

微分可能な力学系の生成的性質について

名大 教養部 白岩謙一

池上宜弘

§ 0. 序. 微分可能な力学系の理論において, 生成的性質の研究は最も重要であった. ここでは, 現在までに知られている生成的性質について概観する. 第一章では一般の力学系に関する生成的性質について, 第二章では保存系に関する生成的性質について述べる. Baire空間の要素に関する性質 P が生成的であるとは, 適当な Baire 集合があって, その各要素に対して P が成立することである.

第一章. 一般の微分可能な力学系について.

§ 1. Kupka-Smale の定理.

M を C^∞ 多様体とする. $\mathcal{D}^r(M)$ を M 上の C^r 級微分同相写像全体に Whitney 位相を入れた空間とし, $\mathcal{X}^r(M)$ を M 上の C^r 級ベクトル場全体に Whitney C^r 位相を入れた空間とする. $\mathcal{D}^r(M)$, $\mathcal{X}^r(M)$ は $1 \leq r \leq \infty$ で Baire 空間である.

α を $f \in \mathcal{D}^r(M)$ の不動点とする. α が 双曲型 であるとは, $T_\alpha f: T_\alpha(M) \rightarrow T_\alpha(M)$ の固有値の絶対値が皆 1 とならないことである. f の周期点 α が双曲型であるとは, α の基本周期を p とするとき α は f^p の双曲型不動点であることである. α を $X \in \mathcal{X}^r(M)$ の特異点 ($X_\alpha = 0$) とする. $\exp(T_\alpha X)$ の固有値の絶対値が皆 1 とならないとき α が双曲的であるという. γ を周期 τ の X の閉軌道とすると, γ が双曲的であるとは, γ 上の点 α に於て, $T_\alpha \varphi_\tau$ の固有値の絶対値が軌道方向の固有値の他は 1 とならないことである. 但し, φ_t は X に対応する流れとする. X の特異点と閉軌道を X の critical element という.

$\alpha \in M$ を通る f の 安定集合 $W_f^s(\alpha)$, 不安定集合 $W_f^u(\alpha)$ は次のように定義される. d を任意に与えた M の距離とすると,

$$W_f^s(\alpha) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(\alpha), f^n(y)) = 0\},$$

$$W_f^u(\alpha) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(\alpha), f^{-n}(y)) = 0\},$$

$X \in \mathcal{X}^r(M)$ に対する $W_X^s(\alpha)$, $W_X^u(\alpha)$ は次のように定義される,

$$W_X^s(\alpha) = \{y \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(\alpha), \varphi_t(y)) = 0\},$$

$$W_X^u(\alpha) = \{y \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_{-t}(\alpha), \varphi_{-t}(y)) = 0\}.$$

Λ を M の部分集合とすると, 力学系 f 又は X に対する Λ の安定・不安定集合は, $W^s(\Lambda) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} W^s(\alpha)$, $W^u(\Lambda) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} W^u(\alpha)$ により定義される.

f の周期点 α が双曲型ならば $W_f^s(\alpha)$, $W_f^u(\alpha)$ は euclidean space

を injective に C^r immerse した多様体で [3], X の critical element が双曲型ならば $W_X^s(\gamma), W_X^u(\gamma)$ (又は $W_X^s(x), W_X^u(x)$) は injective に C^r immerse された多様体である [30].

定理 1. (Kupka-Smale の定理). [5], [30], [15].

$r \geq 1$ とするとき, $\mathcal{D}^r(M), \mathcal{X}^r(M)$ に於ける次の性質は生成的である. (M は noncompact でもよい.)

- (i) 全ての不動点, 周期点; critical element は双曲型.
- (ii) 全ての不動点, 周期点; critical element の W^s や W^u は全て互に横断的交わりを持つ.

§ 2. Closing lemma とその応用.

定理 2. (Closing lemma [18]).

M を compact, $X \in \mathcal{X}^1(M)$, x は X の非遊走集合 $\Omega(X)$ の点とする. このとき $\mathcal{X}^1(M)$ に於て, X に任意の近くに Y が存在して, x は Y の閉軌道に含まれる.

次の $\mathcal{D}^1(M)$ に関する closing lemma は [20] の結果より導くことができる.

定理 2'. M を compact, $f \in \mathcal{D}^1(M)$, $x \in \Omega(f)$ とする. このとき, $\mathcal{D}^1(M)$ に於て f に任意の近くに g が存在して, x は g の周期点となる.

