $\bar{a} \in \mathcal{G}_G(\pi \otimes \bar{\pi}, 1)$ を

$$a \varepsilon_0 = \sum \bar{\varepsilon}_j \otimes \varepsilon_j, \quad \bar{a} \varepsilon_0 = \sum \varepsilon_j \otimes \bar{\varepsilon}_j$$

に選ぶ. $(a \varepsilon_0 | \bar{\varepsilon}_j \otimes \varepsilon_k) = \delta_{j,k}$ だから,

$$(1_\pi \otimes a^*)(\bar{a} \otimes 1_\pi)(\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_k) = (1_\pi \otimes a^*) \sum_j \varepsilon_j \otimes \bar{\varepsilon}_j \otimes \varepsilon_k = \varepsilon_k \otimes \varepsilon_0.$$

ところで, $\pi = \pi \otimes 1 = 1 \otimes \pi$ だから, $(1_\pi \otimes a^*)(\bar{a} \otimes 1_\pi) = 1_\pi$, すなわち,

$$(8.7) \quad \rho_\pi(\gamma_{\pi \otimes \pi, 1}(a)^*) \gamma_{\pi \otimes \bar{\pi}, 1}(\bar{a}) = 1$$

となる. 再び, $\pi = \pi \otimes 1 = 1 \otimes \pi$ だから, $V(\varepsilon_0) = 1$ である.

また, $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $a \in \mathcal{G}_G(\pi', \pi)$ に対し, $V(a\xi) = \rho(\gamma_{\pi', \pi}(a)) V(\xi)$

であるから,

$$\begin{aligned} \rho(\gamma_{\pi \otimes \pi, i}(a)) &= \rho(\gamma_{\pi \otimes \pi, i}(a)) V(\varepsilon_0) = V(a \varepsilon_0) \\ &= \sum V(\bar{\varepsilon}_j \otimes \varepsilon_j) = \sum V(\bar{\varepsilon}_j) V(\varepsilon_j). \end{aligned}$$

したがって, 補題 8.2 により,

$$\begin{aligned} \sum V(\varepsilon_j) V(\varepsilon_j)^* &= \sum V(\varepsilon_j) \rho(\gamma_{\pi \otimes \pi, i}(a))^* V(\bar{\varepsilon}_j) \quad (\text{By (8.3)}) \\ &= \sum \rho(\rho_\pi(\gamma_{\pi \otimes \pi, i}(a))^*) V(\varepsilon_j) V(\bar{\varepsilon}_j) \quad (\text{By (7.5)}) \\ &= \rho(\rho_\pi(\gamma_{\pi \otimes \pi, i}(a))^*) V(a \varepsilon_0) \\ &= \rho(\rho_\pi(\gamma_{\pi \otimes \pi, i}(a))^* \eta_{\pi \otimes \bar{\pi}, i}(\bar{a})) = 1. \quad (\text{By (8.7)}) \end{aligned}$$

したがって, $V(\mathcal{H}_\pi)$ は $n_{x_p} \mathcal{R}$ の中のヒルベルト空間になる.

また, (8.2) 式により, $\hat{\rho}_t(V(\xi)) = V(\pi(t)\xi)$, $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ だから,

$\{\hat{\rho}, V(\mathcal{H}_\pi)\} \in \mathcal{M}_\rho(n_{x_p} \mathcal{R})$ となる.

(ii) これは

$$V(\eta)^* \hat{\rho}_t(V(\xi)) = V(\eta)^* V(\pi(t)\xi) = (\pi(t)\xi | \eta) 1$$

より明らか. 証了.

最後に $n_{x_p} \mathcal{R}$ における $\hat{\rho}$ の不動点を調べよう.

命題 8.3. $(n_{x_p} \mathcal{R})^{\hat{\rho}} = \rho(n)$.

