

統計的二次近似によるダム貯水池群の実時間操作

張 昇平・児玉 好史
椎葉 充晴・高棹 琢馬

REAL-TIME OPERATION OF A MULTIRESERVOIR SYSTEM WITH THE STATISTICAL SECOND-ORDER APPROXIMATION THEORY

By Shengping ZHANG, Yoshihumi KODAMA, Michiharu SHIIBA
and Takuma TAKASAO

Synopsis

In this paper the problem of real-time operation of a multireservoir system is examined. We take into consideration a) uncertainties of the system, b) how to use all available real-time information, c) chance constraints of stochastic state variables and d) curse of dimensionality. The aim is to show the efficiency of the statistical second-order approximation method for transforming a multireservoir system into an LQG (Linear dynamics, Quadratic performance, Gaussian uncertainties) system, and to present an algorithm for real-time operation of a multireservoir system. The optimization method used is based on DDP (differential dynamic programming) and the chance constraints are treated by introducing penalties into objective function. The control series are determined by OLFC (Open-Loop Feedback Controller). In order to compare the statistical approximation method with the Taylor approximation, an example is presented. With using the real-time operation method a two-reservoir system is simulated.

1. 概 要

本研究の目的は、ダム貯水池群の実時間操作における以下の問題、

- (a) システムの不確かさを考慮すること、
- (b) 時時刻刻得られる観測情報およびインプットの予測を有効に利用して逐次最適なコントロール（放流量）を決定していくこと、
- (c) コントロールに関する制約条件と状態に関する確率的な制約条件（chance constraints）を考慮すること、
- (d) 「次元の呪い（curse of dimensionality）」を克服すること

を念頭におき、統計的二次近似手法を用いた実時間操作のアルゴリズムを提案しその有効性を示すことである。ダム貯水池群の実時間操作においては、「目的関数をどのように設定するか」、「コントロールを考える期間をどの程度とるか」、「計画段階の操作ルールとの整合性をどのように考えるか」など重要な問題が多く残されているが、本研究は特に、これらの問題を解決するための基本となる(a)~(d)の問題に焦点を絞ってその解決を図るものである。

ダム貯水池操作のアルゴリズムは現在数多く提案されているが、その中でも、貯水池システムの dynamic

な性質から DP を用いる最適化手法が一番よいと考えられる。最初に DP をダム貯水池の操作に関する研究に導入したのは Little (1955)¹⁾ である。Bellman (1957)²⁾ は DP の基礎理論を整えた。その後、Hall and Buras (1961)³⁾ らにより DP は大いに発展した。しかし、当初の DP (discrete DP) を用いると、状態量を離散化することが原因となり、状態量の次元が大きくなるといわゆる「次元の呪い」の問題が生じる。すなわち、計算時間・記憶容量が膨大となり、今日の計算機の発展を以てしても、計算の実現が困難となる場合が多い。

従来「次元の呪い」からのがれるために多くの手法が考案されている。IDP (Incremental DP), DDDP (Discrete Differential DP), IDPSA (Incremental DP with Successive Approximation) および DDP (Differential DP) がその代表的なものである。しかし、IDP, DDDP および IDPSA の各手法は、初期解は最適解の近くでなければならないという点、解の最適解への収束が保証されていないという点、さらに次元の問題が多少緩和されているが完全に克服されていないという点が問題である。そこで、Murray and Yakowitz (1979)⁴⁾ は、Jacobson and Mayne (1970)⁵⁾ によって提案された DDP を基礎とした Constrained DDP を提案した。Constrained DDP は、コントロールの候補値とそれに対応する状態量系列の近傍で解を改良する手続きを反復するものである。状態量の離散化が行われていないため、「次元の呪い」の問題は全く発生しない。解を改良する際に、システムダイナミクスが線形、目的関数が二次関数である問題を解くが、この問題は後進 DP によって解析的に容易に解かれる。

以上に概観したように、「次元の呪い」を克服するための手法として、決定論的な DP の場合には Differential DP が最も有効な手法であると考えられる。一方、現実のダム貯水池システムは確定的モデルで表すことが不可能であり、システムは不確実性を持っている。そこでダム貯水池システムの不確かさに対して確率的に制御することが研究されている。

DP モデルにおいて、不確実性を陰に取り扱ったものに、Young (1967)⁶⁾, Jettmar and Young (1975)⁷⁾ によるシミュレーションと確定的 DP を用いた Monte Carlo DP や Croley (1974)⁸⁾, Takasao and Kojiri (1976)⁹⁾ がある。

不確実性をシミュレーションを用いて陰に扱うよりも、可能であるならば、不確実性を正面から扱う方がよい。不確実性を陽に扱ったものには、Schweig (1968)¹⁰⁾, Butcher (1971)¹¹⁾, Su and Deininger (1974)¹²⁾, Yeh (1982)¹³⁾ および Buchaman and Bras (1983)¹⁴⁾ がある。これらは、流出量がマルコフ連鎖に従うと仮定し、DP を用いている。このような手法においては、特に問題となるのは、状態量の確率的な制約条件を満たすコントロールを陽に得ることができないことである。状態量の確率的な制約を扱ったものとしては、Askew (1974, a)¹⁵⁾, (1974, b)¹⁶⁾, Sniedovich (1979)¹⁷⁾, (1980, a)¹⁸⁾, (1980, b)¹⁹⁾ がある。しかし、独立な流入を仮定し単一ダムの場合を扱っており、次元の問題のため、複数のダムを含む一般のシステムには拡張できない。

以上に示した不確実性を陽に取り扱った手法は、全て状態量を離散化したことにより、次元の問題が生じている。この問題の解決のため、Wasimi and Kitanidas (1983)²⁰⁾ は Linear dynamics, Quadratic performance indices, Gaussian uncertainties system (LQG system) を考え、計算量の削減を図った。さらに、Georgakakos (1983)²¹⁾, (1985)²²⁾ は、確率 DP の場合にも Differential DP と同じような考え方を適用して、コントロールの候補値とそれに対応する状態量系列の期待値の近傍で Taylor 展開を用いて目的関数を二次関数に近似し、解を改良する手法を提案している。Differential DP と同じ様な考え方をすることによって、「次元の呪い」の問題は解決した。しかし、決定論的な DP の場合と異なって、反復の過程で考慮すべき状態量系列の範囲が縮小していくわけではないので、目的関数を状態量の期待値の近傍の局所的性質を用いて近似する方法は合理的でない。本研究はこの点を改良し、問題を一部再定式化して確率ベクトルの関数の大域的な近似手法である統計的二次近似手法を用いた実時間操作手法を提案し、その計算機プログラム化の検討結果を提示するものである。その操作手法は、要約すれば、統計的二次近似手法 (高棒・椎葉・富沢 (1984)²³⁾) を用いて LQG system に問題を変換し、open-loop feedback controller (以下 OLFC と略す)

によりコントロールを決定するものである。

2. 非線形関数の統計的二次近似の理論

本章では、非線形関数の統計的二次近似の理論を要約して示す。その詳細については、高棹・椎葉・富沢 (1984)²³⁾を参照すると良い。また、統計的二次近似と確率変数の関数の期待値との興味深い関係を示す。

2.1 統計的二次近似の理論

n 次元ベクトル ξ の関数 $g(\xi)$ と、平均値 $\bar{x}$ 、共分散行列 P をもつ n 次元確率ベクトル x が与えられているとき、

$$x \sim N(\bar{x}, P) \dots\dots\dots (1)$$

と仮定して、定数 B^* と n 次元行ベクトル H 、 n 次元対称行列 A を

$$J(B^*, H, A) = E\{|g(x) - B^* - H(x - \bar{x}) - 1/2 \cdot (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x})|^2\} \dots\dots\dots (2)$$

が最小になるようにとって、確率変数 $g(x)$ を

$$g(x) = B^* + H(x - \bar{x}) + 1/2 \cdot (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) \dots\dots\dots (3)$$

と近似する。このような近似を統計的二次近似 (Statistical Second-order Approximation) と呼ぶ。ベクトル値関数 $g(x)$ の統計的二次近似は各成分ごとに、統計的二次近似する。

$J(B^*, H, A)$ を最小にする B^*, H, A は、 B^*, H, A の各成分で $J(B^*, H, A)$ を偏微分したものを 0 と等値して得られる方程式

$$B^* = E\{g(x)\} - 1/2 \cdot \text{tr}[AP] \dots\dots\dots (4)$$

$$PH^T = E\{(x - \bar{x})g(x)\} \dots\dots\dots (5)$$

$$PAP^T = E\{(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T g(x)\} - E\{g(x)\}P \dots\dots\dots (6)$$

から定められる。 $\text{tr}[\cdot]$ は正方行列の対角成分の和を表す。(5)、(6)式を導く時に正規分布に対して成り立つ性質

$$E\{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)(x_k - \bar{x}_k)\} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$E\{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)(x_k - \bar{x}_k)(x_l - \bar{x}_l)\} = P_{ij}P_{kl} + P_{ik}P_{jl} + P_{il}P_{kj} \dots\dots\dots (8)$$

を用いた。 $x_i, \bar{x}_i$ はそれぞれ $x, \bar{x}$ の第 i 成分、 $P_{ij} = \text{Cov}\{x_i, x_j\}$ (x_i と x_j の共分散) である。(4)～(6)式の右辺の値は正規分布の仮定から少なくとも理論上は算定できる。実際に正規分布仮定が成り立つことが保証されていず、単に $\bar{x}$ が x の推定値、 P が $\bar{x}$ による x の推定誤差共分散行列である場合でも、(3)式中の B^*, H, A を求めるための一つの近似として正規分布仮定を置く。

実は、 $g(x)$ が x の整多項式であるなど簡単な関数である場合を除いて、(4)～(6)式の右辺の期待値を計算することは困難である。これらの期待値を計算するのに利用できる数値積分公式の一つに Hermite-Gauss 積分公式がある。その詳細については、高棹・椎葉・富沢 (1984)²³⁾を参照されたい。

2.2 統計的二次近似と確率変数の関数の期待値との関係

確率ベクトル x が多次元正規分布に従い、 $x \sim N(\bar{x}, P)$ であるとする。共分散行列 P を固定したときの、平均値ベクトル $\bar{x}$ の関数

$$J(\bar{x}) = E\{g(x)\} \dots\dots\dots (9)$$

を考える。ただし、期待値は確率ベクトル $x \sim N(\bar{x}, P)$ についてとる。

$J(\bar{x})$ を $\bar{x}$ の第 i 成分 $\bar{x}_i$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} \cdot \exp\{-1/2(x-\bar{x})P^{-1}(x-\bar{x})^T\} dx \\ = (P^{-1})_{,i} E\{(x-\bar{x})g(x)\} \dots\dots\dots (10)$$

となるから、

$$\nabla J(\bar{x}) = P^{-1} E\{(x-\bar{x})g(x)\} \dots\dots\dots (11)$$

である。ただし、 $(P^{-1})_{,i}$ は P^{-1} の第 i 行である。

(10)を $\bar{x}_j$ で偏微分すると、

$$\partial^2 J(\bar{x}) / \partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j = \\ (P^{-1})_{,i} E\{(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T g(x)\} (P^{-1})_{,j}^T - (P^{-1})_{,ij} E\{g(x)\} \dots\dots\dots (12)$$

となるから、

$$\nabla^2 J(\bar{x}) = P^{-1} E\{(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T g(x)\} (P^{-1})^T - P^{-1} E\{g(x)\} \dots\dots\dots (13)$$

