

Generalized growth conditions and convexoid operators

弘前大. 理 古 田 孝 之

1. ここでは、複素ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素 T を取り扱うことにする。通常の growth condition の概念を少し変えて、次のような定義とする。

定義 1. T が growth condition (G_1) for (M, N) をみたすとは次の条件を満足することとする；

$$(*) \quad \|(T - \mu)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\mu, M)} \quad \text{for all } \mu \notin N$$

こゝに M, N は $N \supseteq M \supseteq \sigma(T)$ なる closed sets であり、 $\sigma(T)$ は T のスペクトラムを示す。このとき T を $T \in (G_1) \text{ for } (M, N)$ と略記することにする。又 $(*)$ の等号をみたす作用素を $E-(G_1) \text{ for } (M, N)$ と表わし、このときの T を、 $T \in E-(G_1) \text{ for } (M, N)$ と略記する。更に条件 $(*)$ の左辺の作用素ノルムを numerical radius norm $w((T - \mu)^{-1})$ にかきかえたとき不等式の成り立つ作用素を $(w-G_1) \text{ for } (M, N)$ で表わし、このときの T を、

$T \in (W-G_1) \text{ for } (M, N)$ と略記し、かつ等号をみたす作用素を $E-(W-G_1) \text{ for } (M, N)$ と表わし、このとき T を $T \in E-(W-G_1) \text{ for } (M, N)$ と略記する。

上の定義で $M=N$ のときは、T. Daito の意味の $(G_1) \text{ for } M$ のことである。さて numerical range の closure $\overline{W}(T)$ と、spectrum の convex hull $\text{co } \sigma(T)$ とが一致する作用素 T を convexoid 作用素と呼ばれているが、この作用素 T の特性化を, Orland とは一寸異なる形で与え、この応用の一つとして、G. R. Luecke と M. Fujii が構成したある二つの convexoid 作用素を含む更に広い convexoid 作用素を generalized growth conditions の立場から考察してみることになった。

2. 後の議論のために、次の明らかに各結果を整理してみることになる。

Proposition 1. Any one of the following conditions is necessary and sufficient in order that T is convexoid :

- (i) $T - \mu$ is spectraloid for all complex μ ,
- (ii) $T - \mu$ is spectraloid for all complex μ whose absolute values are sufficiently large,
- (iii) $T \in (G_1) \text{ for } \text{co } \sigma(T)$,

- (iv) $T \in (G_1)$ for $(\text{co } \sigma(T), N)$,
 (v) $T \in (W-G_1)$ for $\text{co } \sigma(T)$,
 (vi) $T \in (W-G_1)$ for $(\text{co } \sigma(T), N)$.

ヒルベルト空間上の作用素 T は、一般に次の不等式を満たすことは良く知られている;

$$\frac{1}{d(\mu, \sigma(T))} \leq \|(T-\mu)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\mu, W(T))}$$

ただし左辺の不等式は for all $\mu \notin \sigma(T)$ についてであり、同様に右辺の不等式は for all $\mu \notin W(T)$ についてである。Luecke は右辺の等号成立の作用素について考察した。

定義 2. $T \in \mathcal{R}$ とは、次の等式が成立することである;

$$\|(T-\mu)^{-1}\| = \frac{1}{d(\mu, W(T))} \quad \text{for all } \mu \notin \overline{W(T)}.$$

Theorem A (Luecke). $T \in \mathcal{R}$ if and only if $\partial W(T) \subset \sigma(T)$ where ∂M is the boundary of M .

Luecke は上の theorem A を示し $T \in \mathcal{R}$ は convexoid 作用素であることを示したが、この class $\mathcal{R}$ は、 H が有限次元のときでさえ、identity の scalar 倍で構成されるため、一般の normal

operator を含むもの。そこで、Fujii は次のように定義をい、 $\mathcal{R}$ と (G_1) を含む class (H_1) を構成した。

定義了。 $T \in (H_1)$ とは $T \in (G_1)$ for $\tilde{\sigma}(T)$ が成立する ことである、 $\Rightarrow$ $\tilde{\sigma}(T)$ とは non-spectrum と呼ばれ、 $\sigma(T)$ の complement $\sigma(T)^c$ の unbounded component の complement を示す。

更に Fujii は次の結果を示した。

Theorem B (Fujii). $T \in \mathcal{R}$ if and only if $\bar{W}(T) = \tilde{\sigma}(T)$.