証明. (8.1) により, $(n_{x_p} \mathcal{R})^{\hat{\rho}} \subset \rho(n)$ を示せばよい. もし $\pi \in \mathcal{R}$ が自明でない既約表現なら, $\int \pi(t)\xi dt = 0$ である.

したがって, $\{\pi, \mathcal{G}_\pi\}$ が既約なら, どの $\xi \in \mathcal{G}_\pi$ に対しても $V(\xi) \neq 0$ となる.

さて, E を $\mathcal{H}_\pi, \mathcal{R}$ から $(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{R})^{\hat{P}}$ への正規な期待値:

$$E(x) = \int \hat{p}_t(x) dt, \quad x \in \mathcal{H}_\pi, \mathcal{R}$$

とする. 任意な $y_j \in \mathcal{H}$, $\xi_j \in \mathcal{G}_{\pi_j}$ により, $\sum p(y_j) V(\xi_j)$ と表わされる元全体は $\mathcal{H}_\pi, \mathcal{R}$ で σ -弱位相に関して稠密で, しかも

$$E(\sum p(y_j) V(\xi_j)) = \sum p(y_j) V(\int \pi(t) \xi_j dt) \in p(\mathcal{H})$$

をみたすので, 補題が証明された.

§9 作用のスペクトル

前節の結果を念頭に, G が可換な場合に知られている作用のスペクトルを, 非可換な G による共変系 $\{M, G, \alpha\}$ に対しても考えることが出来る. G のユニタリ表現 $\{\pi, \mathcal{G}_\pi\}$ に対し

$$M^\alpha(\pi) = \{x \in M \otimes \mathcal{L}(\mathcal{G}_\pi) : (a_t \otimes 1)(x) = x(1 \otimes \pi(t))\}$$

と置く. 特に, π が既約な場合には, 対応する固有空間の役を果たしている.

命題 9.1 もし M^α が真無限型なら, 次の2条件は同値で

ある:

(i) $\mathcal{M}_\alpha(m)$ は $\{\pi, \mathcal{H}_\pi\}$ とユニタリ-同値な元を持つ.

(ii) $\mathcal{M}^\alpha(\pi)$ はユニタリ-作用素を持つ.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\{\alpha, \mathcal{H}\} \cong \{\pi, \mathcal{H}_\pi\}$ とする. $\mathcal{H}_0$ を $\mathcal{M}^\alpha$ α 中の $\mathcal{H}$ と同じ次元をもつヒルベルト空間, $\{v_1, \dots, v_d\}, \{w_1, \dots, w_d\}, \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ をそれぞれ $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\pi$ の正規直交基底とする. このとき, 基底の送込み方は

$$(9.1) \quad (\pi(t)\varepsilon_j | \varepsilon_k) = w_k^* \alpha_t(w_j)$$

と仮定できる. $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_\pi$ 上への等距離作用素 V を

$$(9.2) \quad V\xi = \sum v_j^* \xi \otimes \varepsilon_j, \quad \xi \in \mathcal{H}$$

で与えろと, $V^{-1} \sum \xi_j \otimes \varepsilon_j = \sum v_j \xi_j$ となる. ここで

$$W = V \sum w_j v_j^* V^{-1}$$

と置けば, W はユニタリ-である. さらに $T_{\xi, \eta} \zeta = (\zeta | \eta) \xi$

と置けば,

$$W = \sum v_j^* w_k \otimes T_{\varepsilon_j, \varepsilon_k} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$$

と表わせる. (9.1) 式より,

$$\begin{aligned} (\alpha_t \otimes 1)(W) &= \sum v_j^* \alpha_t(w_k) \otimes T_{\varepsilon_j, \varepsilon_k} = \sum v_j^* w_k w_k^* \alpha_t(w_l) \otimes T_{\varepsilon_j, \varepsilon_k} \\ &= \sum v_j^* w_k \otimes T_{\varepsilon_j, \pi(t)\varepsilon_k} = W(1 \otimes \pi(t)). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) W を $\mathcal{M}^\alpha(\pi)$ のユニタリ-作用素とする. $\mathcal{H}_0$ を $\mathcal{M}^\alpha$ の中の $\mathcal{H}_\pi$ と同じ次元をもつヒルベルト空間, $\{v_1, \dots, v_d\},$