である。

一方、 $x \sim N(\bar{x}, P)$ と仮定して、確率変数 x の関数 $g(x)$ を統計的二次近似すると(3)式のようにになる。
 B^* , H , A は(4)~(6)式から決められる。(5), (6)式より

$$H^T = P^{-1} E\{(x-\bar{x})g(x)\} \dots\dots\dots (14)$$

$$A = P^{-1} E\{(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T g(x)\} (P^{-1})^T - P^{-1} E\{g(x)\} \dots\dots\dots (15)$$

であるから、(11), (13)と比較して、

$$\nabla J(\bar{x}) = H^T, \nabla^2 J(\bar{x}) = A \dots\dots\dots (16)$$

である。

以上により、共分散行列 P を固定したときの、平均値ベクトル $\bar{x}$ の関数 $J(\bar{x}) = E\{g(x)\}$ の勾配、ヘッセ行列は、 $x \sim N(\bar{x}, P)$ と仮定して、関数 $g(x)$ を統計的二次近似した式の一次の係数行列 H^T 、二次の係数行列 A に等しい。Taylor 近似においては、この性質は一般には期待できない。

3. ダム貯水池群の実時間操作問題の定式化と解法

本章では、一般的なモデルの構成を要約し、その後一般性を失わない少し特別な形でダム貯水池群の実時間操作問題を定式化する。オープンループフィードバックコントローラ (Open-Loop Feedback Controller) によって定式化された問題におけるコントロールを決定する。

3.1 実時間問題の定式化

信用できかつ実際に利用可能なモデルの開発が貯水池システムの実時間操作アルゴリズムを決定する第一歩である。ダム貯水池システムのモデルは普通 a) 流域モデル、b) 目的関数 の二つの部分からなると考えてよい。目的関数の構成については、本研究の中心課題である実時間操作アルゴリズムの決定手法と直接にかかわりが無いため触れないことにするが、以下流域モデルの構成について簡単に考えてみる。

流域のモデル化については既にいろいろな研究がなされているが、高棹・椎葉・富沢 (1984)²³⁾、中北・高棹・椎葉 (1986)²⁴⁾ は、流域をダムを含む河道網と河道網への側方流入量が発生する部分流域に分割して流域モデルを構成することを提案している。

一般に河道網は樹枝状構造をなす。与えられた河道網上に有限個数の分点を取り、分点によって河道網を部分河道網とダム貯水池に分割する。このとき、流域の最下流端、ダム貯水池と河道との境界も一つの分点とする。こうして、部分河道網を一連の cascaded conceptual reservoir と見なして貯水池と同様に定式化

することができる。

一方、部分流域のモデル化については、状態ベクトルを適当に定義することにより、既に開発されている斜面流域モデルのほとんどが状態空間型モデルと考えることができる。したがって、ダム貯水池群のモデルは、連続時間・非線形システムで表現することが出来る。

しかし、連続時間・非線形であるシステムでは実時間操作の議論が困難であるため、本研究では離散時間・線形システムでの実時間操作の理論を構成する。連続時間・非線形システムを離散時間・線形システムに変換することは重要な問題であるが、流出予測問題で扱う流域モデルにおいては既にこの問題を検討している(高棹・椎葉・富沢 (1984)²³⁾)。状態の遷移にコントロールベクトルが関係する流域モデルにおいては、やや異なる部分もあるが同様の手法を用いて離散時間・線形システムに変換することが可能であると考えられる。よって、本研究においては、次の問題を考える。この問題を PB0 と略記する。

状態方程式

$$s_{k+1} = \Phi_k s_k + B_k u_k(I_k) + \xi_k, \quad k=0, \dots, T-1 \quad (17)$$

目的関数

$$J = \sum_{k=0, \dots, T-1} E\{l_{k+1}(s_{k+1}) + m_k(u_k(I_k))\} \quad (18)$$

ただし、期待値は $s_0, \xi_k, w_k, k=0, \dots, T-1$ についてとる。

コントロールの制約条件

$$u_{jk}^{min} \leq u_{jk}(I_k) \leq u_{jk}^{max}, \quad j=1, \dots, n_u, k=0, \dots, T-1 \quad (19)$$

状態量の確率的制約条件

$$\int_{-\infty}^{s_{jk}^{min}} Pr(s_{jk}) ds_{jk} \leq \gamma_{jk}^{min}, \quad j=1, \dots, n_s, k=1, \dots, T \quad (20)$$

$$\int_{s_{jk}^{max}}^{+\infty} Pr(s_{jk}) ds_{jk} \leq \gamma_{jk}^{max}, \quad j=1, \dots, n_s, k=1, \dots, T \quad (21)$$

観測方程式

$$y_k = g(s_k) + w_k, \quad k=0, \dots, T-1 \quad (22)$$

状態の推移が(17)にしたがって(22)の観測があるとする。このとき、制約条件(19)～(21)を満たし目的関数 J を最小にするような $u_k(I_k), k=0, \dots, T-1$ を求める。

ただし、 s_k : n_s 次元状態ベクトル。添字 k は、時刻を表す。 $s_0 \sim N(\bar{s}_0, P_0)$ 。 $u_k(I_k)$: n_u 次元コントロールベクトル。 $u_{jk}(I_k)$ は、 u_k の第 j 成分で、時刻 k までの情報 I_k を用いて決められるべきコントロール。 ξ_k : n_s 次元ノイズベクトル。 $\xi_k \sim N(0, Q_{\xi k})$ 。 $E\{\xi_k \xi_m^T\} = Q_{\xi k} \cdot \delta_{km}$ 。 $E\{\xi_k s_0^T\} = 0$ 。 Φ_k, B_k : それぞれ $n_s \cdot n_s$ 次、 $n_s \cdot n_u$ 次係数行列。 $l_k(s_k)$: 時刻 k での状態ベクトルの関数。 $m_k(u_k(I_k))$: 時刻 k でのコントロールベクトルの関数。 $u_{jk}^{min}, u_{jk}^{max}$: それぞれ u_{jk} の下限値と上限値。 $Pr(s_{jk})$: 状態量 s_{jk} の確率密度関数。 γ_{jk}^{min} : 状態量 s_{jk} が s_{jk}^{min} より小さくなる確率の許容値。 γ_{jk}^{max} : 状態量 s_{jk} が s_{jk}^{max} より大きくなる確率の許容値。 y_k : M 次元観測ベクトル。 $g(s_k)$: 状態ベクトルの関数。 w_k : 観測ノイズベクトル。 $w_k \sim N(0, Q_{wk})$ 。 $E\{w_k w_m^T\} = Q_{wk} \cdot \delta_{km}$ 。 δ_{km} は $k=m$ のとき 1, $k \neq m$ のとき 0。

状態方程式に定数項が含まれる場合は適当に座標変換すると(17)式の形に書ける。したがって、(17)式の形で十分一般的である。

3.2 OLFC によるコントロール決定の定式化

以下に示す OLFC によりこの問題を解く。OLFC とは各時刻 k で次の操作を行うものである。

- (a) $I_k = \{y_1, \dots, y_k, u_0, \dots, u_{k-1}\}$ を用いて、状態 s_k の確率分布 $Pr(s_k/I_k)$ を求める。ただし、 y_m は時刻 m での観測ベクトルである。

- (b) 時刻 k 以後は、観測がないものと仮定して、 $\{u_k, \dots, u_{T-1}\}^{olfc}$ を、状態量とコントロールの関数の期待値で表される目的関数 J が最小になるように定める。
- (c) u_k^{olfc} を適用する。
- (d) 時刻 $k+1$ での情報 y_{k+1} を加えて、 $I_{k+1}=I_k U\{u_k^{olfc}, y_{k+1}\}$ とする。
- (e) (a)にもどって繰り返す。

OLFC の具体化において最も重要な部分は(b)の部分である。この問題を PB1 と略記し、定式化すると次のようになる。ただし、現在時刻を 0 とする。このようにしても一般性を失わない。

状態方程式

$$s_{k+1} = \Phi_k s_k + B_k u_k + \xi_k, \quad k=0, \dots, T-1 \quad (23)$$

目的関数

$$J = \sum_{k=0, \dots, T-1} [E\{l_{k+1}(s_{k+1}) + m_k(u_k)\}] \quad (24)$$

ただし、期待値は、確率変数 $s_0, \{\xi_k\}_{k=0, \dots, T-1}$ についてとる。

コントロールの制約条件

$$u_{jk}^{min} \leq u_{jk} \leq u_{jk}^{max}, \quad j=1, \dots, n_u, \quad k=0, \dots, T-1 \quad (25)$$

状態量の確率的制約条件

$$\int_{-\infty}^{s_{jk}^{min}} Pr(s_{jk}) ds_{jk} \leq \gamma_{jk}^{min}, \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T \quad (26)$$

$$\int_{s_{jk}^{max}}^{+\infty} Pr(s_{jk}) ds_{jk} \leq \gamma_{jk}^{max}, \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T \quad (27)$$

(25)~(27)の制約条件を満たし、(24)の目的関数 J を最小にするような $u_k, k=0, \dots, T-1$ を求める。ただし、 u_k は n_u 次元コントロールベクトル、 u_{jk} は、 u_k の第 j 成分である。

open loop の考え方は、将来において観測があるにもかかわらず「将来は観測がない」と仮定して現在のコントロールを決定する。open loop の考え方により定式化された PB1 では、目的関数の期待値は $s_0, \xi_k, k=0, \dots, T-1$ についてとり、コントロールは現在時刻までの情報を用いて値が決まる。一方、closed loop の考え方は、将来において観測があることを考慮して現在のコントロールを決定する。closed loop の考え方により定式化された PB0 においては、目的関数の期待値は $s_0, \xi_k, w_k, k=0, \dots, T-1$ についてとり、時刻 k でのコントロールは時刻 k までの観測情報 I_k の関数として $u_k(I_k)$ として得る。 $u_k(I_k)$ の関数の形を求めることがコントロールを決定することであり結局 control law を求めることになる。

現実には観測がある場合 closed loop controller が最適なコントロールである。しかし、LQG system など特殊な場合をのぞき一般の場合には closed loop による定式化では数学的に解けない。そこで、本研究では OLFC を用いて実時間操作問題を考える。観測がある場合 OLFC により得られるのは suboptimal control であるが、LQG system では、closed loop controller によるものと一致することが既に証明されている (Bertsekas (1976)²⁵⁾)。

4. 統計的二次近似を用いたコントロール決定問題における最適化手法

本章では、統計的二次近似手法を用いた最適化手法を提案する。最適化手法についての詳しい内容は Bertsekas (1982)²⁶⁾を参照されたい。状態量に関する確率的制約はペナルティ関数を導入して考慮する。また、最適化手法における統計的二次近似の有効性も示す。

