

Hopf bifurcation について

東大 理 矢野 公一

Ruelle-Takens "On the Nature of Turbulence" の
紹介。

§1 Introduction

(1.1) 問題

次のような diffeomorphism の 1 parameter family を考える。

$\varphi^\mu: B \rightarrow B$ diffeomorphism of Banach space ($\mu \in \mathbb{R}$)

条件 (i) $\varphi^\mu(0) = 0$.

(ii) $d\varphi^\mu(0): B \rightarrow B$ linear map の spectrum は $\mathbb{C}$ の closed set $\sigma_1(\mu), \sigma_2(\mu)$ にわかれて,

$\sigma_1(\mu) \subset \text{interior of } D^2$ $\mathbb{C} \supset D^2$ unit disk

$$\begin{cases} \sigma_2(\mu) \subset \text{interior of } D^2 & \text{if } \mu < 0 \\ \sigma_2(\mu) \subset \partial D^2 & \text{if } \mu = 0 \\ \sigma_2(\mu) \subset \mathbb{C} \setminus D^2 & \text{if } \mu > 0 \end{cases}$$

この family は $\mu=0$ で bifurcation を与えるが、このような bifurcation について何が言えるか?

特に $\sigma_2(\mu) = \{\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}\}$ 複素共役な2つの固有値のときは、同様な問題が X^μ : vector field on B with 0 isolated singular point に対しても考えられる。

(1.2) Center manifold theorem

$\psi: B \rightarrow B$ $\mathbb{C}^k$ (local) diffeomorphism of Banach space, $k \geq 1$.

(i) $\psi(0) = 0$

(ii) $d\psi(0)$ の spectrum は 2 つの closed set σ_1, σ_2 にわかれて、 $\sigma_1 \subset \text{interior of } D^2$, $\sigma_2 \subset \partial D^2$.

かつ、 $B' \in \sigma_2$ に属する generalized eigen space とするとき $\dim B'$ は有限。

このとき、 B での 0 の近傍 V と V の closed submanifold M が存在して次を満たす。

(a) $0 \in M$, $T_0 M \simeq B'$

(b) (invariance) $x \in M$, $\psi(x) \in V$ ならば $\psi(x) \in M$

(c) (local attractivity) $x \in V$, $\psi^n(x) \in V$ for $n=1, 2, \dots$ であるならば $\psi^n(x)$ は M に近づく。

(1.3) Reduction to 2-dimensional case

定理 (1.2) を用いて問題 (1.1) を次のように低次元へおしこめることができる。

写像 $\varphi: B \times \mathbb{R} \rightarrow B \times \mathbb{R}$ を $\varphi(x, \mu) = (\varphi^\mu(x), \mu)$ で定義するとき $\varphi(0) = 0$ で, $d\varphi(0)$ の spectrum は $\sigma_1(0) \cup \sigma_2(0) \cup \{1\}$. ("1" は μ 方向) もし $\sigma_2(0)$ に関する generalized eigen space の次元が有限ならば (1.2) を用いて原点の近傍での submanifold M が存在し, local に φ -invariant. さらに local attractivity より $M \supset 0 \times \mathbb{R}$, また $B \times \mu$ は M と transverse となるから $\tilde{\varphi}^\mu: M \cap B \times \mu \rightarrow M \cap B \times \mu$ 1 parameter family of local diffeomorphisms が得られ, $d\tilde{\varphi}^\mu(0)$ の spectrum が $\sigma(\mu)$ で与えられることもわかる。

特に $\sigma(\mu) = \{\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}\}$ 各々が重複度 1 の固有値である場合は $B = \mathbb{R}^2$ として考えればよい。

flow の場合も同様に二次元の問題に帰着することができる。

§2 Hopf bifurcation theorem for flows

(2.1) Hopf theorem

$X^\mu: \mathbb{C}^k$ vector field on $\mathbb{R}^2$ (μ に関して $\mathbb{C}^k$) に対し

(i) $X^\mu(0) = 0$

(ii) $dX^\mu(0)$ は複素共役な固有値 $\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}$ をもち ($\lambda(\mu) \neq \overline{\lambda(\mu)}$)