C^2 級の closing lemma は期待できるであろう [19].

closing lemma より次の定理が導かれる. $\Omega(X), \Omega(f)$ は各々 X, f の非遡走集合としている. 又 $\Gamma(X), \Gamma(f)$ を各々 X の critical element に含まれる軌の集合, f の不動点, 周期点の集合とする.

定理3. (General density theorem [18]). M が compact とするとき $\mathcal{X}^1(M)$ に於て $\Omega(X) = \overline{\Gamma(X)}$ なる性質は生成的である.

定理3'. ([20]) M が compact とするとき, $\mathcal{D}^1(M)$ に於て $\Omega(f) = \overline{\Gamma(f)}$ は生成的に成立する.

$X \in \mathcal{X}^1(M)$ の第1積分とは, 次の条件を満たす C^1 級の関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ である; (i) r は M の次元, (ii) M の任意の開集合上で f は定数ではない, (iii) $L_X f = 0$ (即ち X の流れは f を保存する.). 次の定理も closing lemma を使って証明された.

定理4. (Peixoto [16]). M が compact のとき, $\mathcal{X}^1(M)$ に於て, 生成的に X は第1積分を持たない.

第1積分に関しては Arzant [2] の結果がある.

§3. 構造安定性, Ω -爆発,

構造安定性の概念ができた頃より, これは生成的かという事が問題となった. $\mathcal{X}^r(M)$ では M が compact 2次元のときは生成的であり, $\mathcal{D}^r(M)$ では $M = S^1$ のときは生成的である ([19]). 一方, 2次元以上の non-compact 多様体では, 構造安定でないよう

なベクトル場からなる開集合が $\mathcal{X}^r(M)$ に存在する ([17]). 又 M が 2次元以上で compact ならば常に $\mathcal{D}^r(M)$ に構造安定である要素からなる開集合が存在する.

構造安定性を持徴づけようという試みから Smale が定義した次の概念がある.

Axiom A.

(a) Ω は双曲型集合である. この意味は $f \in \mathcal{D}^r(M)$ の場合は $T(M)|_{\Omega} = E^u \oplus E^s$ なる splitting が存在し, $X \in \mathcal{X}^r(M)$ の場合は Ω_0 を特異点の集合, $\Omega_1 \in \Omega(X) - \Omega_0$ とするとき, $T(M)|_{\Omega_0} = E^u \oplus E^s$, $T(M)|_{\Omega_1} = E^u \oplus E^s \oplus E^X$ なる splitting が存在することである. 但し $t > 0$, $n > 0$ に対して Tf, Tg_t は E^u では expand し, E^s では contract する. そして E^X はベクトル場 X で張られるものとする.

(b) $\Omega = \overline{\Gamma}$.

ST. (Strong transversality property): 任意の $\alpha \in M$ に対して, $W^s(\alpha)$ と $W^u(\alpha)$ は横断的交わりを持つ. (Axiom Aのもとでは $W^s(\alpha), W^u(\alpha)$ は immerse した多様体である.)

構造安定性については次の結果が得られている. 定理5の $2 \leq r \leq \infty$ は [22], $r=1$ は [24] の結果であり, 定理5' は [25] の結果である.

定理5. M が compact, $1 \leq r \leq \infty$ とする. $f \in \mathcal{D}^r(M)$ が Axiom

A と ST をみたせば, f は $\mathcal{D}^r(M)$ の中で構造安定である.

定理 5'. M を compact とする. $X \in \mathcal{X}^r(M)$ が Axiom A と ST をみたせば, X は $\mathcal{X}^r(M)$ の中で構造安定である, $r \geq 1$.

他に compact や open 多様体上の力学系の Ω -構造安定性についての仕事 [31], [21], [8] 等がある.

定理 6. (Shub [26]) M を compact とするとき, $\mathcal{D}^r(M)$ の中で構造安定な $f \in \mathcal{D}^r(M)$ は $\mathcal{D}^0(M)$ の中に稠密に存在する.

次に Ω -爆発について述べる.

定義. $f \in \mathcal{D}^r(M)$, $0 \leq r \leq \infty$, の filtration とは境界を持つ多様体の列 $M = M_k \supset \dots \supset M_0 = \emptyset$ で $f(M_i) \subset \text{Int } M_i$, $\text{Int } M_i \supset M_{i-1}$ をみたすものである. C^0 位相で f に近い g は f と同じ filtration を持つ. $K_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - \text{Int } M_{i-1})$ は $M_i - M_{i-1}$ に含まれる最大の不变集合である. 特に $K_i = \Omega(f) \cap (M_i - M_{i-1})$ のとき, この filtration は fine であるという.