4.1 統計的二次近似を用いた最適化手法の提案

PB1 から状態量の確率的制約条件 (26), (27) を取り除いた問題を PB2 と表す。本節では、実時間操作

手法の骨子となる最適化のアルゴリズムを示す。状態量の確率的制約は、次節で考える。

PB2 の解法の概要は、次のようなものである。

制約条件を満足するコントロール $\{u_k^{(i)}\}_{k=0, \dots, T-1}$ を候補値として選ぶ。この候補値の近傍で目的関数 J 中の関数 l_k と m_k とを二次関数に近似する。候補値からの偏差を $\delta u_k (= u_k - u_k^{(i)})$ とおき目的関数 J の期待値をとって、問題を δu_k について書き直す。この問題を PB3 とする。 $\delta u_k = 0$ が問題 PB3 の最適解であるか判定する。最適解でなければ、後に示す方法で解の改善方向 δu_k^* を求める。現在の候補値に δu_k^* を加えて得られるコントロール $u_k^{(i+1)} (= u_k^{(i)} + \delta u_k^*)$ を新たにコントロールの候補値とする。 $\delta u_k = 0$ が最適解になるまで以上の手順を最初に戻り繰り返す。 $\delta u_k = 0$ が問題 PB3 の最適解である時のコントロールの候補値が問題 PB2 の最適解である。

δu_k^* は次のようにして求める。 δu_k の改善方向 δu_k^* を解析的に得る。この方向で斜影法と Armijorule²⁶⁾ を似た方法とを組み合わせ、制約条件を満たしかつ目的関数 J の値を減少させるように step-size α を決める。すなわち、 $\delta u_k^* = \alpha \delta u_k^*$ となる。

4.1.1 目的関数の二次近似と繰り返し計算の収束判定

$\{u_k\}_{k=0, \dots, T-1}$ の候補値として、 $\{u_k^{(i)}\}_{k=0, \dots, T-1}$ を選ぶ。これは、制約条件(25)を満たしているとする。 $\{u_k^{(i)}\}_{k=0, \dots, T-1}$ に対応する状態量の期待値の系列を $\{\bar{s}_k^{(i)}\}_{k=1, \dots, T}$ とし、時刻 k での状態量の共分散行列を $P_{s,k}$ とすると、

$$\bar{s}_{k+1}^{(i)} = \Phi_k \bar{s}_k^{(i)} + B_k u_k^{(i)}, \quad k=0, \dots, T-1, \quad \bar{s}_0^{(i)} = \bar{s}_0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$P_{s,k+1} = \Phi_k P_{s,k} \Phi_k^T + Q_{\xi,k}, \quad k=0, \dots, T-1, \quad P_{s,0} = P_0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。ここで、 $\delta s_k = s_k - \bar{s}_k^{(i)}$, $k=0, \dots, T$ とおく。コントロール $\{u_k^{(i)}\}_{k=0, \dots, T-1}$ のもとでは、 $\delta s_k \sim N(0, P_{s,k})$ となる。この時、統計的二次近似を用いて、

$$\begin{aligned} l_k(s_k) &= l_k(\bar{s}_k^{(i)} + \delta s_k) \equiv l_k^*(\delta s_k) \\ &= 1/2 \cdot \delta s_k^T N_{ss,k} \delta s_k + N_{s\bar{s},k}^T \delta s_k + N_{s0,k}, \quad k=1, \dots, T \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

と近似できる。また、状態量に関する部分は Taylor 展開を用いて、

$$\begin{aligned} m_k(u_k) &= m_k(u_k^{(i)} + \delta u_k) \equiv m_k^*(\delta u_k) \\ &= 1/2 \cdot \delta u_k^T N_{uu,k} \delta u_k + N_{u\bar{u},k}^T \delta u_k + N_{u0,k}, \quad k=0, \dots, T-1 \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

と近似できる。

コントロール $\{u_k\}_{k=0, \dots, T-1}$ の $\{u_k^{(i)}\}_{k=0, \dots, T-1}$ からの偏差を $\delta u_k = u_k - u_k^{(i)}$, $k=0, \dots, T-1$ と表す。 δs_k , δu_k を用いて問題 PB2 を書き直すと次のようになる。この問題を PB3 と略記する。

状態方程式

$$\delta s_{k+1} = \Phi_k \delta s_k + B_k \delta u_k + \xi_k, \quad k=0, \dots, T-1 \quad \dots\dots\dots (32)$$

目的関数

$$J = \sum_{k=0, \dots, T-1} E \{ l_{k+1}^*(\delta s_{k+1}) + m_k^*(\delta u_k) \} \quad \dots\dots\dots (33)$$

ただし、期待値 E は、確率変数 δs_0 , $\{\xi_k\}_{k=0, \dots, T-1}$ についてとる。

制約条件

$$\begin{aligned} \delta u_{j,k}^{min} &\leq \delta u_{j,k} \leq \delta u_{j,k}^{max}, \\ \delta u_{j,k}^{min} &= u_{j,k}^{min} - u_{j,k}^{(i)}, \\ \delta u_{j,k}^{max} &= u_{j,k}^{max} - u_{j,k}^{(i)}. \quad j=1, \dots, n_u, \quad k=0, \dots, T-1 \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

状態方程式(32)より δs_k の期待値 $\delta \bar{s}_k$ の推移は、

$$\delta \bar{s}_{k+1} = \Phi_k \delta \bar{s}_k + B_k \delta u_k, \quad k=0, \dots, T-1, \quad \delta \bar{s}_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

となり、 $\delta \bar{s}_k$ の共分散行列の推移は(29)で与えられる。(33)の期待値を(30), (35)を用いて計算し定数項を

除いた部分を $J^\wedge$ とすると,

$$J^\wedge = \sum_{k=0, \dots, T-1} \{l_{k+1}^\wedge(\delta \bar{s}_{k+1}) + m_k^\wedge(\delta u_k)\} \dots\dots\dots (36)$$

であり, $J^\wedge$ を最小にすればよい。ここに,

$$l_{k+1}^\wedge(\delta \bar{s}_{k+1}) = 1/2 \cdot \delta \bar{s}_{k+1}^T N_{ss, k+1} \delta \bar{s}_{k+1} + N_{s, k+1}^T \delta \bar{s}_{k+1} \dots\dots\dots (37)$$

$$m_k^\wedge(\delta u_k) = 1/2 \cdot \delta u_k^T N_{uu, k} \delta u_k + N_{u, k}^T \delta u_k \dots\dots\dots (38)$$

である。

$u_k, \delta u_k, k=0, \dots, T-1$ を一列に並べた列ベクトルをそれぞれ, $u, \delta u$ とする。 $J, J^\wedge$ はそれぞれ $u, \delta u$ の関数であるから, 以後 $J(u), J^\wedge(\delta u)$ と書く。 $\delta u=0$ での gradient vector を

$$\nabla_{\delta u} J^\wedge(0) = N_{u, k} + B_k^T H_{k+1}, \quad k=T-1, \dots, 0 \dots\dots\dots (39)$$

から計算する。ここに,

$$\begin{aligned} H_T &= N_{sT}, \\ H_k &= \phi_k^T H_{k+1} + N_{s, k}, \quad k=T-1, \dots, 1 \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

である。これを用いて

$$w^{(i)} = |u^{(i)} - [u^{(i)} - \nabla_{\delta u} J^\wedge(0)]^{++}| \dots\dots\dots (41)$$

を計算する。 $w^{(i)}$ が十分に小さくなければ $\delta u=0$ は PB3 の最適解ではない。このとき後に示す方法で $\delta u^{(i)}$ を求め, 元のコントロールの候補値に $\delta u^{(i)}$ を加えて

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \delta u^{(i)} \dots\dots\dots (42)$$

を新たにコントロールの候補値とする。 $\delta u=0$ が最適解になるまで, すなわち $w^{(i)}$ が十分に小さくなるまで以上の手順を最初に戻り繰り返す。 $\delta u=0$ が問題 PB3 の最適解である時のコントロールの候補値 $\{u_k^{(i)}\}_{k=0, \dots, T-1}$ が問題 PB2 の最適解である。

4.1.2 解の改善方向の求め方

$\delta u^{(i)}$ を次のようにして求める。

① 添字の集合 $A^{++}(u^{(i)})$ を,

$$\begin{aligned} A^{++}(u^{(i)}) &= \{j, k / u_{jk}^{min} \leq u_{jk}^{(i)} \leq u_{jk}^{max} + \varepsilon^{(i)} \\ &\quad \text{かつ } (\partial J^\wedge(0) / \partial \delta u_{jk}) > 0, \\ &\text{または } u_{jk}^{max} - \varepsilon^{(i)} \leq u_{jk}^{(i)} \leq u_{jk}^{max} \\ &\quad \text{かつ } (\partial J^\wedge(0) / \partial \delta u_{jk}) < 0, \\ &j=1, \dots, u, \quad k=0, \dots, T-1\} \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

で定める。ただし, $\varepsilon^{(i)} = \min\{\varepsilon, w^{(i)}\}$, ε は小さな正の数である。 $u_{jk}, (j, k) \in A^{++}$ を $u_{jk}^{(+)}$ とし active な制約条件に対応するコントロールと呼ぶことにする。 $\delta u^{(+)}$ は,

$$\delta u_{jk}^{(+)} = u_{jk}^{(+)} - u_{jk}^{(i)}$$

で求める。これに対して, $u_{jk}, (j, k) \in A^{++}$ を $u_{jk}^{(-)}$ とし active でない制約条件に対応するコントロールと呼ぶことにする。 $\delta u^{(-)}$ は,

$$\delta u_{jk}^{(-)} = u_{jk}^{(-)} - u_{jk}^{(i)}$$

で求める。

② PB3 からコントロール $\delta u^{(+)}$ に関する項を取り除いた問題の解の改善方向が, $\delta u^{(-)*}$ である。 $\delta u^{(-)*}$ は解析的に求まる。すなわち,

$$\delta u_k^{(-)*} = -D_k [L_k \delta \bar{s}_k^* + A_k], \quad k=0, \dots, T-1 \dots\dots\dots (44)$$

である。ここに,

$$\begin{aligned} D_k &= [(B_k^T K_{k+1} B_k + N_{uu})^{rc}]^{-1}, \\ L_k &= (B_k^T K_{k+1} \Phi_k)^r, \\ A_k &= (B_k^T k_{k+1} + N_{uk})^r, \quad k=0, \dots, T-1, \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

であり, δs_k^* は,

$$\begin{aligned} \delta s_0^* &= 0, \\ \delta s_{k+1}^* &= \Phi_k \delta s_k^* + B_k \delta u_k^*, \quad k=0, \dots, T-1, \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

から得る。ただし, $\delta u_k^{(+)}=0$ であるとする。また, $\{K_k\}_{k=1, \dots, T-1}$, $\{k_k\}_{k=1, \dots, T-1}$ は次式により計算する。

$$\begin{aligned} K_T &= N_{ssT}, \\ K_k &= N_{ssk} + \Phi_k^T K_{k+1} \Phi_k \\ &\quad - [(B_k^T K_{k+1} \Phi_k)^r]^T \cdot [(B_k^T K_{k+1} B_k + N_{uu})^{rc}]^{-1} \cdot [(B_k^T K_{k+1} \Phi_k)^r], \quad k=T-1, \dots, 1. \\ k_T &= N_{sT} \\ k_k &= N_{sk} + \Phi_k^T k_{k+1} \\ &\quad - [(B_k^T K_{k+1} \Phi_k)^r]^T \cdot [(B_k^T K_{k+1} B_k + N_{uu})^{rc}]^{-1} \cdot [(B_k^T k_{k+1} + N_{uk})^r], \quad k=T-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

ただし, $(X)^r$, $(X)^{rc}$ は $A^{++}(u^{(i)})$ に含まれるすべての jk に対応する行, 行と列を消去したものを意味する。