$\mu \leq 0$ に対して $\operatorname{Re} \lambda(\mu) \leq 0$

さらに $\frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda(\mu)|_{\mu=0} > 0$ を仮定する。

このとき, $X = (X^\mu, 0)$ vector field on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ に関して次が成立する。

- (a) 0 の近傍で $\mathbb{C}^2$ 函数 $\tilde{\mu}$ が存在して, $\tilde{\mu}(0) = 0$ から $(\alpha, 0, \tilde{\mu}(\alpha))$ は X の closed orbit の上にある。さらに $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ の原点の適当な近傍に含まれる closed orbit はこの 1 parameter family でつくられる。
- (b) もし, $(0, 0)$ が X^0 に関して "vague attractor" (定義後述) であれば, $\alpha \neq 0$ に対して $\tilde{\mu}(\alpha) > 0$, また (a) で与えられる closed orbit は attracting。

以下, (Z.2) ~ (Z.5) でこの定理の証明を与える。

(Z.2) $dX^\mu(0)$ の標準化

$dX^\mu(0)$ の固有値が $\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}$ であるから, $\mathbb{R}^2$ の座標を変換して, (変換は μ -dependent で μ に関して $\mathbb{C}^{2-1}$)

$$dX^\mu(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda(\mu), & -\operatorname{Im} \lambda(\mu) \\ \operatorname{Im} \lambda(\mu), & \operatorname{Re} \lambda(\mu) \end{pmatrix} \text{----- (Z.2.1)}$$

とできる。特に $\lambda(\mu)$ は $\operatorname{Im} \lambda(\mu) > 0$ にしておく。

ここで (Z.2.1) は $SO(2)$ conjugate で不変であるから, 座標軸の片方は変換で不変としてよい。以後この座標を用いる。

(2.3) Microscope lemma

$X: \mathbb{C}^k$ vector field on $\mathbb{R}^2$, $X(0)=0$

$P: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ $S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

このとき $\mathbb{R} \times S^1$ 上の $\mathbb{C}^{k-1}$ vector field $\tilde{X}$ で X と P -related となるものが存在する。

proof $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ とおくと (x_1, x_2) は $\mathbb{R}^2$ の座標

$$\tilde{X} = \tilde{X}_r \frac{\partial}{\partial r} + \tilde{X}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\begin{cases} \tilde{X}_r = X_1 \cos \theta + X_2 \sin \theta \\ \tilde{X}_\theta = -\frac{X_1}{r} \sin \theta + \frac{X_2}{r} \cos \theta \end{cases} \text{----- (2.3.1)}$$

で定義すれば, 条件 $X(0)=0$ より $r=0$ のときも well-defined で $\mathbb{C}^{k-1}$ class, かつ X と $\tilde{X}$ は P -related となる。/

(2.2) と (2.3) より, $\tilde{X}^\mu$: 1 parameter family of vector fields on $\mathbb{R} \times S^1$ が得られたが, (2.2) で μ 方向の, (2.3) で $\mathbb{R}^2$ 方向の微分可能性が各々 1 つずつ落ちただけだから, これは $\mathbb{C}^{k-1}$ class。

(2.4) Poincaré map

(2.2.1), (2.3.1) によって

$$\begin{cases} \tilde{X}_r^\mu(r, \theta) = (\operatorname{Re} \lambda) r + O(r^2) \\ \tilde{X}_\theta^\mu(r, \theta) = \operatorname{Im} \lambda + O(r) \end{cases} \text{----- (2.4.1)}$$

r が充分小さければ, $\tilde{X}_\theta^\mu > 0$ であるから, $\mathbb{R} \times S^1$ に於て $\tilde{X}^\mu$ は $\mathbb{R}$ 方向に transversal。よって $\mathbb{R} \times 0$ に属する Poincaré map が考

えられる。これを、定義域は適当に考えて、 $\pi^\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ もしくは $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\pi(x, \mu) = \pi^\mu(x)$ とおこう。

π に関して次の性質がわかる。

$$\begin{cases} \text{(i)} \pi(0, \mu) = 0 \\ \text{(ii)} \frac{\partial \pi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \exp(\pi \operatorname{Re} \lambda / \operatorname{Im} \lambda) \end{cases} \text{----- (Z.4.2)}$$

proof of (ii) $\pi(x, \mu) = x + \int_0^{\tau(x, \mu)} \tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) dt$

ここで $\tilde{\varphi}_t^\mu$ は $\tilde{X}^\mu$ で生成される 1 parameter transformation group.

