

H. Cartan's theorem A, B with some structures

都立大・理・筈倉 領夫

1. [] に於いて筆者は '代数性を持つ' ^{Stein} 多様体' に対しその構造が反映する様な '解析的連接層' のホモロジー論を展開した。その主結果は表題の Th. A, B の類似である。[4] の議論から我々は自然に ^{4.2.1.1.7} に述べる二つの '問題' ... 漠然とした形で あらう ... に導かれる。これらの '問題' に関して月下 'hyper provisional' な試みを 行っている。最初の予定では上記の詳細を書く予定であったが、現在 '非常に整理不十分' ... というよりは整理する為の題材自身が揃っていない ... ので詳細を書くに却って中途半端なものになり混乱を生ずるかも知れない。その補正として非常に簡単な形で今後の '希望' を書いておく事にする。(詳細は兎も角書いたのであるが、月下感に出来るものではない。尚すぐ後に述べる '問題' 中第二番目の方は一定の段階には比較的早く到達出来てしがるべきと定めれる。これらの結果は月下準備中(より正確には '予定中' の)論文 [5] に現われるであろう。)

2. 周知の様に Th. A, B はそれ以前の国・Cartan 等の結果を綜合したものであるが、同時に Serre による次の結果も見逃す事は出来ない。

Th. C. (Serre) Th. B $\Rightarrow$ Stein 性.

(正確な定式化は H. Cartan seminar 1953-54 を参照されたい.)

Th. C. の証明自身は非常に簡単であるが、所有の多様体の 'Stein 性' を導く為には、'多様体上のどの様な type の連接層に対して Th. B' が成立は充分であるかが明確である。上記の Th. A~C を背景にしながら簡単に筆者が月下試み (very provisional) を行っている事を '日常会話的論法' で記しておく。さて上記 Th. A~C は所有の多様体 X とその '上部構造' である $\text{Coh}(X) = X$ 上の連接層全体の言葉のみで記述されている。他方解析多様体の研究に於いては '解析構造' と共にそれに対する '附加的構造' を考え合わせる事は非常に重要である。その事は次の二つの事実を思い出す事で充分であるう。

(1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{主に Stein 多様体に於ける凸函数 (P.S.f.)} \\ \text{主に Riemann 多様体に於ける Kähler metric} \end{array} \right\}$ の基本性.

(勿論 '附加的構造' といったのは表面的な言い方であって、深い関係は関係である。) 我々が [4] で行った議論は '解析多様体の解析構造' のみならず '後者 Euclid 空間に自然な形' の (i) での附加構造 --- P.g. 構造 --- を用いている。尚 Cornalba-Grothendieck ([5]) 及び Deligne-Mal'cev ([6]) とも我々の方法と相異なる形で (i) の data が入ってくる。従って以下の我々の希望は P.g. 構造 --- growth 函数と metric --- を附加した形での連接層 -

このモジュール論を[1]に於けるものをも一般化した形で行いた
いという訳である。(正確な定式化は[4]及び[5]を参照され
たい。) 以下について以下で簡単に述べておこう。

3. まず第一に Stein 多様体の理論はそれ以前の $\mathbb{C}^n$ の領域に
関する深い結果を model としている事は周知である。他方代数
幾何に於ける最も基本的な Stein 多様体は Affine 多様体であ
る。

[1], [2] 及び筆者の[4]に於ける議論は
Affine 多様体を model に取っている。 $\mathbb{C}^n$ 内の領域及び Affine
多様体は 'Stein 性' という点では一致しているがその個性はあ
いり異なるものも目撃される。他方 Affine 多様体上の '代数
的連接層の理論' は単に 'Stein 性' という性質だけでは収まらな
い事実をも含んでいる。これらの点から我々は次の如き '希
望' を持つのである。

(I) Stein 多様体(少くともその典型的なもの)に対し、そ
の構造が密接に反映する "p.s. 構造" (growth 函数と metric ... を設定
し、その構造を用いれば、Stein 多様体の一般論で得られる結
果よりも "finer" な結果が得られるであろう。