③ $\delta u^{(+)*}$ は, 数値計算上望ましくない “jumping” あるいは “zigzagging” と呼ばれる現象が生じること避けるため, 次のようにして得る。Hessian の対角成分を次式より計算する。

$$\nabla_{\delta u_k}^2 J^{\wedge}(0) = N_{uuk} + B_k^T G_{k+1} B_k, \quad k=T-1, \dots, 0 \dots \dots \dots (47)$$

ここに,

$$\begin{aligned} G_T &= N_{ssT}, \\ G_k &= \Phi_k^T G_{k+1} \Phi_k + N_{ssk}, \quad k=T-1, \dots, 1 \end{aligned}$$

である。これを用いて, $\delta u^{(+)*}$ は,

$$\delta u_{jk}^* = -(\partial^2 J^{\wedge}(0) / \partial u_{jk}^2)^{-1} \cdot (\partial J^{\wedge}(0) / \partial u_{jk}), \quad (j, k) \in A^{++}(u^{(i)}) \dots \dots \dots (48)$$

となる。

④ (44), (48) から得られた改善方向で, 斜影法と Armijo 法とを組み合わせ, 制約条件を満たしかつ目的関数 J の値を減少させるように step-size $\alpha^{(i)}$ を

$$\alpha^{(i)} = \beta^{m_i}$$

と決める。 m_i は非負の整数で

$$\begin{aligned} J(0) - J([\beta^m \delta u^*]^{++}) \geq \\ -\sigma \left[\beta^m \sum_{jk \in A^{++}(u^{(i)})} \frac{\partial J^{\wedge}(0)}{\partial \delta u_{jk}} \delta u_{jk}^* + \sum_{jk \in A^{++}(u^{(i)})} \frac{\partial J^{\wedge}(0)}{\partial \delta u_{jk}} [\beta^m \delta u_{jk}^*]^{++} \right] \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

を満たす最小の m である。ここに, $\beta \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} [\beta^m \delta u_{jk}^*]^{++} = \\ \begin{cases} \delta u_{jk}^{min}, & \beta^m \delta u_{jk}^* \leq \delta u_{jk}^{min} \text{ のとき,} \\ \beta^m \delta u_{jk}^*, & \delta u_{jk}^{min} \leq \beta^m \delta u_{jk}^* \leq \delta u_{jk}^{max} \text{ のとき,} \\ \delta u_{jk}^{max}, & \delta u_{jk}^{max} \leq \beta^m \delta u_{jk}^* \text{ のとき,} \end{cases} \end{aligned}$$

である。 $\alpha^{(i)}$ を用いて改善すべきコントロール $\delta u^{(i)}$ は次式で得られる。

$$\delta u^{(i)} = [\alpha^{(i)} \delta u^*]^{++} \dots \dots \dots (50)$$

4.2 状態量に関する確率的な制約条件の考慮

δs_k は $N(\delta \bar{s}_k, P_{sk})$ に従い, $\{P_{sk}\}_{k=0, \dots, T}$ は $\{\delta u_k\}_{k=0, \dots, T-1}$ に依存しないことに注意すると, 状態ベクトルの確率的な制約条件は, 状態ベクトルの期待値に対する制約条件

$$\bar{s}_{jk}^{min} \leq \bar{s}_{jk} \leq \bar{s}_{jk}^{max}, \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T$$

に変換される。この制約条件は, ペナルティ関数を元の目的関数に付加した拡大目的関数を反復計算により最小化することで満足させる。

4.2.1 問題の定式化

状態量の確率的制約条件(26), (27)を書き換えて扱いよい形にする。現在の状態量の経路 $\{\bar{s}_k^{(i)}\}_{k=1, \dots, T}$ からの偏差 δs_{jk} を用いて(26), (27)を書き直すと,

$$\int_{-\infty}^{\bar{s}_{jk}^{min}} P_r(\delta s_{jk}) d\delta s_{jk} \leq \gamma_{jk}^{min} \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T, \dots (51)$$

$$\int_{\bar{s}_{jk}^{max}}^{+\infty} P_r(\delta s_{jk}) d\delta s_{jk} \leq \gamma_{jk}^{max} \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T, \dots (52)$$

となる。ここに,

$$\delta s_{jk}^{min} = \bar{s}_{jk}^{min} - \bar{s}_{jk}^{(i)}$$

$$\delta s_{jk}^{max} = \bar{s}_{jk}^{max} - \bar{s}_{jk}^{(i)}$$

である。 δs_k の期待値 $\delta \bar{s}_k$ の推移は,

$$\delta \bar{s}_{k+1} = \Phi_k \delta \bar{s}_k + B_k \delta u_k,$$

$$\delta \bar{s}_0 = 0, \quad k=0, \dots, T-1 \dots (53)$$

となり, また δs_k の共分散行列の推移は,

$$P_{s,k+1} = \Phi_k P_{sk} \Phi_k^T + Q_{\varepsilon k},$$

$$P_{s0} = P_0, \quad k=0, \dots, T-1 \dots (54)$$

となる。したがって,

$$\delta s_k \sim N(\delta \bar{s}_k, P_{sk}) \dots (55)$$

である。すなわち, δs_k は $\delta \bar{s}_k$ と P_{sk} とだけから決まる正規分布に従う。 P_{sk} は u_k に依存しないことを注意しておく。

以上のことに注意して(51), (52)を, 状態量の期待値 $\delta \bar{s}_{jk}$ の制約条件に変換する。

正規分布の周辺分布は正規分布であるから, δs_{jk} は正規分布に従う。標準正規分布を考えて,

$$\int_{-\infty}^{\bar{s}_{jk}^{min}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-(1/2)z^2} dz = \gamma_{jk}^{min} \dots (56)$$

を満たす z_{jk}^{min} を見出す。この z_{jk}^{min} を用いて,

$$\delta \bar{s}_{jk} \geq \bar{s}_{jk}^{min} - \sqrt{(P_{sk})_{jj}} z_{jk}^{min} \dots (57)$$

となるように $\delta \bar{s}_{jk}$ を制約すればよい。ここで,

$$\bar{s}_{jk}^{min} = \delta \bar{s}_{jk}^{min} - \sqrt{(P_{sk})_{jj}} z_{jk}^{min} \dots (58)$$

とくと, 結局 δs_{jk} の期待値 $\delta \bar{s}_{jk}$ に関する制約条件

$$\delta \bar{s}_{jk} \geq \bar{s}_{jk}^{min} \dots (59)$$

に変換される。同様にして,

$$\delta \bar{s}_{jk} \leq \bar{s}_{jk}^{max} \dots (60)$$

と変換される。ここに、

$$\delta s_{jk}^{max} = s_{jk}^{max} - \sqrt{(P_{sk})_{jj}} z_{jk}^{max} \dots\dots\dots (61)$$

である。

4.2.2 ペナルティ関数の導入

状態量の期待値に関する制約条件、

$$\delta s_{jk}^{min} \leq \delta s_{jk} \leq \delta s_{jk}^{max} \dots\dots\dots (62)$$

を次のペナルティ関数

$$h_{jk}^{(j)}(\delta s_{jk}) = 1/2C^{(j)} \cdot [\max(\delta s_{jk}^{min} - \delta s_{jk}, 0, \delta s_{jk} - \delta s_{jk}^{max})]^2 \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T \dots\dots\dots (63)$$

を目的関数に付加し繰り返し計算を行うことによって満足させる。ここに、

$$C^{(j)}: \text{正の数で, } C^{(j+1)} = \beta C^{(j)}, \dots\dots\dots (64)$$

β [4, 10], (Bertsekas (1982)²⁶⁾を参照)

である。ここに (j) は繰り返し計算回数を表す。

$h_{jk}^{(j)}(\delta s_{jk})$ は、区分的には δs_{jk} の二次関数であるから元の目的関数に付加しても問題の解き方は、変わらない。すなわち、固定された $C^{(j)}$ でのペナルティ関数を元の目的関数に付加した拡大目的関数 $J^{\wedge}(C^{(j)})$ を最小にする $u^*(C^{(j)})$ を既に示した手法により得ることができる。状態量が確率的制約条件を満たさなければ、(64)式に従い $C^{(j)}$ を $C^{(j+1)}$ に更新し、 $\{u^*(C^{(j)})\}_{j=1, \dots}$ が最適解 u^* に収束するまで最初に戻って繰り返す。

結局、拡大目的関数 $J^{\wedge}(C^{(j)})$ は、

$$h_k(\delta s_k) = 1/2\delta s_k^T N_{ppk} \delta s_k + N_{pk}^T \delta s_k + 1/2N_{pkk}, \quad k=1, \dots, T \dots\dots\dots (65)$$

を $J^{\wedge}$ と J に付加した目的関数であり、 $J^{\wedge}(C^{(j)})$ を最小とする最適なコントロール $u^*(C^{(j)})$ を求めることになる。ここに、 N_{ppk} は対角行列で

$$\{N_{ppk}\}_{jj} = \begin{cases} C^{(j)}, & \delta s_{jk} > \delta s_{jk}^{max} \text{ or } \delta s_{jk} < \delta s_{jk}^{min} \\ 0, & \delta s_{jk}^{min} \leq \delta s_{jk} \leq \delta s_{jk}^{max} \end{cases} \dots\dots\dots (66)$$

であり、 N_{pk} は列ベクトルで

$$\{N_{pk}\}_j = \begin{cases} -\delta s_{jk}^{max}, & \delta s_{jk} > \delta s_{jk}^{max} \\ 0, & \delta s_{jk}^{min} \leq \delta s_{jk} \leq \delta s_{jk}^{max} \\ -\delta s_{jk}^{min}, & \delta s_{jk} < \delta s_{jk}^{min} \end{cases} \dots\dots\dots (67)$$

である。

最後に、状態量に関する確率的な制約条件を考慮する意義について簡単に考えてみる。状態量には絶対的な制約条件がある。例えば、状態量は非負でなければならない。しかしこの制約条件を満たすように将来のコントロールを現時点で決めることは不可能である。そこで確定的な制約条件を確率的な制約条件に変換することにより、問題が定式化され、解を得ることができるという利点がある。

4.3 統計的二次近似の有効性

本研究で定式化した問題の目的関数は、

$$J = \sum_{k=0, \dots, T-1} [E(l_{k+1}(s_{k+1})) + m_k(u_k)] \dots\dots\dots (68)$$

で与えられ、 J が最小となるようなコントロールの系列 $\{u_k\}_{k=0, \dots, T-1}$ を求めたい。ただし、(68)式の期待値 E は、確率変数 s_0 , $\{s_k\}_{k=0, \dots, T-1}$ についてとる。最適化の計算の途中 nominal control に対応す

る状態量の系列 $\{s_k\}_{k=1,\dots,T}$ が, $s_k \sim N(\bar{s}_k^{(i)}, P_{sk})$ であり, P_{sk} が, $\{u_k\}_{k=0,\dots,T-1}$ に関係しないことに注意すると, 第2章の議論が適用できる。すなわち, 平均値ベクトル $\bar{s}_k$ の関数

$$J_{ik}(\bar{s}_k) = E\{l_k(s_k)\} \dots\dots\dots (69)$$

の $s_k = \bar{s}_k^{(i)}$ での勾配, ヘッセ行列は, $s_k \sim N(\bar{s}_k^{(i)}, P_{sk})$ と仮定して, 関数 $l_k(s_k)$ を統計的二次近似した $l_k^{\wedge}(s_k)$ の一次の係数, 二次の係数に等しい。ただし, (69)式の期待値は確率ベクトル $s_k \sim N(\bar{s}_k, P_{sk})$ についてとる。ここで,

$$J_{ik}^{\wedge}(\delta s_k) = E\{l_k^{\wedge}(\delta s_k)\} \dots\dots\dots (70)$$