$\tau(x, \mu)$ は $(x, 0)$ の $\tilde{\varphi}_t^\mu$ での $\mathbb{R} \times 0$ への 1st return time.

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 1 + \tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_{\tau(x, \mu)}^\mu(x, 0)) \frac{\partial \tau(x, \mu)}{\partial x} + \int_0^{\tau(x, \mu)} \frac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial x}(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) dt \text{----- (Z.4.3)}$$

$$(Z.4.1) \text{ より } \begin{cases} \tilde{\varphi}_t^\mu(0, 0) = (0, (\operatorname{Im} \lambda)t) \\ \tilde{X}_r^\mu(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial r}(0, 0) = \operatorname{Re} \lambda, \quad \frac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial \theta}(0, 0) = 0 \end{cases} \text{----- (Z.4.4)}$$

$x=0$ のとき, (Z.4.4) より (Z.4.3) の右辺は 0。右辺を計算するために

$$\frac{\partial}{\partial t} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) = \tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0))$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) &= \frac{\partial}{\partial x} \tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) \\ &= \frac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) + \frac{\partial \tilde{X}_r^\mu}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \theta(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) \end{aligned} \text{----- (Z.4.5)}$$

$$(Z.4.4) \text{ より } \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) \Big|_{x=0} = (\operatorname{Re} \lambda) \frac{\partial}{\partial x} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) \Big|_{x=0}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x} r(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) \Big|_{x=0} = \exp((\operatorname{Re} \lambda)t)$$

$$(Z.4.5) \text{ より } \frac{\partial}{\partial x} \tilde{X}_r^\mu(\tilde{\varphi}_t^\mu(x, 0)) \Big|_{x=0} = (\operatorname{Re} \lambda) \exp((\operatorname{Re} \lambda)t)$$

これより (Z.4.3) の右辺は, $\tau(0, \mu) = \pi / \operatorname{Im} \lambda$ であるから

$$x=0 \text{ のとき } \int_0^{2\pi/\operatorname{Im}\lambda} (\operatorname{Re}\lambda) \exp((\operatorname{Re}\lambda)t) dt = \exp(2\pi \operatorname{Re}\lambda / \operatorname{Im}\lambda) - 1$$

$$\therefore \frac{\partial \Pi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 1 + \exp(2\pi \operatorname{Re}\lambda / \operatorname{Im}\lambda) - 1 + 0 \quad /$$

$\Pi(x, \mu) = x + V(x, \mu)$ とおく。closed orbit は $V(x, \mu)$ の零点と対応しているから、 $V(x, \mu) = 0$ を解けばよいが、 $x=0$ は critical point なので除いて考えたい。そのため、さらに

$$\tilde{V}(x, \mu) = \frac{V(x, \mu)}{x} \text{ とおく。この関数は } C^{\mathbb{R}-2} \text{ class で、}$$

$$\tilde{V}(0, \mu) = \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \Big|_{x=0} - 1 = \exp(2\pi \operatorname{Re}\lambda(\mu) / \operatorname{Im}\lambda(\mu)) - 1$$

$$\text{これより } \begin{cases} \tilde{V}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu}(0, 0) = \frac{2\pi}{\operatorname{Im}\lambda(0)} \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re}\lambda(\mu) \Big|_{\mu=0} > 0 \end{cases}$$

よって陰関数定理を用いることにより、 $\tilde{\mu}: C^{\mathbb{R}-2}$ 関数が 0 の近傍で存在して、 $\tilde{\mu}(0) = 0$, $\tilde{V}(x, \tilde{\mu}(x)) = 0$ を満足する。さらに原点の適当な近傍に含まれる closed orbit は Poincaré map Π の固定点として得られるものでつくされることが明らか。

以上の結果を直交座標に戻して、定理の (a) が証明された。

(Z.5) Vague attractor

(Z.4) で得られた Π, μ に関して次が成立する。

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \tilde{\mu}'(0) = 0 \\ \text{(ii)} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, 0) = 1 \\ \text{(iii)} \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{----- (Z.5.1)}$$

proof (i) π の構成より $\tilde{\mu}(x) = \text{constant}$ であるような x は
正と負に pair で現われるから Rolle の定理より。