既に述べた affine 多様体に関する結果は、"p.s. 構造を用い
ば解析的議論のみを用いて '代数的連接層論' を含む事を示して
いる。亦これらの議論から "finer" が単に '精密化' に留まるのみ
事を期待してよい。(I) に関しては筆者は多変数函数論の知

識が充分とは言えないので、^同分野の専門家の人々に「質問」の形で幾つか思いつく事を書いておく。まず (I) に於いては 'growth 函数' 及び 'metric' の存在が最初の問題となる。これに因して、お々は Stein 多相体が次の二つのタイプの場合には議論の様相がかなり相異なるのではないかと思う。

(I)' Stein 多相体 = $\begin{cases} \text{開解析多相体} - \text{開部分解析多相体} \\ \mathbb{C}^n \text{内の有界領域で境界は実解析的計測的。} \end{cases}$

前者の典型は $\mathbb{P}^n$ イン多相体である。境界は複素解析的である。P.S.h. 函数については Selong (C30) に詳しい議論があるのでそれを参照する。まず Affine 多相体では P.S.h. 函数は複素函数系 $t_1, \dots, t_s$ より $\sum |t_i|^2$ 或 $\log(\sum |t_i|^2)$ の形で組立てられる (C1), (C2) 及び (C4)。具体的な形は C1 ~ C4 を参照してもらい。他方 Selong によれば P.S.h. は $\mathbb{C}^n$ 内の領域上では「複素函数」から組立てられる P.S.h. の limit として得られる。(C30, P54) によるから次の様な「質問」は自然であろう。

質問 I. Stein 多相体で P.S.h. 函数が $\sum |t_i|^2$ 或 $\log(\sum |t_i|^2)$ の形に取れるのはいつか？

より詳しくは、Affine 多相体の他に Stein 多相体で上記の形の P.S.h. となるものはあるか？が最初の質問である。

これに因しては、(I)' の最初の形で Affine 的でないものの P.S.h. を定める事も意味があると思われる。他方 (I)' の第二の例

では議論に実解析的 $\mathbb{C}^n$ -的要素が大まかにとも同知である。

質問 II. (I)' の第二の例では $P.S.H.$ が質問 I の中の物には取れないであろう?
(多くの場合)

(尚上記で質問 I の " $\sum |f_i|^2 = \log(\sum |f_i|^2)$ " ... 等を "本質的に複素解析的に紐とてらる子" と置換してもよいであろう。)

次に (I)' の第一の例がアフィン多様体である場合には次の事実
は容易に確かめられる。

(I)" $\{\text{多様体上の regular 函数 (= 代数的)}\} = \{\text{境界に対し 最少の growth を持つ函数}\}$

この事から次の様な質問も不自然でないであろう。

質問 III. (I)' の第二の例に於いて "境界に対し 最少の growth を持つ函数の族" を見出す事は可能か?

恐らく "自然境界" を持つ函数の内 "特に重要な種属" と言うのは
ありうるであろう。多様体が等質空間とかその様な
場合にはこれらの構造と質問 III で述べた函数族の間に関係が
あってもよいであろう。質問 III は特に重要な否かは解らない
が、不自然でないのも事実である。以上は growth 函数に関する
ものばかりであるが、metric に関しては恐らく "完備な
Kähler metric on domains" を議論した Grauert (C. J.) 及びその後の
論文とか "小林 metric" 等が出発点になるであろう。これらに関
して何か教示があれば幸いである。尚上記では Stein 多様体に

ついでのみ述べた。恐らく一般の開多様体で必ずしも Stein 的でないものに関しての "growth 函数及び距離函数の設定" が問題となる。これらに関しては, Andreotti - Grauert ([6]) が恐らく出発点となる。亦代数幾何の側からの幾つかの結果 (Bertini [2] 等) も参考にいれるべきであろう。