$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\pi$ の正規直交基底とする. $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}_\pi$ 上への等距離作用素 V を (9.2) で定義する. ここで, $\omega_j = V^{-1} W V u_j$ とすれば, $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ は $\tilde{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{Ad}(m)$ の基底になる. 実際, 直接計算により,

$$(\alpha_t \otimes 1) \cdot \text{Ad}_V = \text{Ad}_V \cdot \alpha_t$$

$$V^{-1}(1 \otimes \pi(t))V = \sum_{j,k} (\pi(t)\varepsilon_j | \varepsilon_k) u_k u_j^*$$

を得るから,

$$\begin{aligned} \alpha_t(\omega_j) &= \alpha_t(V^{-1} W V) u_j = (V^{-1} W V)(V^{-1}(1 \otimes \pi(t))V) u_j \\ &= \sum_k (\pi(t)\varepsilon_j | \varepsilon_k) V^{-1} W V u_k = \sum_k (\pi(t)\varepsilon_j | \varepsilon_k) \omega_k. \end{aligned}$$

したがって, $\{\pi, \mathfrak{g}_\pi\} \cong \{\alpha, \tilde{\mathfrak{h}}\}$. 証了.

命題 9.2. もし $m\overline{\mathcal{R}}(G)$ のユニタリ-作用素 w が存在して, $(\alpha_t \otimes 1)(w^*) = w^*(1 \otimes \rho(t))$ ならば,

(i) G の任意な既約表現 $\{\pi, \mathfrak{g}_\pi\}$ に対し, $m^\alpha(\pi)$ はユニタリ-作用素を含んでいる.

(ii) $m\overline{\mathcal{R}}(G)'$ のユニタリ-作用素 w^β が存在して, $(\alpha_t \otimes 1)(w^\beta) = w^\beta(1 \otimes \lambda(t))$ をみたす.

証明. (i) 既約表現 $\{\pi, \mathfrak{g}_\pi\}$ に対しては, $\mathcal{R}(G)'$ の射影 e と $eL^2(G)$ から $\mathfrak{g}_\pi$ 上への等距離作用素 u が存在して

$$\{\pi, \mathfrak{g}_\pi\} = u\{\rho, L^2(G)\}_e u^*$$

となる. $e \in \mathcal{R}'(G)$ だから, $v = (1 \otimes u) w (1 \otimes u)^{-1}$ は $m \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ のユニタリー作用素で, しかも, $(\alpha_t \otimes 1)(v) = v(1 \otimes \pi(t))$ をみたす.

(ii) $w^J = (1 \otimes J) w^* (1 \otimes J)$ とすれば

$$(\alpha_t \otimes 1)(w^J) = \text{Ad}_{1 \otimes J} \circ (\alpha_t \otimes 1)(w^*) = w^J(1 \otimes \lambda(t)).$$

証了.

命題 9.3. もし α が双対作用で m^α が真無限型なら, m は m^α と $\mathcal{N}_\alpha(m)$ により生成されている.

証明. x を m の任意な元とする. 命題 9.1 と 9.2 により, 任意な既約表現 $\{\pi, \mathcal{H}_\pi\}$ とユニタリー同値な元 $\{\alpha, \beta\}$ が $\mathcal{N}_\alpha(m)$ に存在する. $\{e_1, \dots, e_d\}$ と $\{v_1, \dots, v_d\}$ を $\mathcal{H}_\pi$ と $\mathcal{H}$ の対応する正規直交基底とすれば,

$$(9.3) \quad \int (\pi(t) e_j | e_k)^* \alpha_t(x) dt = \xi(x v_j^*) v_k$$

となる. ただし, $\xi(y) = \int \alpha_t(y) dt$ である. ストーン-ワイエルシュトラスの定理により, $(\pi(t) \xi | \eta)$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ なる形をした G 上の関数全体は G の点を分離するので, $C(G)$ でノルム稠密である. したがって, G の単位元でのディラック関数を $(\pi(t) \xi | \eta)$ の 1 次結合で近似することにより, (9.3) の左辺は x に収束させることができる. 証了.