Ω の分解 $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$ で, 次の条件をみたすものを Ω -分解 という; (i) $\forall \Omega_i$ は閉不变集合, (ii) $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ ($i \neq j$), (iii) Ω_i は topologically transitive. $(W^u(\Omega_i) - \Omega_i) \cap (W^s(\Omega_j) - \Omega_j) \neq \emptyset$ のとき $\Omega_j < \Omega_i$ と書く. そして, $\Omega_{i_0} < \Omega_{i_1} < \dots < \Omega_{i_l} = \Omega_{i_0}$ ($l \geq 1$) なる $(\Omega_{i_0}, \dots, \Omega_{i_l})$ を cycle という.

定理 [27] $f \in \mathcal{D}^r(M)$ が fine filtration を持ったための必要+

分条件は, f が cycle のない Ω -分解を持つことである.

f の filtration の列 $\{M = M_{k_d}^\alpha \supset \dots \supset M_1^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, n}$ が fine sequence of filtration であるとは, (i) $\forall i \exists j M_i^\alpha - M_{i-1}^\alpha \subset M_j^{\alpha-1} - M_{j-1}^{\alpha-1}$, (ii) $\bigcap_{\alpha > 0} K^\alpha = \Omega(f)$, (但し, K_i^α を上の K_i と同様なものとするとき, $K^\alpha = \bigcup_i K_i^\alpha$ とする.) f が C^r Ω -爆発 を持たないとは, 任意の開近傍 $U(\Omega(f))$ に対して, f の近傍 $N(f) \subset D^r(M)$ が存在して, 任意の $g \in N(f)$ に対して $\Omega(g) \subset U(\Omega(f))$ であることである.

定理 [28], $f \in D^0(M)$ が C^0 Ω -爆発を持たないための必要十分条件は f が fine sequence of filtration を持つことである.

定理 7. (Palis-Shub-Sullivan [13]), $\dim M \neq 4$ のとき, $D^0(M)$ の中で fine sequence of filtration を持つもの (従って C^0 Ω -爆発を持たないもの) は生成的に存在する.

次に ζ -関数について述べる. $f \in D^r(M)$ に対して $N_p(f)$ を f^p の不動点の個数とする. このとき f の ζ -関数 は $\zeta(f, t) = \exp\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} N_p(f) t^p\right)$ で定義される. Manning は [6] に f が Axiom A をみたせば ζ は有理関数であることを示した. 一方 Simon は $D^r(3\text{-torus})$ の中では, ζ が有理関数であるようなものは生成的でないことを示した [29].

§ 4. Bifurcation.

$\Phi^r(\Lambda)$ を多様体 Λ から $\mathcal{X}^r(M)$ への C^r 写像 ξ の全体に C^r 位相を入れた空間とする. 但し, ξ が C^r 級であるとは $\hat{\xi}(x, \lambda) = \xi(\lambda)(x)$ が $M \times \Lambda$ 上で C^r 級であることである. $\Sigma(\xi) \subset \Lambda$ を $\xi(\lambda)$ が構造安定なベクトル場であるような λ の全体から成る部分集合とする. このとき $\Lambda - \Sigma(\xi) = \Lambda_1(\xi)$ を ξ の bifurcation set という. $\xi(\lambda_1)$ と $\xi(\lambda_2)$ が位相的に同値でないような 2 つの構造安定な族の中にあるときは $\lambda \in \Lambda$ が存在して $\xi(\lambda)$ は構造安定でなくなる. しかも $\Phi^r(\Lambda)$ の中で ξ を少々動かしても同じことがなりたつ. このように bifurcation を除くことができなくても, bifurcation のきれいな表現 (しかも生成的に存在するようなもの) を探することを目的とする. ここでは, この様な目的で力学系の bifurcation を取扱ったもののうちで代表的なものを紹介し, 他の文献も掲げておく.

次に示すのは [32] の一般化である Sotomayor [33] の結果である.

力学系の不動点, 周期点, 特異点, 周期軌道が双曲型でない場合, 力学系はこれ等の近くで局所的に安定でない. x を M の C^r 級微分同相写像 f の不動点とする. $T_x f$ を保つ $T_x M$ の splitting $E^c \oplus E^u \oplus E^s$ が存在して, $T_x f|E^c$, $T_x f|E^u$, $T_x f|E^s$ の固有値の絶対値は各々 1 , > 1 , < 1 となる. ($E^c = \{0\}$ のとき x は双曲型となる.) すると局所部分多様体 W^c , W^{cu} , W^{cs} が存在し

