

新しい 2^m 型直交計画の特徴づけ

国際自然研	山本 純恭 (Sumiyasu Yamamoto)
岡山理大・国際自然研	藤井 淑夫 (Yoshio Fujii)
岡山理大・国際自然研	兵頭 義史 (Yoshifumi Hyodo)
岡山理大(院)	弓場 弘 (Hiromu Yumiba)

従来知られている 2^m 型直交計画では、大きさ n が 2 べきで、最大制約数をもついわゆる直交表 (特定の強さ 2 の直交配列) の m 個の列を選定して得られる直交配列の各列に順次因子を割り付け、行を処理組合せとして実験を供用することがなされている。この場合には、run の数 n は、8, 16, 32 さらに 64 と急速に増大し、実用的でなくなる。ところが次の (i), (ii) で述べる直交配列を用いると、さらに多様な直交計画の存在が期待される:

- (i) 大きさ n が 2 べきの場合のみならず 4 の倍数のとき、最大制約数 $n-1$ をもつ直交配列が実用的な範囲で数多く存在する。これは、位数 $n=4\lambda$ のアダマール行列の存在と同値である。
- (ii) $n \geq 16$ の場合には、因子および水準の置換に関して非同型な最大制約数 $n-1$ をもつ直交配列が複数存在する。非同型な類の数は、 $n=16$ のとき 5, $n=20$ のとき 3 である (Yamamoto et al. (1992a,b)).

本報告の目的は、次の (1) ~ (3) である:

- (1) 大きさ 16 の 5 種の代表直交配列から導かれる 16-run の可能なすべての 2^5 および 2^6 型直交計画を類別 (因子および水準の置換) し、各類の代表計画とその特性ベクトルを列挙する。
- (2) 大きさ 20 の 3 種の代表直交配列から導かれる 20-run の可能なすべての 2^5 型直交計画を類別し、各類の代表計画とその特性ベクトルを列挙する。
- (3) 新しい 2^m 型直交計画を例示し、その特徴づけを行う。

2^m 型要因計画の因子を $F(1), F(2), \dots, F(m)$ とし、 $\theta(\phi), \theta\{t_1\}$ および $\theta(K)$, $K = \{t_1, \dots, t_k\}$ をそれぞれ一般平均, $F(t_1)$ の主効果および $F(t_1), \dots, F(t_k)$ の k 因子交互作用とする。 $n \times m$ (0,1)-配列 T および n 次元列ベクトル $y(T)$ をそれぞれ n -run の 2^m 型要因計画およびその観測値ベクトルとし、その線形モデルを $y(T) = E(T)\Theta + e$ とする。ここに $E(T)$ は $(\alpha, \theta(K))$ 要素が、 $\prod_{i \in K} d(j_i^{(\alpha)})$ である計画行列、 Θ はすべての要因効果のベクトル、 e は誤差ベクトルで $e \sim (0, \sigma^2 I_n)$ とする。ただし、 $d(j) = -1, 1$ ($j = 0, 1$)。観測値の平均は、

$$E[y(j_1^{(\alpha)}, \dots, j_m^{(\alpha)})] = \sum_{u=0}^m \sum_{U \in \Omega(u)} \prod_{i \in U} d(j_i^{(\alpha)}) \theta(U) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

で与えられる. ここに $\Omega(u)$ は $\Omega = \{1, 2, \dots, m\}$ の u 点部分集合の全体である.

定義 1. $\theta(K)$ に対応する $E(T)$ の列ベクトル $\mathbf{d}(K)$ を $\theta(K)$ の loading ベクトルといい, その成分の総和 $\|\mathbf{d}(K)\| = \gamma(K)$ を loading 係数という.

2 つの loading ベクトルの Schur 積 $(*)$ は $\mathbf{d}(U) * \mathbf{d}(V) = \mathbf{d}(U \Delta V)$ を満たす. ここに $A \Delta B$ は集合 A, B の対称差を表す. 情報行列 $M(T) = E(T)'E(T)$ の $(\theta(U), \theta(V))$ 要素は,

$$\varepsilon(U, V) = \|\mathbf{d}(U) * \mathbf{d}(V)\| = \|\mathbf{d}(U \Delta V)\| = \gamma(U \Delta V)$$

で与えられる.