§ 10 二種の接合積の同値性

これまでの結果と総合して、我々の目的であった、Co-作用による接合積と、Roberts の作用の接合積が同値なことを示す。

定理 10.1. G は可分コンパクト群, $\mathcal{H}$ は可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のフォン・ノイマン環とする。

(i) δ が G の $\mathcal{H}$ 上への Co-作用ならば, 右正則表現と準同値な元を持つ表現環 $\mathcal{R}$ と, $\mathcal{R}$ の $\mathcal{H}$ 上への Roberts の作用 $\{\rho, \eta\}$ が存在して

$$(10.1) \quad \{\mathcal{H} \rtimes_{\delta} G, \hat{\delta}\} \cong \{\mathcal{H} \rtimes_{\rho} \mathcal{R}, \hat{\rho}\}.$$

(ii) $\mathcal{R}$ が右正則表現と準同値な元を持つ表現環で, $\{\rho, \eta\}$ が $\mathcal{R}$ の $\mathcal{H}$ 上への Roberts の作用ならば, (10.1) をみたす G の $\mathcal{H}$ 上への Co-作用 δ が在る。

この定理からわかるように, 次の手順の構成

$$\{\mathcal{H}, G, \delta_1\} \xrightarrow{\text{ii)}} \{\mathcal{H}, \mathcal{R}, \{\rho, \eta\}\} \xrightarrow{\text{i)}} \{\mathcal{H}, G, \delta_2\}$$

を行くと, $\{\mathcal{H} \rtimes_{\delta_1} G, \hat{\delta}_1\} \cong \{\mathcal{H} \rtimes_{\delta_2} G, \hat{\delta}_2\}$ となる。つまり,

$\mathcal{H} \rtimes_{\delta_1} G$ から $\mathcal{H} \rtimes_{\delta_2} G$ 上への同型写像 π が存在して

$$(\pi \otimes 1) \cdot \hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_2 \cdot \pi$$

となる. このとき, $\pi \circ \delta_1(n) = \delta_2(n)$ だから, $\pi \in \text{Aut}(N)$ が存在して, $\pi \circ \delta_1(y) = \delta_2 \circ \pi(y)$ と書け, しかも, $N \rtimes_{\delta_1} G$ 上で $\pi = \pi \otimes 1$ となる. したがって,

$$(\pi \otimes 1) \circ \delta_1 = \delta_2 \circ \pi,$$

つまり, $\{N, \delta_1\} \cong \{N, \delta_2\}$ である.

同様に

$$\{N, \mathcal{R}_1, \{p_1, \eta_1\}\} \xrightarrow{(ii)} \{N, G, \delta\} \xrightarrow{(i)} \{N, \mathcal{R}_2, \{p_2, \eta_2\}\}$$

を考えると, $\{N \rtimes_{\mathcal{R}_1} \hat{p}_1\} \cong \{N \rtimes_{\mathcal{R}_2} \hat{p}_2\}$ である. これから, Roberts の作用の共変系の同値性を導くには若干の準備が必要となるが, $p_1(N)$ および $p_2(N)$ に対し, 命題 8.1 で $\mathcal{R}_1$ および $\mathcal{R}_2$ の中に実現されていることを見れば, ほぼ想像がわくだろう.

定理の証明に入る前に次の補題を用意する.