3'. 以上では最初 4 Th. A ~ C. には触れていないので、これらに簡単に触れておく。まず第一に Stein 多様体 X に対し growth 函数及び距離函数が設定されたとする。次の仕事は P.g. 連接層を定義する事である。

問題 1. $\text{Coh}(X)_{p.g.} = \{\text{P.g. 連接層全体}\}$ の定義を与えよ。
まず幾つかの例を与える。

例 1. X が Affine 多様体ならば, $\text{Coh}(X)_{p.g.} = \text{Coh}(X)_{\text{alg}} = \{\text{代数的連接層全体}\}$ と置く ([4], [5]).

例 2. X が [4] に於ける "Affine 的" なものの時には, 例 1 の類似で $\text{Coh}(X)_{p.g.}$ が定義される ([5]).

一般的な場合には $\text{Coh}(X)_{p.g.}$ の定義はかなり慎重を要すると思われる。幾つかの criterion を書いておく。

- Criteria 1. (1) $\forall P \in X$ に対して ideal 層 $\mathcal{I}_P \in \text{Coh}(X)_{p.g.}$.
 (2) $\text{Vect}(X)_{p.g.} = \{ \mathcal{L} = \text{vector bundle over } X \text{ with transition matrix の係数が } P(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X)_{p.g.} \text{ から取れる} \} \subset \text{Coh}(X)_{p.g.}$.
 (3) 有限個の函数 $f = (f_1, \dots, f_g) \in P(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X)_{p.g.}$ の loci $V \subset X$ に対し

イデアル層 $\mathcal{I}_V \subset \text{Coh}(\mathbb{A}^n)_{p,q}$.

上記はまず④意味のある層'も含む事が望ましいので書いた訳である。更に取扱い上りるは次の事柄が望ましい。

Criterion 2. $\mathcal{F} \in \text{Coh}(\mathbb{A}^n)_{p,q}$ とする。然るば P.O. Zariski 被覆 $\{U_i\}_{i=1}^n$ が存在して、 $\mathcal{F}$ は各々の U_i 上で大域的切断で生成される。(但し U_i は $\mathbb{A}^n - \{f_i=0\}$; $f_i \in P(\mathbb{A}^n)_{p,q}$ の形。)

従って問題 1, 2 次の如き形に与えておこう。

問題 2. Criteria 1, 2 を満たす $\text{Coh}(\mathbb{A}^n)_{p,q}$ の例を与えよ。(より正確にはそのある多相体 $\mathbb{A}^n$ の例を与えよ。)

さて $\text{Coh}(\mathbb{A}^n)_{p,q}$ の定義が出来たとして、P.O. コホモロジー論を論ずる為には 'P.O. semi norm' を $\text{Coh}(\mathbb{A}^n)_{p,q}$ の元に定義せねばならぬ。例 1, 2 の $\text{Coh}(\mathbb{A}^n)_{p,q}$ に対しては、"semi-norm" を定義する事は可能である。(44, 45: 尚且つ中では $\mathcal{I}$ -層'も含めたが、これは本質的に semi-normed 層 (C.O.) とは変わらない。) そこに於ける事柄中参考となる事柄を記しておこう。

(1) $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ の seminorm $\| \cdot \|$ は普通の絶対値, (2) $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}^n$: 部分層 $\Rightarrow \mathcal{F}$ の seminorm $\| \cdot \|_{\mathcal{F}}$ は inclusion: $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}^n$ より誘導される。(3) $\omega: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$: P.O. 準同型があれば $\| \cdot \|_{\mathcal{G}}$ は $\| \cdot \|_{\mathcal{F}}$ より誘導される。

これらの事実から $\| \cdot \|_{\mathcal{F}}$ は "P.O. 同値" (C.O.) を除き一意に定まる。亦 vector 束 $\mathcal{L}$ に対しては、その構造から seminorm を定め得るが。

それとも一致する(50). 一般の場合には, 次の事柄が問題となる。

問題3. $\text{Coh}(X)_{p,q} \ni \forall \mathcal{F}$ に semi-norm を定義せよ. ((1)~(4) が成立せねばならない.)