定義 2. 情報行列 $M(T)$ の第 1 行である行ベクトル $\gamma(T)$ を $M(T)$ の特性ベクトルという.

n -run の 2^m 型要因計画 T を与えることは, 主効果の loading ベクトルを与えることと同値である. このことからすべての要因効果の loading ベクトル, loading 係数ひいては計画行列 $E(T)$, さらに特性ベクトル $\gamma(T)$ および情報行列 $M(T)$ が定まる.

正規方程式 $M(T)\Theta = E(T)'\mathbf{y}(T)$ の $\theta(\phi)$ に対応する項は,

$$n\theta(\phi) + \sum_{u=1}^m \sum_{U \in \Omega(u)} \gamma(U)\theta(U) = \|\mathbf{d}(\phi) * \mathbf{y}(T)\| \quad (1)$$

で与えられ, $\theta(K)$ ($|K| = k$) に対応する項は,

$$n\theta(K) + \sum_{u=0}^m \sum_{K \neq U \in \Omega(u)} \gamma(K \Delta U)\theta(U) = \|\mathbf{d}(K) * \mathbf{y}(T)\| \quad (2)$$

で与えられる. (1) および (2) の左辺は, 具体例で示すようにそれぞれ Box and Hunter (1961a,b) による定義対比および derived relation の一般化に相当する. 記号演算 $\theta(K) \odot \theta(U) = \theta(K \Delta U)$ を用いると, (1) から (2) が容易に導かれる. また逆も成り立つ.

定義 3. 線形方程式 (2) を $\theta(K)$ を推定するための主方程式とよぶ.

定義 4. 特性ベクトル $\gamma(T)$ をもつ n -run の 2^m 型要因計画 T において, 要因効果 $\theta(U)$ は,

- (a) $\gamma(K\Delta U) = 0$ ならば $\theta(K)$ と直交する,
- (b) $|\gamma(K\Delta U)| = n$ ならば $\theta(K)$ と完全に交絡する,
- (c) $0 < |\gamma(K\Delta U)| < n$ ならば $\theta(K)$ と部分的に交絡する,

という. $|\gamma(K\Delta U)|/n$ を $\theta(K)$ に対する $\theta(U)$ の 交絡率という.

1. 16-run の 2^5 および 2^6 型直交計画の類別

大きさ 16, 最大制約数 15 をもつ強さ 2 の直交配列 2-OA($t=2, m=15, \lambda=4$) の 5 種の代表配列 [I]~[V] (Appendix の表 A1 を参照) から導かれる 16-run の可能なすべての 2^5 および 2^6 型直交計画は, 容易に類別 (因子および水準の置換) できる. それらの代表計画を与える直交配列と列番号および特性ベクトルは, 次の表 1 および表 2 で与えられる. 以下表中の ‘.’ は ‘0’ を表す.

表 1. 2-OA(2, 15, 4) の 5 種の代表配列から導かれる 16-run の可能なすべての 2^5 型直交計画の同型類とそれらの代表計画の特性ベクトル

同型類	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
代 # [I]	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×
表 [II]	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×
配 [III]	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
列 [IV]	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○	○
[V]	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○	○

: 従来の直交配列,

○ : 可能, × : 不可能を表す.

特性ベクトル $\gamma(\Pi)$

代表計画	直交配列	列番号	Argument of $\theta\{\cdot\}$															1
			1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	1	1	1	1	2	
			2	2	2	3	3	4	3	3	4	4	3	3	4	4	4	
			ϕ	3	4	5	4	5	5	4	5	5	5	4	5	5	5	
[1]	[I]	1 2 3 4 5	16	16	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	16	.	.
[2]	[I]	1 2 3 4 8	16	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
[3]	[I]	1 2 4 7 8	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.
[4]	[I]	1 2 4 8 15	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16
[5]	[II]	1 2 4 8 12	16	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	8	8	-8
[6]	[II]	1 4 5 8 12	16	16	.	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	8	8	.
[7]	[II]	1 4 6 8 12	16	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	8	-8	.
[8]	[II]	4 5 6 8 12	16	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	8	8	-8
[9]	[II]	4 5 8 9 12	16	.	.	.	.	8	8	.	8	8	.	16	.	.	.	.
[10]	[II]	4 5 8 10 12	16	.	.	.	.	8	8	.	8	-8	.	.	.	.	.	.
[11]	[III]	2 4 8 10 12	16	.	.	.	8	.	8	8	8	.	.	.	8	8	.	.