(ii) $(Z, 4, Z)$ より。

(iii) $\pi(x, \tilde{\mu}(x)) = x$ $\exists x$ に関して二回微分して

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial \mu} \tilde{\mu}' + \frac{\partial^2 \pi}{\partial \mu^2} (\tilde{\mu}')^2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial \mu} \tilde{\mu}'' = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} (x \tilde{V} + x) = x \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu} \text{ であるから, 上の式に } x=0$$

$\exists$ 代入して (iii) $\exists$ 得る。／

Definition $\left. \frac{d^3 \pi^0}{dx^3} \right|_{x=0} = \frac{\partial^3 \pi}{\partial x^3}(0,0) < 0$ であるとき,

$(0,0)$ は X^0 の vague attractor であると呼ぶ。

この仮定の下で定理の (b) を証明しよう。

まず $x \neq 0$ のとき $\tilde{\mu}(x) > 0$ $\exists$ 言うためには, $\tilde{\mu}(0) = \tilde{\mu}'(0) = 0$
であるから $\tilde{\mu}''(0) > 0$ $\exists$ 示せば充分である。

$\pi(x, \tilde{\mu}(x)) = x$ $\exists x$ で三回微分して $x=0$ $\exists$ 代入すれば

$$\frac{\partial^3 \pi}{\partial x^3}(0,0) + 3 \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial \mu}(0,0) \tilde{\mu}''(0) = 0 \text{ ----- (2.5.2)}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial \mu}(0,0) = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu}(0,0) > 0 \text{ であったから証明された。}$$

次に closed orbit が attracting $\exists$ 言うには, Poincaré map
の微分の絶対値が 1 以下であること $\exists$ 示せばよい。

$$f(x) = \frac{\partial \pi}{\partial x}(x, \tilde{\mu}(x)) \text{ とおく。}$$

(2.5.1) より $f(x) > 0$ for x near 0。

$$\text{また, } f'(0) = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial \mu}(0,0) \tilde{\mu}'(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= \frac{\partial^3 \pi}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 \pi}{\partial x^2 \partial \mu} \tilde{\mu}' + \frac{\partial^3 \pi}{\partial x \partial \mu^2} (\tilde{\mu}')^2 + \frac{\partial^3 \pi}{\partial x \partial \mu} \tilde{\mu}'' \Big|_{x=\mu=0} \\ &= \frac{\partial^3 \pi}{\partial x^3}(0,0) - \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \pi}{\partial x^3}(0,0) < 0 \quad ((2.5.2) \text{ を用いた}) \end{aligned}$$

よって $x \neq 0$, $\text{near } 0$ ならば $f(x) < f(0) = 1$ /

以上で定理 (2.1) はすべて証明された。

(2.6) Criterion for vague attractor

定理 (2.1) に於ては $\frac{d^3 \pi}{dx^3}(0)$ の値が重要な役割を果たすので、この値を直交座標表示のまま知ることはできれば便利である。これに関して Marsden-MacCracken による次の結果がある。

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ の座標

$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ vector field on $\mathbb{R}^2$, $X(0) = 0$.

座標 x_1, x_2 に関して $dX(0) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ ここで λ は実数。

このとき

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \pi}{dx^3}(0) &= \frac{3\pi}{4|\lambda|} \left\{ \frac{\partial^3 X_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 X_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_2^3} \right\} \\ &\quad + \frac{3\pi}{4|\lambda|^2} \left\{ -\frac{\partial^3 X_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^3 X_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^3 X_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^3 X_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 X_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^3 X_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^3 X_2}{\partial x_2^2} \right\} \end{aligned}$$

ただし、右辺は $x_1 = x_2 = 0$ での値である。

§3 Hopf bifurcation theorem for diffeomorphisms

(3.1) 1 parameter family of diffeomorphisms

Σ に対して次のような family を考える。

$\varphi^\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^k family of diffeomorphisms