さて, $\text{Coh}(X)_{p,q}$ に semi-norm が定義されれば p.i. 複体 $C^*(X, \mathcal{F})_{p,q}$ が定義出来る.

問題4. $C^*(X, \mathcal{F})_{p,q}$ に Th. A. B が成立つ場合を見出せ.

問題5. $C^*(X, \mathcal{F})_{p,q}$ に Th. C. (Serre) が成立つ例を見出せ.

特に (I)' の最初の例 X' に戻す.

問題6. " $C^*(X, \mathcal{F})_{p,q}$ に Th. A. B が成立" $\Leftrightarrow X$: affine 多様体^{*}
(問題6は "worley hypothesis" である. 両辺の gap はそれほど大きくないと思われる. 亦右辺は次の如く理解されたい. $\exists \gamma: X \xrightarrow{\sim} X' (= \text{affine 多様体}) \subset \mathbb{C}^n$: biholomorphism. X' の '自然な p.i. 構造' を γ により pull back すれば, X の p.i. 構造となる.)

上記の事柄は refinements が必要かも知れないが, 少なくとも方針は理解して頂けるであろう. 亦上の如き問題と関連して X 解決はその附随構造の理解が深まる事も期待して良いであろう.

4. 上記は主に Stein 多様体に限ったが, 他方 Affine 多様体は, 一般の代数多様体の開被覆系と対す. これらの事柄から次の事実が自然に思いつく.

(II) [5] の Affine 多様体の結果を一般の quasi proj. 多様体
に拡張する事。

これに関して次の事実が成立つ、([5] に詳細は与えら
るであろう。)

定理 1 X : quasi projective, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)_{\text{alg}}$ ならば、
次の "GAGA-COMPARISON" が成立つ。

$$\star_1 \quad H^*(X, \mathcal{F})_{p.g.} \cong H^*(X, \mathcal{F})_{\text{alg}}.$$

特に X : projective の場合は次の事柄 "GAGA-COM-
parison (Serre)" が成立つ。

$$\star_2 \quad H^*(X, \mathcal{F})_{p.g.} \cong H^*(X, \mathcal{F})_{\text{alg}} \\ \cong H^*(X, \mathcal{F})_{\text{an}}$$

従って 定理 1 は GAGA-COMPARISON $(\star)_2$ の寫る形と
見做す事が可能であろう。 $\star_1$ について簡単に解決しておく、

まず第一に:

$(\star_1)'$ $(\star_1)$ の左辺は解析的定義に基づくものであり、 $(\star_1)$ は
一般の同多様体の 連接層論 は "代数的連接層論" を含む事を意
味する。
p.g.

$\star_2$ の基本性は周知である。但し "同型" の本質的意味を理解す
る事は夫程容易でない。我々は兎も角 "解析及

代数的連接層論が1950年代初期に於ける時代(非常に雰囲気の高い時代)と同様あるいはそれを scale up した形での統一化が始まりつつある(充分である。我々の側からすれば)解析的方法で代数的連接層の理解が目標となる。

問題1. Andreotti-Grauert (60) の P.S. 版を展開せよ。

尚等者の(4)の結果は "Bilder und Urbilder" (50) の situation を含む。(50) の situation の徹底化が我々の主目標となるのである。(50) 将来の

参考文献大.

1. Deligne-Mal'tsionists "GAGA Affine" (Asterisque '74)
2. Cornalba-Griffiths

Inv. '74 (年次)

3. Belong Fonctions Plurisousharmoniques et Formes.
Diff. Positives. (Gordon & BREACH)
4. Sasahara "Cohomology with $\mathbb{R}$ -s. completion theory" (to appear)
5. ——— "A GAGA Comparison in Cohomology with P.g." (in preparation)
6. Andreotti-Grauert. 郡氏の稿を参照せよ。