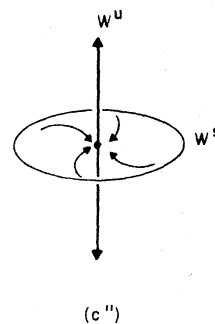
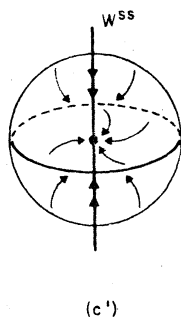
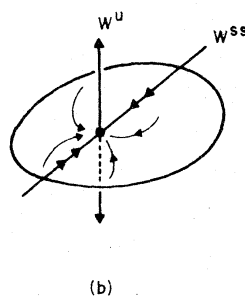
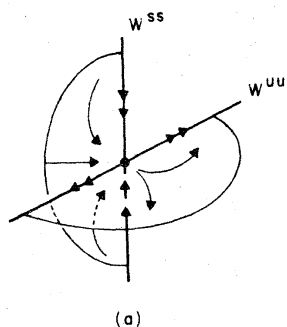
て, f -invariant で x に於て 各々 E^c , $E^c \oplus E^u$, $E^c \oplus E^s$ に接する.
 これ等は一意的には存在しないが, どの様にとっても x に於て
 γ 次の contact を持つ. 又 E^u , E^s に x で接する局所多様体 W^{uu} ,
 W^{ss} が一意的に存在する.

x が 準双曲型 (quasi-hyperbolic) であるとは, ある W^c に対
 して, $f|_{W^c}$ が次のうちの 1 つの写像と C^r conjugate となること;

- (a) $x \mapsto x + ax^2 + o(x^2)$, $a \neq 0$, x は十分小さい実数,
- (b) $x \mapsto -x + \alpha x^2 + \gamma x^3 + o(|x|^3)$, $\gamma + \alpha^2 \neq 0$, x は十分小,
- (c) $z \mapsto \lambda z + \beta |z|^2 z + o(|z|^3)$, $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4 \neq 1$, $\operatorname{Re}(\frac{\beta}{\lambda}) \neq 0$,

z は十分小さい複素数とする. ($|\lambda| = 1$).

(b) に於て $\gamma + \alpha^2 > 0$ ならば $f|_{W^c}$ は x に向う attractor となり, (c)
 に於て $\operatorname{Re}(\frac{\beta}{\lambda}) < 0$ ならば $f|_{W^c}$ は attractor となる. 次に 3 次元
 の場合の図の例を示しておく.



x を M のベクトル場 X の特異点とするとき, x が準双曲型であるとは, ある $t > 0$ に対して x が $\phi_t: M \rightarrow M$ の準双曲型不動点となることである(但し ϕ_t は X の流れとする). 同様に X の周期軌道 γ が準双曲型であるとは $x \in \gamma$ が γ の Poincaré 写像の準双曲型不動点となることである.

$\Theta(\xi) = \{(x, \lambda) \in M \times \Lambda \mid x \text{ は } \xi(\lambda) \text{ の準双曲型 critical element に入っている}\}$ とおくと, $S_1(\xi)$ を projection $M \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ による $\Theta(\xi)$ の像とする. このとき, 次は Sotomayor の結果である.

定理 8. Λ を compact 1 次元多様体とすると, $\Gamma^r (r \geq 5)$ を次の条件を持つ $\xi \in \Phi^r(\Lambda)$ の全体とすれば, Γ^r は $\Phi^r(\Lambda)$ 中の Baire 集合である. (1). $\xi(\lambda)$ は任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して双曲型又は準双曲型の critical element しか持たない. しかも準双曲型の critical element はある横断性に関する条件をみたす. (2). 準双曲型の critical elements に対する $S_1(\xi)$ は互に交わらない.

詳しくは, この講究録の中の, 松元重則「力学系の分岐」を参照されたい.

他に微分同相写像の bifurcation の生成的性質に関する [9], [10] などの最近の結果がある.

§ 5. 生成的性質に関する予想.

予想 1. (Smale 1971). 全ての安定集合 $W^s(x)$ がなめらかな多様体であることは $\mathcal{D}^r(M)$, $\mathcal{X}^r(M)$ で生成的である.

予想 2. (Shub-Smale [28]). 微分同相写像の *fine sequence of filtration* は生成的に存在する.

次に Lyapunov 関数について述べる. 任意の $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ は *nondegenerate* な特異点しか持たないような $\bar{f}$ で近似できるが更に少し動かして, $\bar{f}$ に対して $-\text{grad } \bar{f}$ は閉軌道を持たない Morse-Smale ベクトル場となるようにできる. このとき, $-\text{grad } \bar{f}$ は構造安定になる. この様な考え方を発展させたものを次に紹介する. φ_t を X の流れとする.