とおく。ただし, (70)式の期待値は確率ベクトル $s_k \sim N(\bar{s}_k, P_{sk})$ についてとる。以上の議論より,

$$\nabla_{sm} J_{ik}(\bar{s}_m^{(i)}) = \nabla_{\delta sm} J_{ik}^{\wedge}(0) \dots\dots\dots (71)$$

$$\nabla_{sm}^2 J_{ik}(\bar{s}_m^{(i)}) = \nabla_{\delta sm}^2 J_{ik}^{\wedge}(0) \dots\dots\dots (72)$$

である。一方, $u_k = u_k^{(i)}$ の近傍で Taylor 展開を用いて $m_k^{\wedge}(\delta u_k)$ を得たから,

$$\nabla_{um} m_k(u_k^{(i)}) = \nabla_{\delta um} m_k^{\wedge}(0) \dots\dots\dots (73)$$

$$\nabla_{um}^2 m_k(u_k^{(i)}) = \nabla_{\delta um}^2 m_k^{\wedge}(0) \dots\dots\dots (74)$$

である。

$\nabla_{uk} J(u)$, $\nabla_{uk}^2 J(u)$ は,

$$\nabla_{um} J(u) = \sum_{k=1,\dots,T} \{\nabla_{um} \bar{s}_k \nabla_{sk} J_{ik}(\bar{s}_k)\} + \nabla_{um} m_m(u_m) \dots\dots\dots (75)$$

$$\nabla_{um}^2 J(u) = \sum_{k=1,\dots,T} \{\nabla_{um} \bar{s}_k \nabla_{sk}^2 J_{ik}(\bar{s}_k) (\nabla_{um} \bar{s}_k)^T\} + \nabla_{um}^2 m_m(u_m) \dots\dots\dots (76)$$

であるから, (71)~(74)より

$$\nabla_{um} J(u_k^{(i)}) = \nabla_{\delta um} J_k^{\wedge}(0) \dots\dots\dots (77)$$

$$\nabla_{um}^2 J(u_k^{(i)}) = \nabla_{\delta um}^2 J_k^{\wedge}(0) \dots\dots\dots (78)$$

である。したがって, 統計的二次近似を用いたことによって, 確率変数の関数の期待値を目的関数に含む問題において最適化手法を実現したことになる。

5. 統計的二次近似手法を用いた実時間操作手法の提案

本章では, 3章で定式化した問題 PB0 を基本とし, 入力予測情報の有効利用を考慮したモデルにおける実時間操作のアルゴリズムを提案する。

PB0 との違いは, 状態方程式に入力ベクトルが含まれることである。すなわち, 状態方程式が,

$$s_{k+1} = \Phi_k s_k + B_k u_k(I_k) + F_k \gamma_k + \xi_k \dots\dots\dots (79)$$

と表される。ここに, γ_k は n_r 次元入力ベクトル, F_k は $n_s \cdot n_r$ 次係数行列, である。

以下では, 入力予測システムの存在を仮定し, 次に述べる入力予測情報が入力予測システムからシステムに供給されるものとする。すなわち, 各時刻 k において, 将来の時刻 $T-1$ までの入力ベクトルを

$$\gamma_k = \begin{bmatrix} \gamma_{k+1} \\ \vdots \\ \gamma_{T-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (80)$$

とおくとき, γ_k の推定値

$$\hat{\gamma}_k = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_{T-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (81)$$

とその推定誤差共分散行列

$$V\{y_k - \hat{y}_k\} = R_{rk} \dots\dots\dots (82)$$

が入力予測システムから供給されるとする。

5.1 システムの初期化とフィルタリング

実時間操作を開始するために、初期時刻 $k=k_0$ で、 $\hat{s}_{k_0}$: 観測ベクトル y_{k_0} が得られる前の s_{k_0} の推定値、 $\hat{P}_{k_0}$: $\hat{s}_{k_0}$ による s_{k_0} の推定誤差の共分散行列、が与えられている。

このとき、OLFC の手順によれば、現在までの情報 I_{k_0} を用いて、状態 s_{k_0} の確率分布を求める。すなわち、 $\hat{s}_{k_0}$: 観測ベクトル y_{k_0} が得られる後の s_{k_0} の推定値、 $\hat{P}_{k_0}$: $\hat{s}_{k_0}$ による s_{k_0} の推定誤差の共分散行列、を求めることを考える。観測値 y_{k_0} (m 次元ベクトル) は、

$$y_{k_0} = g(s_{k_0}) + w_{k_0} \dots\dots\dots (83)$$

と表されることに注意して、この観測更新の手順を要約して示す (高棹・椎葉・富沢 [1984])。

(1) 統計的二次近似によって、

$$g_i(s_{k_0}) = B_i^* + H_{si}(s_{k_0} - \hat{s}_{k_0}) + \delta_i \dots\dots\dots (84)$$

と近似する。ただし、

$$\delta_i = 1/2(s_{k_0} - \hat{s}_{k_0})^T A_i (s_{k_0} - \hat{s}_{k_0}) \dots\dots\dots (85)$$

(2) $\delta = [\delta_1 \dots \delta_m]^T$ の期待値 $E\{\delta\}$, 分散 $V\{\delta\}$ を求める。

$$E\{\delta_i\} = 1/2 \text{tr}[A_i \hat{P}_{k_0}] \dots\dots\dots (86)$$

$$\text{Cov}\{\delta_i, \delta_j\} = 1/2 \text{tr}[A_i \hat{P}_{k_0} A_j \hat{P}_{k_0}] \dots\dots\dots (87)$$

(3) 以上の近似を用いると、

$$y_{k_0} - \{B^* - H_s \hat{s}_{k_0} + E\{\delta\}\} = H_s s_{k_0} + w_{new} \dots\dots\dots (88)$$

$$\text{ただし、 } H_s = [H_{s1}^T \dots H_{sm}^T]^T$$

$$w_{new} = \delta - E\{\delta\} + w_k$$

$$E\{w_{new}\} = 0,$$

$$V\{w_{new}\} = V\{\delta\} + Q_{wk}$$

と書けるから、左辺を観測値、 H_s を s_{k_0} の係数ベクトル、 w_{new} を観測誤差として線形フィルタを適用して、 $\hat{s}_{k_0}$, $\hat{P}_{k_0}$ を得る。

$$\hat{s}_{k_0} = \hat{s}_{k_0} + K_{k_0}(y_{k_0} - B^* - E\{\delta\}) \dots\dots\dots (89)$$

$$\hat{P}_{k_0} = \hat{P}_{k_0} - K_{k_0} H_s^T \hat{P}_{k_0} \dots\dots\dots (90)$$

ただし、

$$K_{k_0} = \hat{P}_{k_0} H_s^T (H_s \hat{P}_{k_0} H_s^T + V\{\delta\} + Q_{wk})^{-1}$$

時刻 k_0 で y_{k_0} が得られない、すなわち欠測のときは、

$$\hat{s}_{k_0} = \hat{s}_{k_0}, \hat{P}_{k_0} = \hat{P}_{k_0} \dots\dots\dots (91)$$

とすることになる。

(90)式は、そのままコーディングすると、桁落ちして $\hat{P}_{k_0}$ の計算精度が低下して、ついには $\hat{P}_{k_0}$ が非正則になることもある。これに対して Bierman (1977)²⁷⁾が提案している UD フィルターは数値的に安定であり、 P_{k_0} の正則性も保たれる。よって、本研究では、 P_{k_0} を $P_{k_0} = U_{k_0} D_{k_0} U_{k_0}^T$ と UD 分解して実際に計算することにする。

5.2 コントロールの決定と入力予測情報の考慮

時刻 k_0 で y_{k_0} を用いた観測更新の後、すなわち、 s_{k_0} , D_{k_0} , U_{k_0} が得られている時点で、現在時刻のコントロール u_{k_0} を決定することを考える。

open loop の考え方から、現在時刻のコントロールを決定するときには、時刻 k_0 以降では入力システムが存在しないと仮定する。時刻が更新されると、入力予測システムからの新しい入力情報を用いる。

(80), (81)に示したように、現在時刻 k_0 で、時刻 $T-1$ までの入力ベクトル γ_{k_0} の予測値 $\hat{\gamma}_{k_0}$, その予測誤差共分散行列 $R_{\gamma k_0}$ が与えられるとする。

この情報をシステムに組み込むために、 $R_{\gamma k_0}$ を

$$R_{\gamma k_0} = S_{\gamma k_0} S_{\gamma k_0}^T \dots\dots\dots (92)$$

と分解する。ただし、 $S_{\gamma k_0}$ は rank が m の $M \cdot m$ 行列である。 $M = n_r(T - k_0)$ である。

この $S_{\gamma k_0}$ を用いて、未知確率ベクトル e_{k_0} を

$$e_{k_0} = (S_{\gamma k_0}^T S_{\gamma k_0})^{-1} S_{\gamma k_0}^T (\gamma_{k_0} - \hat{\gamma}_{k_0}) \dots\dots\dots (93)$$

と定義する。 γ_{k_0} の予測値が $\hat{\gamma}_{k_0}$ であるから、 e_{k_0} の推定値は0であり、推定誤差の共分散行列は、

$$E\{e_{k_0} e_{k_0}^T\} = I_m \dots\dots\dots (94)$$

となる。入力ベクトル γ_{k_0} は、逆にこの e_{k_0} を用いて

$$\gamma_{k_0} = \hat{\gamma}_{k_0} + S_{\gamma k_0} e_{k_0}, \quad e_{k_0} \sim N(0, I_m) \dots\dots\dots (95)$$

と表されたと考えてよい。

現在時刻 k_0 を固定し、実時間操作を考えているときには e は時間的に不変で値が未知な確率ベクトルである。そこで、状態ベクトル s_k を拡大して、

$$s_k' = \begin{bmatrix} s_k \\ e_{k_0} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (96)$$

とおくことにする。これにともなって、状態方程式を書き換えると、

$$\begin{aligned} s_{k+1}' &= \Phi_k' s_k' + B_k' u_k + C_k' + \xi_k', \\ k_0 + j - 1 &\leq k \leq k_0 + j, \quad j = 1, \dots, T - 1 - k_0 \dots\dots\dots (97) \end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} \Phi_k' &= \begin{bmatrix} \Phi_k & (0^{*1} F_k 0^{*2}) S_{\gamma k_0}' \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ 0^{*1} &: m \cdot n_r(k - k_0) \text{ の } 0 \text{ 行列} \\ 0^{*2} &: m \cdot n_r(T - 1 - k) \text{ の } 0 \text{ 行列} \\ B_k' &= \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_k' &= \begin{bmatrix} (0^{*1} F_k 0^{*2}) \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi_k' &\sim N(0, 0_{\xi_k}) \\ Q_{\xi_k}' &= \begin{bmatrix} Q_{\xi_k}' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。また、拡大されたベクトル s_k' の時刻 k_0 での値 s_{k_0}' 推定値 $\hat{s}_{k_0}'$, 推定誤差共分散行列の UD 分解行列 $\hat{U}_{k_0}'$, $\hat{D}_{k_0}'$ は元の $\hat{U}_{k_0}$, $\hat{D}_{k_0}$ を用いて

$$\hat{s}_{k_0}' = \begin{bmatrix} \hat{s}_{k_0} \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (98)$$

$$\hat{U}_{k_0}' = \begin{bmatrix} \hat{U}_{k_0} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad \hat{D}_{k_0}' = \begin{bmatrix} \hat{D}_{k_0} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (99)$$