上の Theorem A, Theorem B とともに $T \in \mathcal{R}$ なる T が convexoid 作用素であることは幾何学的に示している興味ある結果であるが、
こゝでは、定義 1 と Proposition 1 とより別な考察をしてみよう。

Theorem 1. Any one of the following conditions is necessary and sufficient in order that T belongs to $\mathcal{R}$;

- | | |
|---|--|
| (i) $T \in E-(G_1)$ for $\bar{W}(T)$, | (iv) $T \in E-(W-G_1)$ for $\bar{W}(T)$, |
| (ii) $T \in E-(G_1)$ for $(\omega \sigma(T), \bar{W}(T))$, | (v) $T \in E-(W-G_1)$ for $(\omega \sigma(T), \bar{W}(T))$, |
| (iii) $T \in E-(G_1)$ for $\omega \sigma(T)$, | (vi) $T \in E-(W-G_1)$ for $\omega \sigma(T)$. |

$T \in \mathcal{R}$ の特性化として, numerical range と $\sigma(T)$ の相互関連を geometrical にとらえて表現したものが, Theorem A, Theorem B でありともに $\mathcal{R}$ が convexoid 作用素の subclass をなすことを示している。一方 Theorem 1 は次のように考えられる, つまり「convexoid 作用素がみたす growth condition (G_1) かつ $\cos(T)$ (或は (G_1) かつ $(\cos(T), \bar{W}(T))$) という不等式における "等式" が, 成立する作用素 T , それらが $\mathcal{R}$ を構成している」と。この意味で Theorem A, Theorem B が "geometrical characterizations" と考えられるのに対して, Theorem 1 は "characterization in formula" とみられることになる。これで確かに Theorem 1 も $\mathcal{R}$ が convexoid 作用素の subclass であることを "式" の上で的確に示していることが判った。

3. 次に新しい convexoid 作用素の一つの class を定義しよう。
(H₁) は $\mathcal{R}$ と (G_1) の双方を含む convexoid 作用素であるが, この (H₁) を含む convexoid 作用素 $\mathcal{S}$ を定義しよう。

定義 4. $T \in \mathcal{S}$ とは, $T \in (G_1)$ かつ $(\sigma(T), \bar{W}(T))$ をみたすことにある。つまり $(T - \mu)^{-1}$ が normaloid for all $\mu \notin \bar{W}(T)$ のことである。

Theorem 2. $(H_1) \subset \mathcal{S} \subset C$ and these inclusion relations are proper, where C is the set of all convexoid operators.

実際上の定理をみたす $\mathcal{S}$ は次のように構成される。

Theorem 3. If A is an operator and B satisfies (G_1) for $(\sigma(B), \bar{W}(B))$ such that $d(\mu, \sigma(B)) \leq d(\mu, W(A))$ for all $\mu \in \bar{W}(B)$, then $T = A \oplus B$ also satisfies (G_1) for $(\sigma(T), \bar{W}(T))$.

又 Theorem 2 の inclusion relations が proper である例は実際作れることがわかる。更に $\mathcal{S}$ が convexoid 作用素の subclass であることは、Proposition 1 より明らかである。

定義 5. 作用素 T が numeroid であるとは、 $\bar{W}(T)$ が T の一つの spectral set になることである。

Proposition 2. There exists a numeroid which does not belong to $\mathcal{S}$ and vice versa.

上の Proposition 2 により "there exists a normaloid which does not belong to $\mathcal{S}$ and vice versa." という系も成立することになる。

なりませう。

4. 定義1をみたす作用素の一般的な construction method を与える結果を示すことにします。

Theorem 4. If A is an operator, X and Y both closed sets in the complex plane and B satisfies (G_1) for $(\sigma(B), Y)$ such that for all $\mu \notin Y \supset X$,

$$d(\mu, X) \leq \min \{ d(\mu, W(A)), d(\mu, \sigma(B)) \},$$

then $T = A \oplus B$ satisfies (G_1) for (X, Y) in the generalized growth condition.

上の定理で $d(\mu, X) \leq d(\mu, W(A))$ が essential であり、これを $d(\mu, X) \leq d(\mu, \sigma(A))$ for all $\mu \notin Y \supset X$ で置きかえることは、できないことは、次の結果が示している。

Proposition 3. If X and Y are both closed sets in the complex plane and A does not satisfy (G_1) for (X, Y) such that for all $\mu \notin Y \supset X$, $d(\mu, X) \leq d(\mu, \sigma(A))$ and there exists a $\lambda \notin Y$ such that $d(\lambda, X) > d(\lambda, W(A))$, then $T = A \oplus B$ does not satisfy (G_1) for (X, Y) whenever B satisfies (G_1) for $(\sigma(B), Y)$ such that the following property holds;

$$d(\mu, X) \leq d(\mu, \sigma(B)) \quad \text{for all } \mu \notin Y \supset X.$$

5. 五三節では R と (G) と共に含む (H) を subclass として含む更に広い convexoid 作用素 を構成したが、こゝでは R や (G) にも含まれる更に狭い convexoid 作用素の class P を構成しよう。

定義 6. $T \in P$ とは $\overline{W}(T) = \sigma(T)$ を T がみたすことである。

上の class P に属する代表的な例は unilateral shift 作用素である。

Theorem 5. If A is an operator and B belongs to P (resp. R) such that $\sigma(B) \supset \overline{W}(A)$ (resp. $\tilde{\sigma}(B) \supset \overline{W}(A)$), then $T = A \oplus B$ also belongs to P (resp. R).