補題 10.2. $\mathcal{M}_\alpha(m)$ が G のすべての既約表現とユニタリー同値な元を含んでおり, 作用 α が G のユニタリー表現 u により $\alpha(x) = u(x \otimes 1)u^*$ と表わされていれば, u の不動点全体は m に因って巡回的である.

証明. G の既約表現の同値類全体を $\hat{G}$ とする. $p \in \hat{G}$ の $\mathcal{M}_\alpha(m)$ での代表元を $\{\alpha, \alpha_p\}$ とする. α_p の正規直交基底を $\{v_1, \dots, v_d\}$ とすれば, u の p の固有空間への射影 E_p は

$$E_{\bar{p}} = n \int \sum_{j=1}^d v_j^* \alpha_t(v_j) u(t) dt$$

で与えられる. ここで, $i \in \hat{G}$ を G の自明な表現とすれば

E_i は u の不動点全体への射影に外ならない. また

$$E_{\bar{p}} = n \sum_{j=1}^d v_j^* \int u(t) dt v_j = n \sum_{j=1}^d v_j^* E_i v_j$$

で, しかも, $\sum_{p \in \hat{G}} E_p = 1$ であるから, u の不動点全体は m に亙って巡回的である. 証了.

定理 10.1 の証明. (i) $\{m, \alpha\} = \{n \times_p G, \delta\}$ とおく. $\mathcal{R} = \mathcal{M}_\alpha(m)$ は G の表現環である. §§ 6, 7 で調べたように

$$p_\pi = \delta^{-1} \circ p_{\mathcal{R}\pi} \circ \delta, \quad \mathcal{R}\pi \in \mathcal{R}$$

$$\gamma_{\pi, \pi'}(u) = \delta^{-1}(u), \quad u \in \mathcal{I}_G(\pi, \pi')$$

とすれば, $\{p, \gamma\}$ は $\mathcal{R}$ の $\mathcal{N}$ 上への Roberts の作用である.

α は双対作用だから, 定理 5.2 により, $(\alpha_t \otimes \iota)(w^*) = w^*(1 \otimes p(t))$ をみたす $m \otimes \mathcal{R}(G)$ のユニタリー作用素 w が存在する. さらに, m^α は真無限型だから, 命題 9.1 により, $\mathcal{R}$ は右正則表現と準同値な表現 $\{\pi_r, \mathcal{R}\pi_r\}$ を含んでいる. したがって, 接合積 $n \times_p \mathcal{R}$ を作ることができる. ここで, $\mathcal{R} \otimes L^2(G)$ から $\mathcal{R} \otimes \mathbb{C}1$ への射影を E_0 とし, $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R} \otimes \mathbb{C}1$ と同一視すれば,

$$(10.2) \quad E_0 \delta(y) = \delta(y) E_0 = y, \quad y \in \mathcal{N}$$

$$(10.3) \quad E_0 u = u E_0 = \gamma_{\pi, \pi'}(u), \quad u \in \mathcal{I}_G(\pi, \pi').$$

さて, 各 $\xi \in \mathcal{H} \otimes L^2(G)$ に対して Φ_ξ を

$$\Phi_\xi(\pi)a = E_0 a \xi, \quad a \in \mathcal{H}_\pi, \quad \pi \in \mathcal{R}$$

で与えらるゝと, Φ_ξ は $\sum_{\pi \in \mathcal{R}} \mathcal{H}_\pi$ から $\mathcal{H}$ への有界な線形写像で,
しかも, $\Phi_\xi \in F_0(\rho, \mathcal{H})$. 実際, もし $\psi \in \mathcal{G}_\mathcal{H}(\pi', \pi)$ ならば,
(10.3) により

$$\Phi_\xi(\pi')\psi a = E_0 \psi a \xi = \gamma_{\pi', \pi}(\psi) E_0 a \xi = \gamma_{\pi', \pi}(\psi) \Phi_\xi(\pi)a.$$