とおくとよい。(97)は、定式化された問題 PB1 の状態方程式と同じ形式で、本研究で提案した手法で、決定すべきコントロール $\{u_k\}$ を得る。すなわち、PB1 を解き、

$$\{u_k^{OLFC}\}_{k=k_0, \dots, T-1}$$

を得る。

$u_{k_0}^{OLFC}$ をシステムに適用する。

5.3 入力の入手と状態ベクトルの予測

時刻 k_0 から単位時間経過して、入力 y_{k_0+1} と、観測ベクトル y_{k_0+1} の値が入手される。この時点での観測更新の前準備として、 y_{k_0+1} の値だけを用いた s_{k_0+1} の事前推定値を求める必要がある。 y_{k_0+1} が既知となっているので、状態ベクトルを拡大する必要はない。

状態ベクトルの推定値、推定誤差共分散行列の推移を考える。 s_k の推移は、 $u_{k_0}^{OLFC}$ を適用したから、

$$s_{k_0+1} = \Phi_{k_0} s_{k_0} + B_{k_0} u_{k_0}^{OLFC} + C_{k_0} + \xi_{k_0} \dots\dots\dots (100)$$

となる。予測更新の理論を適用すると、

$$\hat{s}_{k_0+1} = \Phi_{k_0} \hat{s}_{k_0} + B_{k_0} u_{k_0}^{OLFC} + C_{k_0} \dots\dots\dots (101)$$

$$P_{s, k_0+1} = \Phi_{k_0} \hat{P}_{s, k_0} \Phi_{k_0}^T + Q_{\xi, k_0} \dots\dots\dots (102)$$

である。こうして、 y_{k_0+1} の値を用いた s_{k_0+1} の事前推定が得られれば、次に y_{k_0+1} を用いた観測更新をすることになる。これは、5.1 で取り上げた問題だから、 k_0+1 を k_0 と考えて 5.1 の方法を用いることになる。これで、実時間操作のループが完結した。

6. 適用と考察

本章では、2章～5章で述べたことをプログラム化し、電子計算機での数値実験の結果を示す。6.1 では、テラー展開を用いる場合と比較して最適化問題における統計的二次近似の有効性を実証する。6.2 では、状態量の確率的な制約条件を考える問題に4章で提案した最適化手法を適用する。6.3 では、5章で提案した実時間操作手法をシミュレーションモデルへ適用する。

6.1 適用例 1 統計的二次近似の有効性の実証

——テラー展開を用いる手法との比較

4.3 で示したように平均値ベクトル $\bar{s}_k$ の関数

$$J_{ik}(\bar{s}_k) = E\{l_i(s_k)\} \dots\dots\dots (103)$$

の $\bar{s}_k = \bar{s}_k^{(i)}$ での勾配、ヘッセ行列は、 $s_k \sim N(\bar{s}_k^{(i)}, P_{ik})$ と仮定して、関数 $l_i(s_k)$ を統計的二次近似した $l_k^{\wedge}(s_k)$ の一次の係数列ベクトル、二次の係数行列に等しい。ただし、期待値は確率ベクトル $s_k \sim N(\bar{s}_k, P_{ik})$ についてとる。すなわち

$$l_k^{\wedge}(s_k) = B^* + H(s_k - \bar{s}_k^{(i)}) + 1/2(s_k - \bar{s}_k^{(i)})^T A(s_k - \bar{s}_k^{(i)}) \dots\dots\dots (104)$$

であるとき

$$\nabla J_{ik}(\bar{s}_k^{(i)}) = H^T, \quad \nabla^2 J_{ik}(\bar{s}_k^{(i)}) = A \dots\dots\dots (105)$$

である。

本節では $l_k(s_k)$ の二次近似の方法としてテーラー展開を用い、統計的二次近似した場合と比較する。

状態量に関する関数 $l_k(s_k)$ をコントロール $u_k^{(i)}$ に対応する状態量 s_k の平均値 $\bar{s}_k^{(i)}$ の近傍でテーラー展開し二次関数に近似すると

$$l_k(s_k) = l_k(\bar{s}_k^{(i)}) + N_{sk}^T (s_k - \bar{s}_k^{(i)}) + 1/2 (s_k - \bar{s}_k^{(i)})^T N_{ssk} (s_k - \bar{s}_k^{(i)}) \quad (106)$$

となる。ここに

$$N_{sk} = (\partial l_k(\bar{s}_k^{(i)}) / \partial s_{1,k}, \dots, \partial l_k(\bar{s}_k^{(i)}) / \partial s_{n_k,k})$$

$$N_{ssk} = \begin{bmatrix} \partial^2 l_k(\bar{s}_k^{(i)}) / \partial s_{1,k}^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \partial^2 l_k(\bar{s}_k^{(i)}) / \partial s_{n_k,k}^2 \end{bmatrix}$$

である。一般には、

$$H^T \approx N_{sk}, \quad A \approx N_{ssk} \quad (107)$$

であり、(105)より

$$F J_{lk}(\bar{s}_k^{(i)}) \approx N_{sk}, \quad F^2 J_{lk}(\bar{s}_k^{(i)}) \approx N_{ssk} \quad (108)$$

である。すなわち Taylor 展開による近似式を用いる場合、関数 $J_{lk}(\bar{s}_k)$ の $\bar{s}_k = \bar{s}_k^{(i)}$ での勾配とヘッセ行列を正しく評価することができない。以上のことから目的関数 J を最小とする最適なコントロール u を求めるとき、解の改善・収束の判定において統計的二次近似手法を用いることはテーラー展開を用いるよりも優れていることがわかる。

まず、Taylor 展開による近似と統計的二次近似とが違ふことを示す。後の適用例1で用いる関数

$$l_k(s_k) = (s_k - a_k)(s_k - 3a_k)(s_k - 4a_k)^2, \quad a_k = 0.9$$

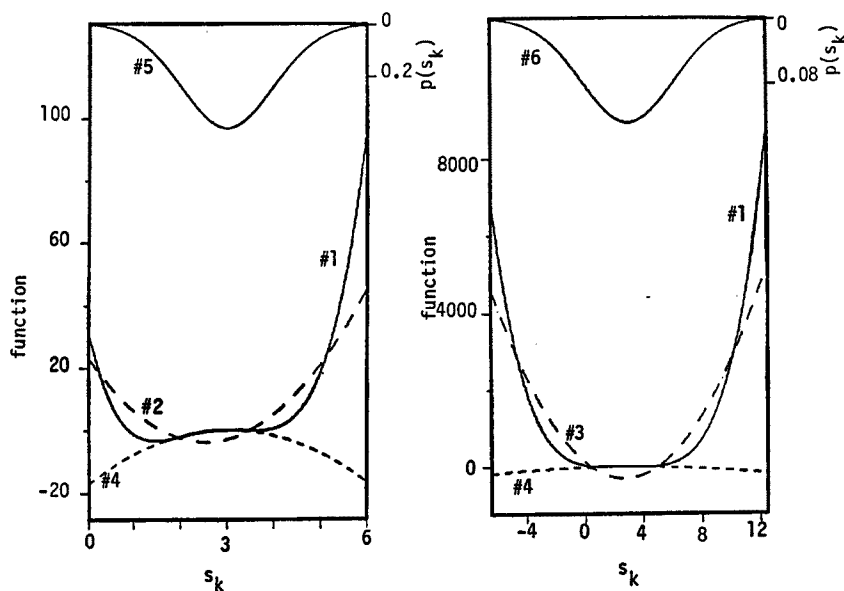


Fig. 1 Approximation of nonlinear function of stochastic variable.

#1: original function $l_k(s_k)$.

#2: second-order approximation function by statistical approximation method while $s_k \sim N(3, 1)$.

#3: second-order approximation function by statistical approximation method while $s_k \sim (3, 10)$.

#4: second-order approximation function by Taylor approximation method at $s_k = 3$.

#5: probability density function $p(s_k)$ while $s_k \sim N(3, 1)$.

#6: probability density function $p(s_k)$ while $s_k \sim N(3, 10)$.

と $l_k(s_k)$ を統計的二次近似した関数, $l_k(s_k)$ を Taylor 展開によって二次近似した関数を **Fig. 1** に示す。ただし, **Fig. 1** の #1 は関数 $l_k(s_k)$, #2 は $s_k \sim N(3, 1)$ として統計的二次近似して得られる関数, #3 は $s_k \sim N(3, 10)$ として統計的二次近似して得られる関数, #4 は $s_k=3$ の近傍で Taylor 展開を用いて近似した二次関数である。#2 と #4 または #3 と #4 を比較すると Taylor 展開を用いた近似が局所的に近似しているのに対し, 統計的二次近似は大域的に近似していることがわかる。また, #2 と #3 を比較すると, 分散が大きくなるにしたがいより大域的に近似していることがわかる。

次に, 最適化問題における統計的二次近似の有効性を **Fig. 2** に示す問題で考える。 $l_k(s_k)$ としては, 次の条件

- (1) $E\{l_k(s_k)\}$ が常に存在し, 解析的に問題を解くことができる。
- (2) 目的関数 J に最小値が存在する。**Fig. 2** に示す問題では, J に最小値が存在しかつ局所的な最小値が存在しない。
- (3) 非線形な関数で, 統計的二次近似と Taylor 展開による近似とが異なる関数である。また, Taylor 展開によって近似できるように 2 階微分可能である。

を満たす関数を用いる。(1)~(3)を満たす関数のうち更に

- (4) $l_k(s_k)$ は局所的な最小値をもつ。

を満たす関数として, **Fig. 2** に示す四次関数 $l_k(s_k)$ を用いる。また, $m_k(u_k)$ は簡単のために二次関数を用いる。

Table 1 に得られたコントロールと目的関数の値を示す。**Fig. 3** は各イテレーションごとの目的関数値をプロットして目的関数値が収束して行くようすを示したものである。**Fig. 3** よりテラー展開を用いた場合, コントロール u_k の初期値が異なると, 異なった目的関数値に収束し, 得られたコントロールは最適

$$\begin{aligned} \text{Dimension of state vector} & n_s=1 \\ \text{Dimension of control vector} & n_u=1 \\ \text{Control horizon} & T=2 \\ \text{System dynamics} & s_{k+1}=s_k-u_k+5.0+\xi_k \quad k=0, \dots, T-1 \\ & s_0 \sim N(\bar{s}_0, p_{s0}), \quad \bar{s}_0=3.0, \quad p_{s0}=1.0 \\ & \xi_k \sim N(0, Q_{\xi k}), \quad Q_{\xi k}=1.0 \\ \text{Objective function} & J=E\{\sum_{k=0, \dots, T-1} (l_{k+1}(s_{k+1})+m_k(u_k))\} \\ & l_{k+1}(s_{k+1})=(s_{k+1}-a_{k+1})(s_{k+1}-3a_{k+1}-4a_{k+1})^2 \\ & a_1=0.9 \quad a_2=0.9 \\ & m_k(u_k)=1/10 \cdot (u_k-b_k)^2 \\ & b_0=1.0 \quad b_1=1.0 \\ \text{Constraints of control variables} & 4.0 \leq u_k \leq 7.0, \quad k=0, \dots, T-1 \end{aligned}$$

Fig. 2 Problem 1 for comparing the Taylor Aproximation with the Statistical Second-Order Approximation.