条件 (i) $\varphi^\mu(0) = 0$

(ii) $d\varphi^\mu(0)$ の固有値は複素共役な $\lambda(\mu)$ と $\overline{\lambda(\mu)}$ で

$$(\lambda(\mu) \neq \overline{\lambda(\mu)}, \text{ i.e. } \operatorname{Im} \lambda(\mu) \neq 0)$$

$$|\lambda(\mu)| = 1 + \mu$$

Σ と同様, 極座標を用いるのが便利であるが, それに関して次のような lemma がある。

(3.2) Normal form lemma

φ^μ は (i), (ii) を満足し, $\forall k \geq 5, \lambda(0)^m \neq 1$ for $m=1, \dots, 5$ とするとき, μ に対しては C^{k-1} である smooth な座標変換が存在して, φ^μ は新座標では次で表わされる。

$$\varphi^\mu(x, y) = N\varphi^\mu(x, y) + O(r^5) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ここで $N\varphi^\mu$ は新座標に対する極座標により次で与えられる。

$$N\varphi^\mu(r, \theta) = ((1+\mu)r - f_1(\mu)r^3, \theta + f_2(\mu) + f_3(\mu)r^2)$$

(3.3) Hopf theorem for diffeomorphisms

$\Phi^\mu: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$ 1 parameter family of C^5 diffeomorphisms

(parameter μ に関しては C^5 連続)

$$\Phi^\mu(r, \theta) = N\Phi^\mu(r, \theta) + (O(r^5), O(r^4)) \text{----- (3.3.1)}$$

($N\Phi^\mu$ は (3.2) に与えたもの)

さらに $f_1(0) > 0$ を仮定する。

このとき $\varepsilon > 0$ が存在し, $0 < \mu < \varepsilon$ に対する curve の連続な 1 parameter family C_μ がとれ, C_μ は Φ^μ -invariant でかつ attracting。

($f_1(0) > 0$ は flow の場合の "vague attractor" の条件に対応)

以下 (3.4) ~ (3.6) でこの定理の証明を与える。

(3.4) Change of coordinates

まず, $N\Phi^\mu$ で不変な curve は, $(1+\mu)r - f_1(\mu)r^3 = r$ を解いて $r^2 = \frac{\mu}{f_1(\mu)}$ と求める。($f_1(\mu) > 0$ for μ near 0)

Φ^μ は $N\Phi^\mu$ の perturbation であるから, この curve の近くに invariant curve が存在すると期待される。これをみつけないように座標を変換しよう。

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{f_1(\mu)}} (\sqrt{\mu}z + 1) \quad \text{for } \mu > 0 \quad \text{とおく。}$$

以後 $z=0$ 座標を用いて話を進める。

$\Phi^\mu(z, \theta)$ の z, θ 座標をそれぞれ Φ^μ , Φ^μ とすれば。

$$\begin{aligned} \Phi^\mu(z, \theta) = & (1-\mu)z - \mu^{\frac{3}{2}}(3z^2 + \mu^{\frac{1}{2}}z^3) \\ & + \mu^{\frac{3}{2}} \frac{1}{f_1(\mu)^2} g^\mu\left(\sqrt{\frac{\mu}{f_1(\mu)}}(\sqrt{\mu}z+1), \theta\right)(\sqrt{\mu}z+1)^5 \end{aligned}$$

$$\Phi_1^\mu(z, 0) = (1-2\mu)z + \mu^{\frac{3}{2}} H^\mu(z, 0) \text{ ----- (3.4.1)}$$

$$\left(\begin{array}{l} q_1^\mu \text{ は (3.3.1) の剰余項。} \\ H^\mu(z, 0) \text{ はこの式で定義する。} \\ \text{次の } q_2^\mu, K^\mu \text{ も同様である。} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^\mu(z, 0) &= 0 + f_2(\mu) + \mu \frac{f_1(\mu)}{f_1(\mu)} (\sqrt{\mu}z + 1)^2 \\ &\quad + \frac{\mu^2}{f_1(\mu)^2} q_2^\mu \left(\sqrt{\frac{\mu}{f_1(\mu)}} (\sqrt{\mu}z + 1), 0 \right) (\sqrt{\mu}z + 1)^4 \\ &= 0 + f(\mu) + \mu^{\frac{3}{2}} K^\mu(z, 0) \text{ ----- (3.4.2)} \end{aligned}$$