さらに, もし $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $f, g \in L^2(G)$, $a, \psi \in \mathcal{H}_\pi$ ならば,

$$\begin{aligned} (\Phi_{\eta \otimes g}(\pi_r)^* \Phi_{\xi \otimes f}(\pi_r)a | \psi) &= (\psi^* E_0 a (\xi \otimes f) | \eta \otimes g) \\ &= \int (\psi^* (1 \otimes \lambda(t)) a (\xi \otimes f) | \eta \otimes g) dt \\ &= \int \psi^* \hat{\delta}_t(a) (\xi | \eta) (\lambda(t)f | g) dt. \end{aligned}$$

a, ψ は $\mathcal{H}_\pi$ の元だから T から

$$\Phi_{\eta \otimes g}(\pi_r)^* \Phi_{\xi \otimes f}(\pi_r) = (\xi | \eta) \pi(\varphi), \quad \varphi(t) = (\lambda(t)f | g)$$

となる. $\mathcal{R}(G)$ 上のプランシェレル重み $\psi_\mathcal{H}$ を使うと

$$\|\Phi_{\xi \otimes f}\|^2 = \psi_\mathcal{H}(\theta(\Phi_{\xi \otimes f}(\pi_r)^* \Phi_{\xi \otimes f}(\pi_r))) = \|\xi \otimes f\|^2.$$

したがって, $\mathcal{H} \otimes L^2(G)$ から $L^2(\rho, \mathcal{H})$ の 中へ の等距離写像

W が $W\xi = \Phi_\xi$ で与えられる.

次に, (10.2) と (10.3) を使って

$$(10.4) \quad W\delta(y) = \rho(y)W, \quad y \in \mathcal{H},$$

$$(10.5) \quad Wa = V(a)W, \quad a \in \mathcal{H}_\pi,$$

$$(10.6) \quad W(1 \otimes \lambda(t)) = U(t)W, \quad t \in G$$

を示そう. もし $\xi \in \mathcal{H} \otimes L^2(G)$ から $\psi \in \mathcal{H}_\pi$ ならば, $\Phi_{\delta(y)\xi}(\pi)\psi$

$$\begin{aligned}
&= E_0 \psi \delta(y) \zeta = E_0 \rho_{\pi}(y) \psi \zeta = \rho_{\pi}(y) E_0 \psi \zeta = \delta(\rho_{\pi}(y)) E_0 \psi \zeta \\
&= \rho_{\pi}(y) E_0 \psi \zeta = \rho_{\pi}(y) \Phi_{\zeta}(\pi) \psi \quad \text{となる. したがって,}
\end{aligned}$$

$$W \delta(y) \zeta = \Phi_{\delta(y) \zeta} = \rho(y) \Phi_{\zeta} = \rho(y) W \zeta.$$

$$\begin{aligned}
&\text{もし } \zeta \in \mathcal{H} \otimes L^2(G) \text{ かつ } \psi \in \mathcal{H}_{\pi} \text{ ならば, } \Phi_{\zeta} \psi_{\mathcal{R}}(a) \psi = \Phi_{\zeta} \psi a \\
&= E_0 \psi a \zeta = \Phi_{a \zeta}(\pi) \psi. \quad \text{したがって,}
\end{aligned}$$

$$W \psi \zeta = \Phi_{a \zeta} = \Phi_{\zeta} \psi_{\mathcal{R}}(a) = V(a) \Phi_{\zeta} = V(a) W \zeta.$$

$$\begin{aligned}
&\text{もし } \zeta \in \mathcal{H} \otimes L^2(G) \text{ かつ } \psi \in \mathcal{H}_{\pi} \text{ ならば, } \Phi_{(1 \otimes \lambda(t)) \zeta}(\pi) \psi = \\
&E_0 \psi (1 \otimes \lambda(t)) \zeta = E_0 \hat{\delta}_t^{-1}(\psi) \zeta = \Phi_{\zeta} \hat{\delta}_t^{-1}(\psi) = (\Phi_{\zeta} \pi_{\mathcal{R}}(t)^{-1})(\pi) \psi. \quad \text{したがって}
\end{aligned}$$

$$W (1 \otimes \lambda(t)) \zeta = \Phi_{(1 \otimes \lambda(t)) \zeta} = \Phi_{\zeta} \pi_{\mathcal{R}}(t)^{-1} = U(t) W \zeta.$$