$X \in \mathcal{X}^r(M)$, Λ を X の不変閉集合とある. このとき $L_X: M \rightarrow \mathbb{R}_+$ が次の条件を持つとき (X, Λ) に対する Lyapunov 関数であるという; L_X の *critical set* $= \Lambda$, $M - \Lambda$ 上で $\langle \text{grad } L_X, X \rangle < 0$ (適当な M の Riemannian metric に対して), そして L_X は少なくとも $C^{\dim M}$ 級である. 特に $\Lambda = \Omega(X)$ のとき単に X に対する Lyapunov 関数 という.

なめらかな境界を持つ部分多様体の列 $\phi = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$ が次の条件を持つとき流れ φ_t の filtration という; $M_i \subset \text{Int } M_{i+1}$, $\varphi_t(M_i) \subset \text{Int}(M_i) \quad \forall t > 0$, $\varphi_t(x)$ は ∂M_i と横断的に交わる $\forall x \in M$, $0 < i < k$. filtration が $K_i = \bigcap_{t > 0} \varphi_t(M_i - M_{i-1}) =$

$\Omega(X) \cap (M_i - M_{i-1})$ をみたすとき fine であるという.

定理[21]. $K = \bigcup_{i=1}^k K_i$ とする. このとき (X, K) の C^∞ 級の Lyapunov 関数で $L_X(K_i) = i$ となるものが存在する.

又この定理から次が得られる.

定理[21]. X が Axiom A をみたし, cycle を持たないならば C^∞ 級の Lyapunov 関数で有限個の特異値しか持たないものが存在する.

定理[21]. X が有限個の特異値を持つような Lyapunov 関数を持つための必要十分条件は X が fine filtration を持つことである.

$f \in \mathcal{D}^r(M)$ に対して, Λ を f の不変集合とする. このとき, $L_f: M \rightarrow \mathbb{R}_+$ が (f, Λ) の Lyapunov 関数 であるとは; L_f の critical set $\supset \Lambda$, $L_f(f(x)) \leq L_f(x)$ で等号は $x \in \Lambda$ のときのみ成立, L_f は少なくとも $C^{\dim M + 1}$ 級をみたすことである. 特に $\Lambda = \Omega(f)$ のとき f の Lyapunov 関数 という

定理[27]. $f \in \mathcal{D}^r(M)$, $M = M_k \supset \dots \supset M_1 \supset M_0 = \phi$ を f の filtration とし, $K = \bigcup_{i=1}^k K_i$ とする. このとき $L_f(K_i) = i$ をみたすような (f, K) の Lyapunov 関数が存在する.

この様に Lyapunov 関数の性質から力学系の構造をみていく研究を Shub は提唱している.

予想 3. (Shub, [27]). 力学系は生成的に Lyapunov 関数

を持つ.

第二章. 保存系について.

保存系の生成性に関しては Robinson の一連の研究が重要である. 以下にその主なものを中心にして紹介する.

§ 6. Kupka-Smale 型の定理.

M を m 次元の C^∞ 多様体 (compact は仮定しない) とする. M の volume Ω (C^∞ の nondegenerate n -form) をきめておく. そして次の様な記号を定義する.

$$\mathcal{D}_V^r(M) = \{f \in \mathcal{D}^r(M) \mid f^* \Omega = \Omega \text{ (即ち } f \text{ は volume を保存する)}\},$$

$$\mathcal{X}_V^r(M) = \{X \in \mathcal{X}^r(M) \mid L_X \Omega(m) = 0 \ \forall m \in M \text{ (即ち } X \text{ は volume を保つ)}\},$$

$$\mathcal{H}^r(p) = \{f \in \mathcal{D}_V^r(M) \mid f \text{ の周期 } p \text{ 以下の周期点 はすべて双曲形}\},$$

$$\mathcal{H}^r = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{H}^r(p),$$

$$\mathcal{J}^r(p) = \{X \in \mathcal{X}_V^r \mid X \text{ の特異点と周期 } p \text{ 以下の周期軌道は双曲形}\},$$

$$\mathcal{J}^r = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{J}^r(p).$$

$\mathcal{D}_V^r(M), \mathcal{X}_V^r(M)$ は Baire 空間である [23]. この時, 次が成立する.

定理 9. (Robinson [23]). $1 \leq r \leq \infty$ とする.