このとき, H^μ, K^μ は C^5 class であって μ に関しては C^5 連続。

$$C(\mu) = \sup_{\substack{0 \leq \mu \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 1}} \max \{ |H^\mu|, |K^\mu|, \left| \frac{\partial H^\mu}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial K^\mu}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial H^\mu}{\partial \mu} \right|, \left| \frac{\partial K^\mu}{\partial \mu} \right| \}$$

とおくと $\mu \rightarrow 0$ のとき $C(\mu)$ は有界。よって μ が充分小さいとき, $C(\mu) \leq C$: constant とおく。 ----- (3.4.3)

(3.5) Graph transformation

$N\Phi^\mu$ の不変な curve は新座標で $z=0$ であることに注意して, graph-transformation の方法により, この近くで Φ^μ 不変な curve を探す。

$$G = \left\{ u: S^1 \rightarrow \mathbb{R}; \begin{array}{l} |u(\theta)| \leq 1. \\ u \text{ は Lipschitz 定数 } 1 \text{ 以下の Lipschitz 関数} \end{array} \right\}$$

とおくとき, G は supremum norm によって完備距離空間。

$\mathcal{T}^\mu: G \rightarrow G$ を Φ^μ による graph-transformation で定義する。
即ち, $\mathcal{T}^\mu$ は $u \in G$ に対して " $\Phi^\mu \{z = u(\theta)\}$ をグラフとする

S から $\mathbb{R}$ への函数"を対応させる写像である。明らかに $\mathcal{F}^\mu$ の固定点は Φ^μ の不変な curve を与えている。

Assertion μ が充分小さければ, $\mathcal{F}^\mu$ は well-defined かつ contraction。

もしこの主張が正しければ, $\mathcal{F}^\mu$ が μ に関し連続な写像であることより invariant curve の連続な 1 parameter family が得られ, さらに $\mathcal{F}^\mu$ が contraction であることからこれらの curve の attracting たる性質も従う。即ち (3.3) が証明されたこととなる。

(3.6) Proof of Assertion

$u \in G$ とする。(以下 suffix μ は落す。)

Step 1 $\mathcal{F}u$ が S から $\mathbb{R}$ への函数を与えていること。

$$0 \text{ に対して } \tilde{\theta} \in \Phi_2(u(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}) = 0 \text{ ----- (3.6.1)}$$

の解と定める。この解の一貫性を言えばよい。

(3.6.1) によって $\tilde{\theta}_1 \mapsto \theta_1, \tilde{\theta}_2 \mapsto \theta_2$ とすると

$$|\theta_1 - \theta_2| = |\Phi_2(u(\tilde{\theta}_1), \tilde{\theta}_1) - \Phi_2(u(\tilde{\theta}_2), \tilde{\theta}_2)|$$

$$(3.4.2) \quad \geq |\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2| - \mu^{\frac{3}{2}} |K(u(\tilde{\theta}_1), \tilde{\theta}_1) - K(u(\tilde{\theta}_2), \tilde{\theta}_2)|$$

$$(3.4.3) \quad \geq (1 - 2\mu^{\frac{3}{2}}C) |\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2| \text{ ----- (3.6.2)}$$

μ が充分小であれば, Step 1の結論は正しい。また, このとき $\mathcal{F}u$ は $\mathcal{F}u(\theta) = \Phi_1(u(\tilde{\theta}), \tilde{\theta})$ で与えられる。

Step 2 $\mathcal{F}u \in G$

$$\text{まず, } |\mathcal{F}u(\theta)| = |\Phi_1(u(\tilde{\theta}), \tilde{\theta})|$$

$$(3.4.1) \quad = |(1-2\mu)u(\tilde{\theta}) + \mu^{\frac{3}{2}}H(u(\tilde{\theta}), \tilde{\theta})|$$

$$(3.4.3) \quad \leq 1-2\mu + C\mu^{\frac{3}{2}}$$

次に (3.6.1) により $\theta_1 \mapsto \tilde{\theta}_1, \theta_2 \mapsto \tilde{\theta}_2$ とする。

$$|\mathcal{F}u(\theta_1) - \mathcal{F}u(\theta_2)| = |\Phi_1(u(\tilde{\theta}_1), \tilde{\theta}_1) - \Phi_1(u(\tilde{\theta}_2), \tilde{\theta}_2)|$$