Remark 1. Luecke は "if A is an operator on H , then $A \oplus N \in R$ on $H \oplus K$ whenever N is a normal operator on K with $\sigma(N) \supseteq \overline{W}(A)$ " を示してゐるが $A=1$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ととり、 $T = A \oplus N$ と定義すれば、 N は normal で $\sigma(N) = \{1, 2\} \supseteq \overline{W}(A) = \{1\}$ であるが、この normal 作用素 T は R には属しないことは $\overline{W}(T) \not\subset \sigma(T)$, つまり $\overline{W}(T) \neq \tilde{\sigma}(T)$ であるから、Theorem A, 又は Theorem B より明らかである。つまり Luecke の結果は insufficient である。定理 5 のようにおぼえておくと考えられる。上の定理でも解きやすい P と R とは、 $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$ にあてかえれば、parallel な結果が得られる。

Theorem 6. $P \subset (G_1) \cap R$ and this inclusion relation is proper.

Remark 2. Luecke は "if A is an operator and B normal operator such that $\sigma(B) = \overline{W(A)}$, then $T = A \oplus B$ belongs to (G_1) " として (G_1) に属する T の構成法を示しているが、実は、Theorem 5 に よる (G_1) より狭い class である P に属する T が解る。更に彼が具体的に構成した (G_1) にも見にも属する作用素の例は実は P に属する T が解る。そこで彼の結果と上の事柄を合わせれば、次の結果を得る。

Proposition 4. There exists an invertible operator belonged to P such that

(i) $T^2 \notin (G_1)$ and $T^2 \notin R$, (ii) $r(T) < \|T\|$ (non-normaloid) (iii) $T^{-1} \notin (G_1)$ and $T^{-1} \notin R$.

次に $T \in Q$ とは $\tilde{\sigma}(T) = \cos \sigma(T)$ なる T のこととし、又 $T \in U$ とは $\sigma(T) = \cos \sigma(T)$ なる T 、 $T \in V$ とは $\tilde{\sigma}(T) = \sigma(T)$ なる T のことと定義する。

Theorem 7. $P = V \cap R = C \cap U = V \cap Q \cap C$, where C is the set of all convexoid operators.

次の結果は convexoid 作用素の各 class である $C, \mathcal{S}, (H_1), (G_1), R$

及 v P と q の関係を示している。

Theorem 8. If T has a convex spectrum, i.e., $\sigma(T) = \text{co } \sigma(T)$, then the following statements are mutually equivalent:

- (i) T is convexoid, (iii) $T \in \mathcal{S}$,
- (ii) $T \in (H_1)$, (iv) $T \in \mathcal{R}$,
- (v) $T \in (G_1)$, (vi) $T \in \mathcal{P}$
- (vii) $(T-\mu)^{-1}$ is spectraloid for all $\mu \notin \bar{W}(T)$,
- (viii) $(T-\mu)^{\dagger}$ is spectraloid for all $\mu \notin \tilde{\sigma}(T)$.

Proposition 5. $T \in \mathcal{P}$ is a spectroid if and only if there is a strong normal dilation N of T with $\bar{W}(N) = \sigma(T)$.

Remark 3. 上の proposition $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R} \stackrel{4.2}{=} \text{spectroid} \rightarrow \text{hcn-spectroid}$ とすれば $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$ という結論になる。これは Fujii によっても示される。このように $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}$ なる対応は $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$ なる対応に適合し、Theorem 5 でも示されたように parallel な結果とみなすことが出来る。更に " $T \in \mathcal{Q}$ is a numeroid, then T is a hcn-spectroid" に対して " $T \in \mathcal{U}$ is a numeroid, then T is a spectroid" という結果も、これらの路線の延長上にあるとみなせる。

6. 本一節の定義 1 の (b) の operator norm を numerical radius norm を含む更に一般的なる "operator radii" である $w_g^0(T)$ で置きかえて議論を進めてみることも成りの部分にはたり得るが、紙面の予定もあり割愛する。(こゝに $w_g^0(T)$ は g -dilation に関係して定義される)

References

- [1] Fujii, On some examples of non-normal operators. I, II and III.
Proc. Japan Acad., 47(1971) 458-463, 48(1972) 118-123, and
48(1972) 124-129.
- [2] Furuta, Generalized growth conditions and convexoid operators (to appear).
- [3] G. R. Luecke, A class of operators on Hilbert space.
Pacific J. Math., 41 (1971) 153-156.