(i) $\dim M \geq 3$ ならば, $\mathcal{H}^r(p)$ は $\mathcal{D}_V^r(M)$ の中で open, dense である, 従って $\mathcal{H}^r$ は $\mathcal{D}_V^r(M)$ で生成的である.

(ii) $\dim M \geq 4$ ならば, $\mathcal{J}^r(p)$ は $\mathcal{X}_V^r(M)$ の中で open, dense である, 従って $\mathcal{J}^r$ は $\mathcal{X}_V^r(M)$ に於て生成的である.

(M, ω) を symplectic 多様体とする (即ち M は $2n$ 次元の C^∞ 多様体, ω は nondegenerate closed 2-form).

$$\text{Sym}^r(M) = \{f \in \mathcal{D}^r(M) \mid f^*\omega = \omega\}$$

とおけば, これは Baire 空間である [23]. ω が nondegenerate より, ω により bundle 同型 $TM \rightarrow TM (v \mapsto 2\omega(v, \cdot))$ が引き起こされる. この同型により C^r sections $C^r(TM) = \mathcal{X}^r(M)$ と $C^r(T^*M)$ の同型が得られる. C^{r+1} 級の関数 $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $dH \in C^r(T^*M)$ に対応する $X_H \in \mathcal{X}^r(M)$ を Hamiltonian ベクトル場 という. $\mathcal{X}_H^r(M)$ で C^r 級 Hamiltonian ベクトル場全体の空間をあらわす. $\mathcal{X}_H^r(M)$ は Baire 空間である [23]. $H^{-1}(e) = \{m \in M \mid H(m) = e\}$ を X_H の energy 曲面 という.

$f \in \text{Sym}^r(M)$, m は f の周期点とし, 周期を p とする. すると $T_m f^p$ は symplectic, その固有値として λ があれば, $\frac{1}{\lambda}, \bar{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}}$ も固有値となり multiplicity は等しい. principal 固有値 を絶対値が 1 より大か, 又は絶対値 1 で虚数部分が 0 以上の n 個から成る固有値の集合として定義する (固有値が 1, -1 のものは重複度が偶数だから, 各々その半分を取る). 同様に Hamiltonian ベクトル場の特異点の principal characteristic multiplier

を $\exp(T_m X)$ を使って定義する. $X_H \in \mathcal{X}_H^r(M)$ の周期軌道が周期 m を持つとき, $T_m \mathcal{Q}_0$ は symplectic である. 固有値 1 がベクトル方向に対して存在し, 又エネルギー H の増加方向にも固有値 1 が存在する. 周期軌道の principal characteristic multipliers を残りの $(2n-2)$ 個の固有値の半分として上と同様に定義する.

周期軌, 特異軌, 周期軌道が elementary (又は N-elementary, $N \geq 1$) であるとは principal 固有値又は characteristic multipliers が整数上で乗法的に独立であること (又は $-N$ と N の間で乗法的に独立であること) である. 即ち, $\prod \alpha_i^{p_i} = 1$ ($-N \leq p_i \leq N$) $\Rightarrow p_i = 0 \ \forall i$. このとき次の部分集合を定義する. このとき次の記号を定義する.

$$\mathcal{E}^r(p, N) = \{f \in \text{Sym}^r(M) \mid \text{周期} \leq p \text{ の任意の軌は } N\text{-elementary}\},$$

$$\mathcal{E}^r = \bigcap_{p, N} \mathcal{E}^r(p, N),$$

$$\mathcal{Q}^r(0, N) = \{X \in \mathcal{X}_H^r(M) \mid X \text{ の特異軌は } N\text{-elementary}\},$$

$$\mathcal{Q}^r(0) = \bigcap_N \mathcal{Q}^r(0, N),$$

$$\mathcal{Q}^r(p, N) = \{X \in \mathcal{X}_H^r(M) \mid \text{特異軌と周期 } p \text{ 以下の周期軌道は } N\text{-elementary}\},$$

$$\mathcal{Q}^r = \bigcap_{p, N} \mathcal{Q}^r(p, N).$$

このとき Robinson は次の結果を示した. これは Abraham-Marsden の問題提起 [1] に基づく研究である.

定理 10. [23]. (M, ω) を symplectic 多様体とする.

(i) $1 \leq r \leq \infty$ ならば $\mathcal{E}^r(p, N)$ は $\text{Sym}^r(M)$ で "open dense", 従って $\mathcal{E}^r$ は生成的である.

(ii) $1 \leq r \leq \infty$ ならば, $\mathcal{Q}^r(0, N)$ は $\mathcal{X}_H^r(M)$ で "open dense", 従って $\mathcal{Q}^r(0)$ は生成的である.