(主効果および2因子交互作用に対する $\gamma(0)$ は0であるから省略)表 2. 2-OA(2, 15, 4) の 5 種の代表配列から導かれる 16-run の可能なすべての 2^6 型直交計画の同型類とそれらの代表計画の特性ベクトル

同型類	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]
代 # [I]	o	o	o	o	o	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
表 [II]	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
配 [III]	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
列 [IV]	o	o	x	x	o	o	o	o	o	x	o	o	x	o	o
[V]	x	o	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	o	o

[16]	[17]	[18]	[19]	[20]	[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
o	o	o	x	x	x	x	x	x	x	x	x
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	x
x	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x
o	o	x	o	o	x	x	o	o	x	x	o

特性ベクトル $\gamma(T)$

代表計画	直交配列	列番号	Argument of $\theta(\cdot)$																					
			ϕ																					
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4
			2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	5	4	4	5	5	5	5
			3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	6	4	5	6	5	6	6	5	6	6	6	6
[1]	[I]	1 2 3 4 5 6	16	16	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	16	.	.	.
[2]	[I]	1 2 3 4 5 8	16	16	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
[3]	[I]	1 2 3 4 8 12	16	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.
[4]	[I]	1 2 3 4 8 13	16	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
[5]	[I]	1 2 4 7 8 11	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
[6]	[II]	1 2 3 4 8 12	16	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8
[7]	[II]	1 2 4 5 8 12	16	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8
[8]	[II]	1 2 4 7 8 12	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8
[9]	[II]	1 4 5 6 8 12	16	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	8	8
[10]	[II]	1 4 5 8 9 12	16	16	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	8	8	.
[11]	[II]	1 4 5 8 10 12	16	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	8	8	.
[12]	[II]	1 4 6 8 10 12	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	8	8	.
[13]	[II]	2 4 6 8 11 12	16	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	8	8	.
[14]	[II]	4 5 6 7 8 12	16	.	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	8	8	.
[15]	[II]	4 5 6 8 9 12	16	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	8	8	.
[16]	[II]	4 5 8 9 12 13	16	.	.	.	.	8	8	8	8	.	.	8	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.
[17]	[II]	4 5 8 9 12 14	16	.	.	.	.	8	8	8	8	.	.	8	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.
[18]	[II]	4 5 8 10 12 15	16	.	.	.	.	8	8	8	8	.	.	8	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.
[19]	[III]	1 2 4 8 10 12	16	.	.	.	.	.	.	8	.	.	.	.	.	.	8	.	8	8	8	.	.	.
[20]	[III]	2 3 4 8 10 12	16	.	.	.	.	.	.	8	.	8	.	.	.	.	8	.	8	8	8	.	.	.
[21]	[III]	2 4 6 8 10 12	16	16	.	.	.	.	.	8	.	8	.	.	.	.	8	8	.	.	8	8	.	.
[22]	[III]	2 4 7 8 10 12	16	.	.	.	.	.	.	8	.	8	.	.	.	.	8	8	.	.	8	8	.	.
[23]	[III]	2 4 8 9 10 12	16	.	.	.	.	8	.	8	.	8	.	8	8	8	8	.	.	.	.	.	.	.
[24]	[III]	2 4 8 9 12 14	16	.	.	.	.	8	.	8	8	8	.	8	.	8	.	8	.	.	.	.	.	.
[25]	[III]	2 4 8 10 12 14	16	.	.	.	8	.	8	8	.	8	8	8	.	.	8	8	.	.	.	.	.	.
[26]	[III]	2 4 8 10 12 15	16	.	.	.	8	.	8	8	.	8	8	8	.	.	8	8	.	.	.	.	.	.
[27]	[V]	2 4 6 8 10 12	16	8	8	.	.	.	8	8	.	.	.	.	.	.	8	8	8	.	.	8	.	.