上の (10.4), (10.5), (10.6) を使って, W が $\mathcal{H} \otimes L^2(G)$ から $L^2(p, \mathcal{H})$ の 上へ の写像であることを示そう. 先ず, $\Phi = U(t) \Phi (= \Phi \pi_{\mathcal{R}}(t)^{-1})$, $t \in G$ とする. 自明でない既約表現 $\{\pi, \mathcal{H}_{\pi}\}$ に対しては, $\Phi(\pi) = 0$ である. もし $\{\pi, \mathcal{H}_{\pi}\}$ が自明な表現なら, $\mathcal{H}_{\pi} \subset \delta(\mathcal{H})$ である. これは (10.2) によれば, $\rho_{\pi}(y)$ が $\mathcal{H}$ のユニタリー作用素 u_{π} により $u_{\pi} y u_{\pi}^*$ と表わされることである. したがって, もし $\{\pi, \mathcal{H}_{\pi}\}, \{\pi', \mathcal{H}_{\pi'}\}$ 共に自明なら, $\mathcal{H}_{\pi} = \mathbb{C} \delta(u_{\pi})$, $\mathcal{H}_{\pi'} = \mathbb{C} \delta(u_{\pi'})$ なる $\mathcal{H}$ のユニタリー作用素 u_{π} , $u_{\pi'}$ が存在する. 任意な $a \in \mathcal{G}_G(\pi, \pi')$ は $\mu \delta(u_{\pi} u_{\pi'}^*)$, $\mu \in \mathbb{C}$ と表わされているから, (10.3) により $\gamma_{\pi, \pi'}(a) = \mu u_{\pi'} u_{\pi}^*$ となる. ここで, 自明な表現 $\pi \in \mathcal{R}$ に

対して, $\xi_\pi = \Phi(\pi)\delta(u_\pi)$ とすれば, $\Phi = \Phi_{u_\pi^* \xi_\pi \otimes 1}$ となる.

実際に, π, π' を自明な表現とすれば

$$\begin{aligned}\Phi_{u_\pi^* \xi_\pi \otimes 1}(\pi)\delta(u_\pi) &= E_0\delta(u_\pi)(u_\pi^* \xi_\pi \otimes 1) = \xi_\pi = \Phi(\pi)\delta(u_\pi), \\ \Phi_{u_\pi^* \xi_\pi \otimes 1}(\pi')\delta(u_{\pi'}) &= u_{\pi'} u_\pi^* \xi_\pi = \mu^{-1}\gamma_{\pi', \pi}(a)\xi_\pi \\ &= \mu^{-1}\gamma_{\pi', \pi}(a)\Phi(\pi)\delta(u_\pi) = \mu^{-1}\Phi(\pi')a\delta(u_\pi) = \Phi(\pi')\delta(u_{\pi'}).\end{aligned}$$

したがって, Φ は $WE_0\mathcal{C}$ の元である. これより

$$(10.7) \quad WE_0\mathcal{C} = \{\Phi \in L^2(\rho, \mathcal{C}) : U(t)\Phi = \Phi, t \in G\}$$

となる事がわかる. $\mathcal{R}$ は右正則表現と準同値な表現を含んでいるので, 命題 8.1 により, $\mathcal{N}_\rho(\mathcal{N}_{X_p}\mathcal{R})$ は任意の既約表現とユニタリ同値な元を含んでいる. したがって, 補題 10.2 により, (10.7) の右辺は $\mathcal{N}_{X_p}\mathcal{R}$ に関して巡回的である. したがって, (10.2) と (10.3) により, W の値域は $L^2(\rho, \mathcal{C})$ 全体となる事がわかる.