(iii) $2 \leq r \leq \infty$ ならば, $\mathcal{Q}^r(p, N)$ と $\mathcal{Q}^r$ は生成的である.

又, locally Hamiltonian ベクトル場 (即ち, ω を保存するベクトル場, $L_X \omega = 0$) でも (ii), (iii) と同様なことが成立する.

以上の仕事の拡張としての Taken [34] や, geodesic flow に関する生成性についての Klingenberg-Taken [4] の結果がある.

§ 7. Closing lemma とその応用.

定理 11. (保存系の closing lemma, Pugh-Robinson [20]).

M を compact とするとき $\mathcal{Q}_V^1(M), \mathcal{X}_V^1(M), \text{Sym}^1(M), \mathcal{X}_H^1(M)$ の中で次が成立する; m が力学系 φ の特遊走点とする. N を φ の任意の近傍, $U \subset M$ を m の任意の近傍とすると, $\varphi' \in N$ と $m' \in U$ が存在して m' は φ' の周期点となる.

定理 12. (保存系の general density theorem, Pugh-Robinson [20]).

M を compact とするとき, $\mathcal{Q}_V^1(M), \mathcal{X}_V^1(M), \text{Sym}^1(M), \mathcal{X}_H^1(M)$ に対して, 次の性質は生成的である; $\Omega(\varphi) = \overline{\Gamma(\varphi)}$.

Hamiltonian ベクトル場 X の 積分 とは次の条件を満たす C^1 級関数 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ である; (i) g は X の流れにより保存される,

(ii) X の energy-曲面の中の任意の開集合で g は定数ではない。

定理 13. (Robinson, [23]). M を compact とするとき、積分を持たない Hamiltonian ベクトル場は $\mathcal{X}_H^r(M)$ に生成的に存在する。

§ 8. 保存系の構造安定性.

$f \in \text{Sym}^r(M)$ が $\text{Sym}^r(M)$ の中で ε - Ω -stable であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 f の近傍 $N_\varepsilon \subset \text{Sym}^r(M)$ が存在して、任意の $g \in N_\varepsilon$ と f とは $|h - \text{id}| < \varepsilon$ なる homeomorphism $h: \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$ により Ω -conjugate であることである。同様に $X \in \mathcal{X}_H^r$ に対しても ε - Ω -stability が定義される。 Ω -stability は上から $|h - \text{id}| < \varepsilon$ の条件を除いて与えられる。

定理 14. (Robinson [23]). $1 \leq r \leq \infty$, (M, ω) は symplectic 多様体とする。このとき、 $\text{Sym}^r(M), \mathcal{X}_H^r(M)$ で次が成立する。

- (i) $\dim M \geq 2 \Rightarrow \text{Sym}^r(M)$ の中で ε - Ω -stable な系は稠密でない。
 $\dim M = 2 \Rightarrow \text{Sym}^r(M)$ の中で Ω -stable な系は稠密でない。
- (ii) $\dim M \geq 4 \Rightarrow \mathcal{X}_H^r(M)$ の中で ε - Ω -stable な系は稠密でない。
 $\dim M = 4 \Rightarrow \mathcal{X}_H^r(M)$ の中で Ω -stable な系は稠密でない。

次の定理は Newhouse により最近得られた結果である。

定理 15. [11] M を compact, $1 \leq r \leq \infty$, $f \in \text{Sym}^r(M)$ とする。

このとき, f が $\mathcal{D}^r(M)$ の中で構造安定なのは f が Anosov のときに限る.

§ 9. 其の他.

1. 保存系の位相力学系が ergodic という性質は生成的であるという Ostoby-Ulam [12] の結果があり, 一方 $X \in \mathcal{X}_H^r(M)$ に対してほとんど全ての energy 曲面に対してその少なくとも一つの component 上では X は ergodic であるという性質を X が持たないことは生成的である事を示した Markus-Meyer [7] の結果等がある. 但し, M は compact の場合である.

2. homoclinic 点の存在.

$f \in \mathcal{D}^r(M)$ の双曲形周期点 α に対して, $W^s(\alpha) \cap W^u(\alpha)$ に含まれる周期点でない点を, α の homoclinic 点 という.

定理 16. [35] M を compact とする. $\text{Sym}^1(M)$ または $\mathcal{D}_V^1(M)$ に於て, すべての双曲形周期点は homoclinic point を持つという性質は生成的である.

次に M^2 として任意の単純閉曲線は M^2 を 2 つの領域に分けて一方は有界となるものを考える.