Table 1 Computational result of problem 1
—value of objective function and control series

	St. A. 1 ^{#1}	Ta. E. 1 ^{#2}	St. A. 2 ^{#3}	Ta. E. 2 ^{#4}	An. So. ^{#5}
value of J	30.242	57.722	30.242	66.998	30.242
control u_0	5.372	4.419	5.372	6.506	5.372
control u_1	4.950	4.858	4.950	4.960	4.950

- #1: $l_k(s_k)$ is approximated by statistical second-order method and the initial nominal control is the upper constraints of control.
- #2: $l_k(s_k)$ is approximated by Taylor second-order approximation method and the initial nominal control is the upper constraints of control.
- #3: $l_k(s_k)$ is approximated by statistical second-order method and the initial nominal control is the lower constraints of control.
- #4: $l_k(s_k)$ is approximated by Taylor second-order approximation method and the initial nominal control is the lower constraints of control.
- #5: analytical solution.

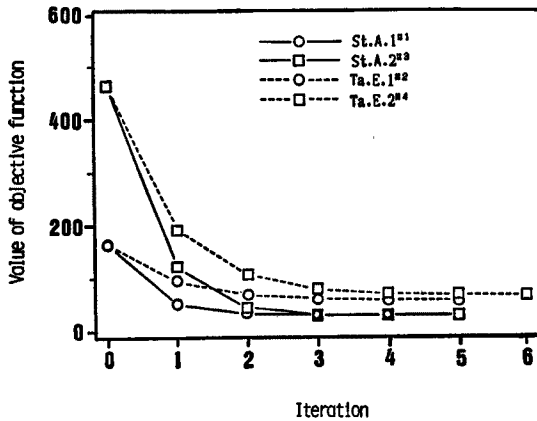


Fig. 3 Computational result of problem 1.
—decreasing value of objective
function with iteration.

Dimension of state vector $n_s=2$

Dimension of control vector $n_u=2$

Control horizon $T=6$

System dynamics

$$s_{k+1} = \Phi_k s_k + B_k u_k + C_k + \xi_k \quad k=0, \dots, T-1$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C_k = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\xi_k \sim N(0, Q_{\xi k}), \quad Q_{\xi k} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad k=0, \dots, T-1$$

$$s_0 \sim N(\bar{s}_0, P_{s0}), \quad \bar{s}_0 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$P_{s0} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Objective function

$$J = E\{\sum_{k=0}^{T-1} (l_{k+1}(s_{k+1}) + m_k(u_k))\}$$

$$l_{k+1}(s_{k+1}) = \cosh(s_{1,k+1} - a_{1,k+1}) + \cosh(s_{2,k+1} - a_{2,k+1})$$

$$m_k(u_k) = \cosh(u_{1,k} - b_{1,k}) + \cosh(u_{2,k} - b_{2,k})$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.85 & 0.9 & 0.95 & 1.0 & 1.05 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.55 & 0.6 & 0.65 & 0.7 & 0.75 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Constraints of control variables

$$0.0 \leq u_{ik} \leq 3.0 \quad i=1, \dots, n_u \quad k=0, \dots, T-1$$

Chance constraints of state variables

$$s_{jk}^{min} = 0.0, \quad s_{jk}^{max} = 3.0, \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T$$

$$\gamma_{jk}^{min} = 0.2, \quad \gamma_{jk}^{max} = 0.2, \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T$$

Fig. 4 Problem 2 for testing the optimization method.

解ではないことがわかる。しかし、統計的二次近似を用いた場合、コントロール u_k の初期値によらず一つの目的関数値に収束し、得られたコントロールは解析解とほとんど一致する。

6.2 適用例 2 状態量の確率的な制約条件を考える問題

Fig. 4 に示した問題を考える。これは、Fig. 5 に示す二つの直列のダム貯水池からなるシステムを表す。目的関数は、条件

(1) $E\{l_k(s_k)\}$ が常に存在し、解析的に問題を解くことができる。

(2) 目的関数 J に最小値が存在する。Fig. 4 に示す問題では、 J に最小値が存在しなかつ局所的な最小値が存在しない。

(3) $l_k(s_k)$ と $m_k(u_k)$ は非線形な関数であり、二次関数ではない。

を満たす関数のうち双曲線関数 $\cosh$ を用いる。

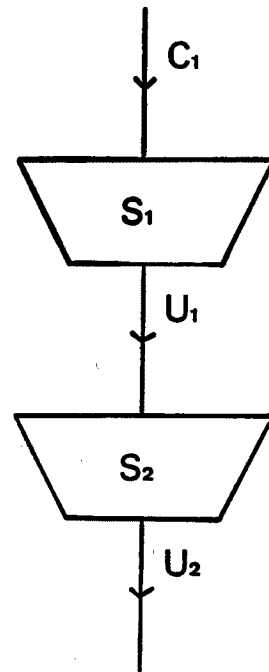


Fig. 5 Two-reservoir
problem configuration.

Table 2 Computational result of problem 2
—value of objective function, control and state series

value of objective function (J)			37.705	
value of penalty function (h)			0.000	
J+h			37.705	
	control		state	
time	u_{1k}	u_{2k}	$\bar{s}_{1,k+1}(\bar{s}_{1,k+1}^{min}, \bar{s}_{1,k+1}^{max})$	$(\bar{s}_{2,k+1}(\bar{s}_{2,k+1}^{min}, \bar{s}_{2,k+1}^{max}))$
$k=0$	0.138	0.145	0.862 (0.652, 2.348)	0.693 (0.652, 2.202)
$k=1$	0.227	0.122	0.936 (0.798, 2.202)	0.798 (0.798, 2.202)
$k=2$	0.247	0.124	0.988 (0.922, 2.078)	0.922 (0.922, 2.078)
$k=3$	0.241	0.132	1.048 (1.031, 1.969)	1.031 (1.031, 1.969)
$k=4$	0.219	0.120	1.129 (1.129, 1.871)	1.129 (1.129, 1.871)
$k=5$	0.210	0.119	1.220 (1.220, 1.780)	1.220 (1.220, 1.780)

Gothic: chance constraint of state variable is active

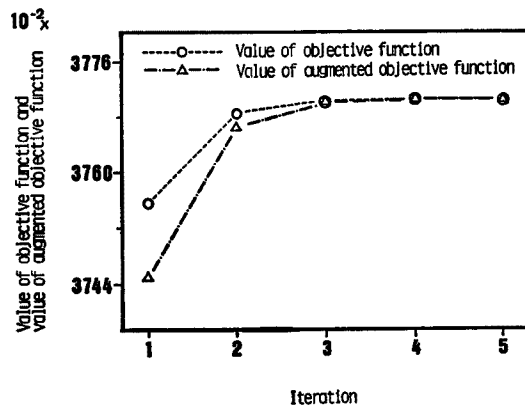


Fig. 6 Computational result of problem 2.
—converging value of objective function with iteration.

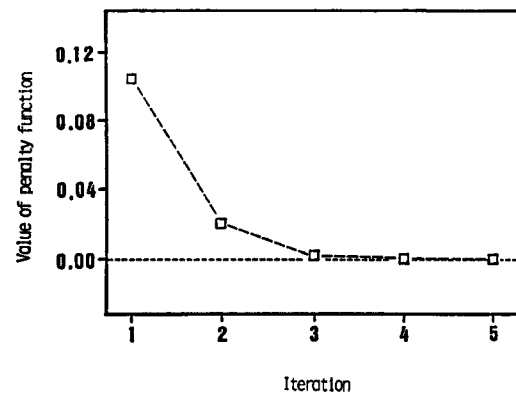


Fig. 7 Computational result of problem 2.
—decreasing value of penalty function with iteration.

Table 2 に得られたコントロールと状態量の平均値および目的関数の値を示した。Fig. 6 は、ペナルティ関数のパラメータ $C^{(j)}$ に対する最適解 u_k での拡大目的関数の値および目的関数の値とパラメータ $C^{(j)}$ の更新回数 j との関係を示したものである。Fig. 7 はペナルティ関数の値と更新回数 j との関係を示したものである。ペナルティ関数の値は、0 にほとんど等しく、得られたコントロールによる $\{s_k\}_{k=1,\dots,T}$ は確率的な制約条件を満たしていることがわかる (Table 2 の太字部分)。

6.3 シミュレーションモデルへの実時間操作手法の適用例

5 章で提案した実時間操作手法をシミュレーションモデルへ適用し、その結果を示す。

システムは、6.2 節に示したシステムと同様に直列の二つのダム貯水池から構成される。目的関数は、6.2 節で示した理由で同様に cosh を用いる。観測は、

$$y_{ik} = s_{ik}^3 + w_{ik}, \quad i=1, \dots, n_s, \quad k=0, \dots, T-1$$

$$\text{観測ノイズ } w_k \text{ の共分散行列 } Q_{w_k} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.01 \\ 0.01 & 1.0 \end{bmatrix}$$

に従い、二次元のベクトル値が得られるとする。状態量はダム貯水池の貯水量、コントロールベクトルは放流量、観測ベクトルは、例えば、ダム貯水池の水位と考えることができる。問題を **Fig. 8** にまとめて示す。

シミュレーションモデルへの実時間操作手法の適用の手順は、次のようになる。

- (1) 初期状態ベクトル s_0 を発生させる。
- (2) 観測ベクトルを得る。
- (3) 観測ベクトルを用いてフィルタリングする。
- (4) コントロールを決定する。
- (5) コントロールをシステムに適用して状態が推移する。
- (6) (2)に戻る。

$N(m, P)$ に従う n 次元の確率変数 x は次のようにして発生させる。

Dimension of state vector $n_s=2$

Dimension of control vector $n_u=2$

Control horizon $T=6$

System dynamics

$$s_{k+1} = \Phi_k s_k + B_k u_k + C_k + \xi_k, \quad k=0, \dots, T-1$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} 5.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\xi_k \sim N(0, Q_{\xi_k}), \quad Q_{\xi_k} = \begin{bmatrix} 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 \end{bmatrix}, \quad k=0, \dots, T-1$$

$$s_0 \sim N(\bar{s}_0, P_{s0}), \quad \bar{s}_0 = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 80.0 \end{bmatrix}$$

$$P_{s0} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Objective function

$$J = E \{ \sum_{k=0}^{T-1} (l_{k+1}(s_{k+1}) + m_k(u_k)) \}$$

$$l_{k+1}(s_{k+1}) = \cosh \{ 0.01(s_{1,k+1} - a_{1,k+1}) \} + \cosh \{ 0.01(s_{2,k+1} - a_{2,k+1}) \}$$

$$m_k(u_k) = \cosh \{ 0.01(u_{1,k} - b_{1,k}) \} + \cosh \{ 0.01(u_{2,k} - b_{2,k}) \}$$

$$a_{ik} = 20.0, \quad i=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T$$

$$b_{ik} = 10.0, \quad i=1, \dots, n_u, \quad k=0, \dots, T-1$$

Constraints of control variables

$$0.0 \leq u_{ik} \leq 50.0 \quad i=1, \dots, n_u, \quad k=0, \dots, T-1$$

Chance constraints of state variables

$$s_{jk}^{min} = 5.0, \quad s_{jk}^{max} = 95.0, \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T$$

$$\gamma_{jk}^{min} = 0.05, \quad \gamma_{jk}^{max} = 0.05, \quad j=1, \dots, n_s, \quad k=1, \dots, T$$

Observation equations

$$y_{ik} = s_{ik}^3 + w_{ik}, \quad i=1, \dots, n_s, \quad k=0, \dots, T-1$$

$$w_{ik} \sim N(0, Q_{w_k}), \quad Q_{w_k} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.01 \\ 0.01 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Fig. 8 Problem 3 for testing the real-time operation algorithm.