次頁へ続く

(主効果および2因子交互作用に対する $\gamma(0)$ は0であるから省略)

特性ベクトル $\gamma(T)$

代表計画	直交配列	列番号	Argument of $\theta(\cdot)$														1	
			1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3			
			2	2	2	3	3	4	3	3	4	4	4	4	4			
			ϕ	3	4	5	4	5	5	4	5	5	5	5	5			
[1]	[I]	1 2 3 4 5	20	4	4	4	4	4	-4	4	-4	4	4	12	4	4	4	-8
[2]	[I]	1 2 3 4 6	20	4	4	-4	4	4	4	4	4	4	4	12	4	4	-4	.
[3]	[I]	1 2 3 4 8	20	4	4	4	4	-4	12	4	4	-4	4	12	4	-4	-4	.
[4]	[I]	1 2 3 4 12	20	4	4	12	4	-4	-4	4	-4	4	12	12	4	-4	-4	.
[5]	[I]	1 2 3 5 6	20	4	4	-4	4	4	4	-4	4	4	4	4	4	4	-4	8
[6]	[I]	1 2 3 5 8	20	4	4	4	4	-4	4	-4	4	12	4	4	4	4	-4	.
[7]	[I]	1 2 3 5 10	20	4	4	-4	4	4	-4	-4	4	-4	-4	4	4	4	-4	.
[8]	[I]	1 2 3 5 16	20	4	4	-4	4	-12	-4	-4	4	-4	4	4	4	4	-4	8
[9]	[I]	1 2 3 7 16	20	4	4	-4	4	-12	4	4	4	12	-4	-4	4	-4	-4	.
[10]	[II]	1 2 3 4 5	20	4	4	12	4	-4	-4	4	-4	-4	12	12	4	4	4	-8

(主効果および2因子交互作用に対する $\gamma(K)$ は0であるから省略)3. 新しい 2^m 型直交計画の例

従来の 2^m 型直交計画では、主効果と交互作用は、直交するかまたは完全に交絡するかのいずれかに限られている。しかしそれらの要因効果が部分的に交絡する新しい直交計画が数多く存在する。ここでは、その部分的な交絡が消去可能な計画の例を一部紹介し、それらの特徴づけを行う。

例 1. 16-run の 2^5 型直交計画

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & 1 & . \\ 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & 1 \\ . & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & 1 & . & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 & . \\ . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

を考える。これは、表 1 における第 5 の計画 [5] に相当する新しい直交計画である。その計画行列 $E(T)$ および特性ベクトル $\gamma(T)$ は、容易に計算できて、次のようになる：

		Argument of $\theta(\cdot)$																					
		1	2	3	4	5	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	1	1	1	1	2	2	2
		2	3	4	5	3	4	5	4	5	4	5	5	3	4	5	2	2	2	3	3	4	4
		3	4	5	5	5	3	4	5	4	5	5	5	3	4	5	4	5	5	5	5	5	5
E(T):	ϕ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1
		1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1
		1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1
		1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1
		1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1
		1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1
		1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1
		1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1
		1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1

$r(T)$: (16| | | | 8| . . . 8 8| -8)

この表から, 定義式

$$16\theta(\phi) + 8(\theta\{3, 4, 5\} + \theta\{1, 3, 4, 5\} + \theta\{2, 3, 4, 5\} - \theta\{1, 2, 3, 4, 5\})$$

が得られる。これは Box and Hunter (1961a,b) による定義対比の拡張されたもので,

$$I + \frac{1}{2}(345 + 1345 + 2345 - 12345)$$

と書ける (係数 $\frac{1}{2}$ に注意)。このとき, 2 因子交互作用までに限定した情報行列 $M(2, T)$ および計画行列 $E(2, T)$ は容易に計算され, それぞれ次のようになる:

		Argument of $\theta(\cdot)$																					
		1	2	3	4	5	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	1	1	1	1	2	2	2
		2	3	4	5	3	4	5	3	4	5	4	5	4	5	5	2	2	2	3	3	4	4
		3	4	5	5	5	3	4	5	4	5	5	5	3	4	5	4	5	5	5	5	5	5
M(2, T):	ϕ	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	1	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	2	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	3	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	4	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	5	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	12	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	13	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	14	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	15	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	23	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	34	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	.	8	.
	35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	.	8	.
	45	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	.	.	.	.	.	8	.

$$E(2, T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

限定した正規方程式 $M(2, T)\Theta(2) = E(2, T)'y(T)$ の両辺の行に基本変形を施して,

$$M^*(2, T) = \begin{array}{c} \phi \\ \begin{array}{c} 16 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 34 \\ 35 \\ 45 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Argument of } \theta(\cdot) \\ \begin{array}{c} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \\ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 3 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 5 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E^*(2, T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

が得られ, 以下のことを得る ($M(2, T)$ が正則でない結果は必ずしも一意ではないことに注意).

- 1°. $\theta\{1\}, \theta\{2\}$ は 2 因子交互作用と交絡することなく推定される。
 2°. $\theta\{3\}, \theta\{4\}$ および $\theta\{5\}$ には, それぞれ $\theta\{4, 5\}, \theta\{3, 5\}$ および $\theta\{3, 4\}$ が交絡率 $\frac{1}{2}$ で交絡している. しかしその交絡を消去して推定値を求めることができる. それと交絡を無視した場合の推定値を比較することにより, 交互作用の主効果に及ぼす影響の度合いを評価することが可能である.

[注 1] 表 1 における第 8 の計画 [8] もこの種の新しい直交計画である.

[注 2] 表 1 における第 4 の従来の計画 [4] は, 分解能 V の直交計画である.

例 2. 20-run の 2^5 型直交計画

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . \\ . & 1 & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & . & 1 & . & 1 \\ . & 1 & 1 & . & 1 \\ . & 1 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 1 & . \\ 1 & 1 & . & 1 & . \\ . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & . \end{bmatrix}$$

を考える. これは, 表 3 における第 7 の計画 [7] に相当する新しい直交計画である. 同様にして, 定義式

$$\begin{aligned} & 20\theta(\phi) + 4(\theta\{1, 2, 3\} + \theta\{1, 2, 4\} - \theta\{1, 2, 5\} + \theta\{1, 3, 4\} + \theta\{1, 3, 5\} - \theta\{1, 4, 5\} \\ & - \theta\{2, 3, 4\} + \theta\{2, 3, 5\} - \theta\{2, 4, 5\} - \theta\{3, 4, 5\} + \theta\{1, 2, 3, 4\} + \theta\{1, 2, 3, 5\} \\ & + \theta\{1, 2, 4, 5\} - \theta\{1, 3, 4, 5\} + \theta\{2, 3, 4, 5\}) \end{aligned}$$

が得られ,

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{5}(123 + 124 - 125 + 134 + 135 - 145 - 234 + 235 - 245 - 345 \\ + 1234 + 1235 + 1245 - 1345 + 2345) \end{aligned}$$

と書ける (係数 $\frac{1}{5}$ に注意). このとき, $E(T)$, $\gamma(T)$ および $M(2, T)$, $E(2, T)$ はそれぞれ次のようになる:

		Argument of $\theta(\cdot)$																							
		ϕ																							

参考文献

- [1] Box, G.E.P and J.S. Hunter (1961a). *The 2^{k-p} fractional factorial designs. I.* Technometrics, 3, 311-351.
- [2] Box, G.E.P and J.S. Hunter (1961b). *The 2^{k-p} fractional factorial designs. II.* Technometrics, 3, 449-458.
- [3] Yamamoto, S., Y. Fujii, Y. Hyodo and H. Yumiba (1992a). *Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength 2, size 16, 15 (maximal) constraints and index 4*, SUT J. Math. 28, 47-59.
- [4] Yamamoto, S., Y. Fujii, Y. Hyodo and H. Yumiba (1992b). *Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength 2, size 20 and 19 (maximal) constraints*, SUT J. Math. 28, 191-209.