$$(3.4.1) \quad \leq (1-2\mu)|u(\tilde{\theta}_1) - u(\tilde{\theta}_2)| + \mu^{\frac{3}{2}}|H(u(\tilde{\theta}_1), \tilde{\theta}_1) - H(u(\tilde{\theta}_2), \tilde{\theta}_2)|$$

$$(3.4.3) \quad \leq (1-2\mu + 2C\mu^{\frac{3}{2}})|\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2|$$

$$(3.6.2) \quad \leq (1-2\mu + 2C\mu^{\frac{3}{2}})(1-2C\mu^{\frac{3}{2}})^{-1}|\theta_1 - \theta_2|$$

これより μ が充分小さければ, $\mathcal{F}u$ は $|\mathcal{F}u| \leq 1$ かつ Lipschitz 定数 1 以下の Lipschitz 函数となることがわかる。

Step 3 $\mathcal{F}$ は contraction。

$u_1, u_2 \in G, \theta \in S'$ に対して $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ を次の解とする。

$$\theta = \Phi_2(u_1(\tilde{\theta}_1), \tilde{\theta}_1) = \tilde{\theta}_1 + f(q) + \mu^{\frac{3}{2}}K(u_1(\tilde{\theta}_1), \tilde{\theta}_1)$$

$$\theta = \Phi_2(u_2(\tilde{\theta}_2), \tilde{\theta}_2) = \tilde{\theta}_2 + f(q) + \mu^{\frac{3}{2}}K(u_2(\tilde{\theta}_2), \tilde{\theta}_2)$$

$$\text{このとき } |\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2| = \mu^{\frac{3}{2}}|K(u_1(\tilde{\theta}_1), \tilde{\theta}_1) - K(u_2(\tilde{\theta}_2), \tilde{\theta}_2)|$$

$$(3.4.3) \quad \leq C\mu^{\frac{3}{2}}(|u_1(\tilde{\theta}_1) - u_2(\tilde{\theta}_2)| + |\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2|)$$

$$\therefore |u_1(\tilde{\alpha}) - u_2(\tilde{\alpha}_2)| \leq \|u_1 - u_2\| + |\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2| \text{ ----- (3.6.3)}$$

($\|\cdot\|$ は G での supremum norm)

$$\text{よって } |\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2| \leq C\mu^{\frac{3}{2}}(1 - 2C\mu^{\frac{3}{2}})^{-1} \|u_1 - u_2\| \text{ ----- (3.6.4)}$$

$$\text{これより } |\mathcal{F}u_1(\theta) - \mathcal{F}u_2(\theta)| = |\mathcal{H}(u_1(\tilde{\alpha}_1), \tilde{\alpha}_1) - \mathcal{H}(u_2(\tilde{\alpha}_2), \tilde{\alpha}_2)|$$

$$(3.4.1) \leq (1 - 2\mu)|u_1(\tilde{\alpha}_1) - u_2(\tilde{\alpha}_2)| + \mu^{\frac{3}{2}}|H(u_1(\tilde{\alpha}_1), \tilde{\alpha}_1) - H(u_2(\tilde{\alpha}_2), \tilde{\alpha}_2)|$$

$$(3.6.3) \leq (1 - 2\mu)(\|u_1 - u_2\| + |\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2|) + C\mu^{\frac{3}{2}}(\|u_1 - u_2\| + 2|\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2|)$$

$$(3.6.4) \leq \{(1 - 2\mu + C\mu^{\frac{3}{2}}) + (1 - 2\mu + 2C\mu^{\frac{3}{2}})C\mu^{\frac{3}{2}}(1 - 2C\mu^{\frac{3}{2}})^{-1}\} \|u_1 - u_2\|$$

これは μ が充分小さいとき $\mathcal{F}$ が contraction であることとを示している。／

以上で定理 (3.3) の証明が終った。

References

D. Ruelle - F. Takens "On the Nature of Turbulence"

Comm. Math. Phys. 20 ('71) pp 167-192, 23 ('71) pp 343-344

J. E. Marsden - M. McCracken "The Hopf Bifurcation

and its Applications" Springer-Verlag ('76)