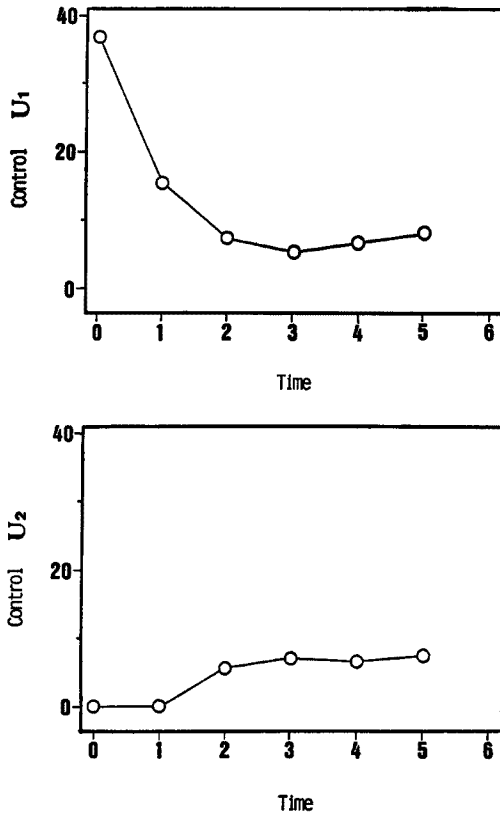


Fig. 9 Computational result of problem 3
—control series.

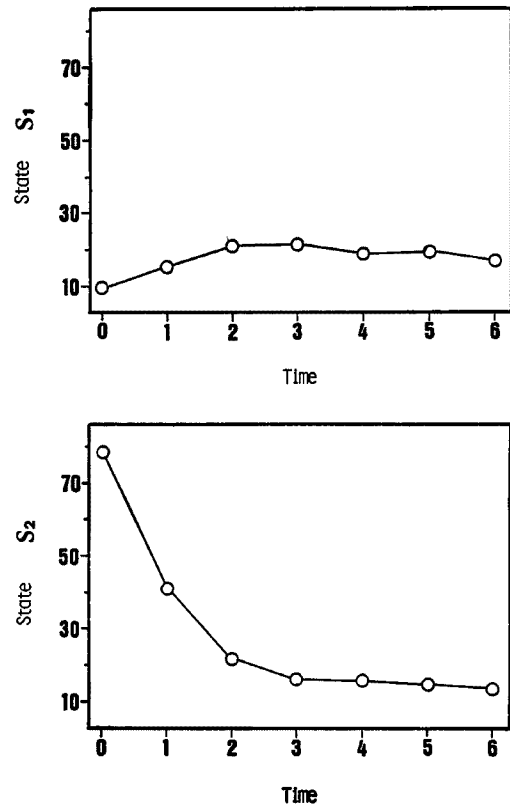


Fig. 10 Computational result of problem 3
—changing state value.

- (1) 共分散行列 P を $P=UDU^T$ と UD 分解する。
- (2) $N(m, D)$ に従う正規変数 z を発生させる。
- (3) $x=Uz$ とすると、確率変数 x は $N(m, P)$ に従う。

以上の方法を用いて、観測方程式のノイズ項 w_k 、状態方程式のノイズ項 ξ_k を発生させる。独立な正規変数の発生には、富士通のサブルーチンライブラリー SSLII のサブルーチン RANN2 を用いる。

Fig. 9 に得られたコントロール、**Fig. 10** にコントロールを適用した結果得られる状態ベクトルの係列を示す。目的関数に含まれる $l_k(s_k)$ と $m_k(u_k)$ に注意すると、状態ベクトル s_k は $[20 \ 20]^T$ 、コントロールベクトル u_k は $[10 \ 10]^T$ に近いほどよい。時刻が進むと初期状態の影響が少なくなりコントロールベクトルの値が一定の値の近くとなる。上流からの流入が5であるから、 $u_k=[20 \ 20]^T$ かつ $s_k=[10 \ 10]^T$ とすることはできない。 u_{1k} と u_{2k} は10よりも少し小さく、 s_{1k} と s_{2k} は20よりも少し小さくなる。 u_{1k} は、 s_{1k} が初期時刻に9.6と小さいため、時刻0, 1では放流していない。一方 u_{2k} は、 s_{2k} が初期時刻に78.5と大きいために、時刻0, 1では大量に放流している。

本研究で提案した実時間操作手法が実現され、その有効性が示された。

7. おわりに

本研究では、システムの不確かさ、観測情報・インプットの予測の有効利用、コントロールと状態の確率的な制約条件、「次元の呪い」の問題を念頭におき、確率ベクトルの関数の大域的な近似手法である統計的二次近似手法を用いたダム貯水池群実時間操作手法を提案し、その計算機プログラム化の検討結果を提示し

た。

ダム貯水池の操作は、非常に広範な問題を含む。その全てを解決するものではないが、本研究で提案した手法は特に以下の点で有効である。

(1) 確率的な問題において DDP に似た方法を用いることによって、「次元の呪い」から解放される。

(2) 目的関数の状態ベクトルに関する部分は、統計的二次近似を用いて二次関数に近似する。状態ベクトルが確率変数であるから、Taylor 展開を用いて局所的に近似するよりも大域的に近似する統計的二次近似を用いる方がよい。

今後実流域に適用するためには、次のような課題を解決しなければならない。

(1) 流域モデルが非線形・連続時間システムであるとき、離散時間線形システムに変換しなければならない。その方法については、高樫・椎葉・富沢 (1984)²³⁾ を参考にできるが、その計算の実現を図らなければならない。

(2) コントロールを決める時間間隔をどの程度にするか。連続時間システムを離散化するとき用いるタイムステップと関係する。

(3) コントロールを考える制御期間をどの程度とればよいか。終端での目的関数の決め方とも関係する。

(4) 流域モデルの構成にあたり、部分河道網を考えた。分点をどの様にとればよいかという問題がある。すなわち、分点を河道網上のどの位置に幾つぐらいとればよいかという問題である。

(5) 目的関数をどのように与えるか。実流域に適用するためには避けられない非常に大きな問題である。

以上に挙げたように、実流域に適用するには多くの問題を解決しなければならない。本研究では、今後の発展の「基礎」としてのダム貯水池群の実時間操作手法の確立を図った。

参 考 文 献

- 1) Little, J. D. C.: The Use of Storage Water in A Hydroelectric System, Oper. Res., 3, 187, 1955.
- 2) Bellman, R. E.: Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- 3) Hall, W. A. and N. Buras: The Dynamic Programing Approach to Water Resources Development, J. Geophys. Res., 66 (2), 517, 1961.
- 4) Murray, D. M. and S. J. Yakowitz: Constrained Differential Dynamic Programming and Its Application to Multireservoir Control, Water Resources Research, Vol. 15, No. 5, pp. 1017-1027, 1979.
- 5) Jacobson, D. and D. Mayne: Differential Dyanamic Programming, Elsevier, New York, 1970.
- 6) Young, G. K.: Finding Reservoir Operation Roules, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 93, HY6, pp. 297-321, 1967.
- 7) Jettmar, R. U. and G. K. Young: Hydrologic estimation and economic regret, Water Resources Research, Vol. 11, No. 5, pp. 648-656, 1975.
- 8) Cloley II, T. E.: Sequential Determinstic Optimization in Reservoir Operation, Journal of Hydraulics Division ASCE, Vol. 100, No. HY3, 443-459, 1974.
- 9) Takasao, T., S. Ikebuchi and T. Kojiri: An Approach to the Adaptive Flood Contorol by Multireservoir Systems, the memoirs of the Faculty of Eng., Kyoto Unive., Vol. XXXVIII, Part 3, 1976, pp. 103-116.
- 10) Schweig, Z. and Cole, J.: Optimal Control of Linked Reservoirs, Water Resources Research, Vol. 4, No. 3, pp. 479-497, 1968.
- 11) Butcher, W.: Stochastic Dynamic Programming for Optimum Reservoir Operation, Water Resources Bulletin, Vol. 7, No. 1, pp. 115-123, 1971.

- 12) Su, S. and Deininger, R.: Modeling the Regulation of Lake Superior Under Uncertainty of Gutture Water Supplies, Water Resources Research, Vol. 10, No. 1, pp. 11-25, 1974.
- 13) Yeh, W. W-G: State of the Art Review: Theories and Applications of Systems Analysis Techniques to The Optimal Management and Operation of a Reservoir system, NCLA-ENG-82-52, 1982.
- 14) Buchanan, R. and R. Bras: Study of Real-time Adaptive Closed-Loop Control for Reservoir Operation, Ralph M. Parsons Lab. for Water Resources and Hydrodynamics, Dept. of Civil Engineering, M. I. T., TR No. 265, 1981.
- 15) Askew, A. and Marks, D.: Chance-Constrained Dynamic Programming and the Optimization of water Resource Systems, Water Resources Reseach, Vol. 10, No. 6, pp. 1099-1106, 1974a.
- 16) Askew, A.: Optimum Reservoir Operating Policies and The imposition of a Reliability Constraint, Water Resources Research, Vol. 10, No. 1, pp. 51-56, 1974b.
- 17) Sniedovich, M.: Reliability-Constrained Reservoir Control Problems: 1. Methodological Issues, Water Resources Research, Vol. 15, No. 6, pp. 1754-1582, 1979.
- 18) Sniedovich, M.: A VAriance-Costrained Reservoir Control Problem, Water Resources Research, Vol. 16, No. 2, pp. 271-274, 1980a.
- 19) Sniedovich, M.: Analysis of a Chance-Constrained Reservoir Control Model, Water Resources Research, Vol. 16, No. 5, pp. 849-853, 1980b.
- 20) Wasimi, S. and Kitanidas: Real-Time Forecasting and Daily Operation of a Multireservoir system During Floods by Linear Quadratic Gaussian Control, Water Resources Research, Vol. 19, No. 6, pp. 1511-1522, 1983.
- 21) Georgakakos, A.: Optimal Operation Planning of Uncertain Multireservoir Systems, Ralph M. Pparsons Lab. for Water resoures and Hydrodynamics, Dept. of Civil Engineering, M. I. T., Cambridge, Mass., 1983.
- 22) Georgakakos, A. P. and D. H. Marks: Real Time Control of Reservoir Systems, Dept. of Civil Engineering, M. I. T., TR No. 301, Cambridge, Mass., 1985.
- 23) 高棹琢馬, 椎葉充晴, 富澤直樹: 統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成, 京都大学防災研究所年報第27号 B-2, 別刷 pp. 1-19, 1984.
- 24) 高棹琢馬, 椎葉充晴, 中北英一: 河道網系 Kinematic Wave モデルの集中化, 京都大学防災研究所年報第29号 B-2, 別刷 pp. 1-6, 1986.
- 25) Bertsekas, D.: Dynamic Programming and Stochastic Control, Academic Press, New York, 1976.
- 26) Bertsekas, D.: Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Method, Academic Press, New York, 1982.
- 27) Bierman, G. J.: Factorization Method for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, New York, 1977.