最後に, 命題 9.3 を使えば, $\mathcal{N}_{X_0}G$ は $\delta(\mathcal{N})$ と既約な $\pi \in \mathcal{R}$ に対応する $\mathcal{C}_\pi$ 全体により生成されるので, (10.4) と (10.5) により, Ad_W は $\mathcal{N}_{X_0}G$ から $\mathcal{N}_{X_p}\mathcal{R}$ の上への同型写像を与えている. さらに, (10.6) は, この同型写像が $\hat{\delta}$ を $\hat{\rho}$ へ移していることもわかる.

(ii) $\mathcal{R}$ は右正則表現と準同値な表現を含むから, 接合積 $\mathcal{N}_{X_p}\mathcal{R}$ を考えることができる. ここで, $\{m, \alpha\} \cong \{\mathcal{N}_{X_p}\mathcal{R}, \hat{\rho}\}$ とおく. 命題 8.1 により, $\mathcal{N}_\alpha(m)$ は右正則表現と同値な表

現を含む。また $\mathcal{M}$ は真無限型だから、命題 9.1 により、 $\mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$ にユニタリ作用素 w が存在して、 $(\alpha_t \otimes 1)(w^*) = w^*(1 \otimes \rho(t))$ 。したがって、命題 9.2 (ii) により、 $\{\bar{m}, \bar{\alpha}\} \cong \{\bar{m}, \bar{\alpha}'\}$ 、ただし、 $\bar{m} = \mathcal{M} \bar{\otimes} \mathcal{L}(L^2(G))$ かつ $\bar{\alpha} = (1 \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes 1)$ 。 $\mathcal{M}^a$ は真無限型であるから、 $\{m, \alpha\} \cong \{\bar{m}, \bar{\alpha}\}$ 。したがって、 α は双対作用である。証了。

主 要 引 用 文 献

- [1] Araki, H., Kastler, D., Takesaki, M. and Haag, R.
 Extention of KMS states and chemical potential.
Commun. math. Phys., 53(1977), 97-134.
- [2] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J. E.
 Fields, observables and gauge transformations.
 I. *Commun. math. Phys.*, 13(1969), 1-23;
 II. *ibid.*, 15(1969), 173-200.
 Local observables and particle statistics.
 I. *ibid.*, 23(1971), 199-230.
 II. *ibid.*, 35(1974), 49-85.
- [3] Doplicher, S. and Roberts, J. E.
 Fields, statistics and non-abelian gauge groups.

Commun. math. Phys., 28(1972), 331–348.

[4] Haga, Y.

Cross products of von Neumann algebras by compact groups.

Tôhoku Math. J., 28(1976), 511–522.

[5] Landstad, M. B.

Duality theory for covariant systems.

Trans. Amer. Math. Soc.

Duality for dual covariance algebras.

Commun. math. Phys., 52(1977), 191–202.

[6] Nakagami, Y.

Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group.

Publ. RIMS, Kyoto Univ., 12(1977), 727–775.

Essential spectrum $\Gamma(\beta)$ of a dual action on a von Neumann algebra.

Pacific J. Math. 46 (1977),

[7] Roberts, J. E.

Cross products of von Neumann algebras by group duals.

Inst. Nazionale di Alta Mat. Symposia Math. 20 (1976)

[8] Strătilă, D., Voiculescu, D. and Zsidó, L.

On crossed products.

I. *Rev. Roumaine Math.*, 21 (1976), 1411-1449;

II. *ibid.*, 22 (1977), 83-117.

[9] Takesaki, M.

Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III.

Acta Math., 131 (1973), 249-310.

他の関連文献は [6, 8] に詳しく挙げられている。オ1部は主として [5, 6, 8] を, オ2部は [7] を参考にした。