定理 17. (McGehee-Meyer [36]). 少なくとも一つの不動点を持つ系は $\mathcal{D}_V^1(M^2)$ で稠密集合となる. (但し C^1 -compact open

topology で考えてみる.)

参考文献

- [1] R. Abraham-J. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin, Inc., N.Y., 1967.
- [2] J. Arzant, Note on structural stability, Bull. A.M.S. 72 (1966), 542-544.
- [3] M. Hirsch-C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic Sets, Proc. Symp. Pure Math. 14, A.M.S (1970), 133-165.
- [4] W. Klingenberg-F. Takens, Generic properties of geodesic flows, Math. Ann. 197 (1972), 323-334.
- [5] I. Kupka, Contribution à la théorie des champs génériques, Contributions Diff. Eq. 2 (1963), 457-484; vol. 3 (1964), 411-420.
- [6] A. Manning, Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 215-220.
- [7] L. Markus-K. Meyer, Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic, Memoirs of A.M.S. 144 (1974).
- [8] P. Mendes, On stability of dynamical systems on open

- manifolds, *J. Diff. Eq.* 16 (1974), 144-167.
- [9] S. Newhouse-J. Palis, Bifurcations of Morse-Smale dynamical systems, to appear.
 - [10] ———, Cycles and bifurcation theory, to appear.
 - [11] S. E. Newhouse, Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems, to appear.
 - [12] J. C. Oxtoby-S. M. Ulam, Measure-preserving homeomorphisms and metric transitivity, *Ann. of Math.*, 42 (1941), 874-920.
 - [13] J. Palis-M. Shub-D. Sullivan, Genericity theorems in topological dynamics, to appear.
 - [14] M. M. Peixoto, Structural stability on two dimensional manifolds, *Topology* 1 (1962), 101-120.
 - [15] M. M. Peixoto, On approximation theorem of Kupka and Smale, *J. Diff. Eq.* 3 (1966), 214-227.
 - [16] ———, Qualitative theory of differential equations and structural stability, *Inter. Sym. on Nonlinear Diff. Eq. and Nonlinear Mechn.* Academic Press, N.Y. 1967, 469-480.
 - [17] ———-Pugh, Structurally stable systems on open manifolds are never dense, *Ann. of Math.* 87 (1968), 423-430.
 - [18] C. C. Pugh, On improved closing lemma and general density theorem, *Amer. J. Math.* 89 (1967), 1010-1021.

- [19] C.C. Pugh, Against the C^2 closing lemma, *J. Diff. Eq.* 17 (1975), 435-443.
- [20] ——— R.C. Robinson, The C^1 closing lemma, including Hamiltonians, to appear.
- [21] C.C. Pugh-M. Shub, The Ω -stability theorem for flows, *Invent. Math.* 11 (1970), 150-158.
- [22] J. Robbin, A structural stability theorem, *Ann. of Math.* 94 (1971), 447-493.
- [23] R.C. Robinson, Generic properties of conservative systems I, II, *Amer. J. Math.* 92 (1970), 562-603, 897-906.
- [24] ———, Structural stability of C^1 diffeomorphisms, to appear.
- [25] ———, Structural stability of C^1 flows, to appear.
- [26] M. Shub, Structurally stable diffeomorphisms are dense, *Bull. A.M.S.* 78 (1972), 817-818.
- [27] ———, Stability and genericity for diffeomorphisms, *Dynamical systems*, ed. M. Peixoto, Academic Press, N.Y., 1973, 493-514.
- [28] ——— S. Smale, Beyond hyperbolicity, *Ann. of Math.* 95 (1972), 587-591.
- [29] C.P. Simon, On a classification of a Baire set of diffeomorphisms, *Bull. A.M.S.* 77 (1971), 783-787.
- [30] S. Smale, Stable manifolds for differentiable equations, *Ann. Scuola Normals* 18 (1963).

- [31] Smale, The Ω -stability theorem, Proc. Symp. Pure Math. 14 A.M.S. (1970), 289-298.
- [32] J. Sotomayor, Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds, Bull. A.M.S. 74(1968), 722-726.
- [33] —, Generic bifurcations of dynamical systems, Dynamical systems, ed. M. Peixoto, Academic Press, N.Y., 1973, 561-582.
- [34] F. Takens, Hamiltonian systems: Generic properties of closed orbits and local perturbations, Math. Ann. 188(1970), 304-312.
- [35] —, Homoclinic points in conservative systems, Inv. Math. 18(1972).
- [36] R. McGehee-K. Meyer, Homoclinic points of area preserving diffeomorphisms, Amer. J. Math. 96(1974), 409-420.