

凸多面体上の Riemann 和の漸近挙動

楯 辰哉

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

Email: tate@math.nagoya-u.ac.jp

1 序

$P \subset \mathbb{R}^m$ を十分にきれいな集合とし, φ を P 上の十分に扱いやすい関数とする. このとき, 標準格子 $\mathbb{Z}^m$ によって定義されるリーマン和

$$R_N(P, \varphi) := \frac{1}{N^m} \sum_{\gamma \in (NP) \cap \mathbb{Z}^m} \varphi(\gamma/N), \quad N \in \mathbb{N} \quad (1)$$

を考える. もちろん, P や φ が十分に良いものである場合, リーマン積分の定義により

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(P; \varphi) = \int_P \varphi(x) dx$$

となる. ここで問題にすることは, P が $\mathbb{R}^m$ の格子凸多面体の場合のリーマン和 $R_N(P; \varphi)$ の $N \rightarrow \infty$ としたときの漸近展開である.

このような問題について古くから知られている事実は, 次の Euler-Maclaurin 展開である. つまり φ を単位閉区間 $[0, 1]$ 上の C^∞ -級関数とすると, 次が成り立つことが知られている:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k/N) &= R_N([0, 1]; \varphi) - \frac{\varphi(0)}{N} \\ &\sim \int_0^1 \varphi(x) dx + \frac{1}{2N} (\varphi(1) - \varphi(0)) + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} \left(\varphi^{(2n-1)}(1) - \varphi^{(2n-1)}(0) \right) N^{-2n}. \end{aligned} \quad (2)$$

ただしここで, B_n は Bernoulli 数であり, 次のように定義される:

$$B_n = (-1)^{n-1} b_{2n}, \quad \text{Todd}(-z) := \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k. \quad (3)$$

公式 (2) は (通常の微積分の教科書で見つけることは難しいようだが) 良く知られたもので, いくつかの証明が知られている. しかし, 例えば φ として周期 1 の C^∞ -級周期関数を取ると, 上記のリーマン和が積分の非常に良い近似を与えていることが分かるなど, この段階ですでにまったく非自明な公式である. この公式にちなんで, 一般に高次元の凸多面体に対する $R_N(P; \varphi)$ の漸近展開式 (ならびに φ を多項式としたときの効果的な公式) を総称して Euler-Maclaurin 展開と呼ぶことがある.

リーマン和 $R_N(P; \varphi)$ は P が凸多面体のとき、対応するトーリック多様体の幾何学と関連し、それを用いて研究がなされてきた。しかし、最近は逆に $R_N(P; \varphi)$ を、凸多面体上の調和解析や組み合わせ論を用いて詳しく解析し、それを用いてトーリック多様体の幾何学や解析学に応用するという逆の方向性を示す仕事の数多も存在する。本稿では、これらの方向性にある Euler-Maclaurin 展開についての先行結果を紹介し、我々が最近得た結果について述べ、その証明の方針について説明する。

2 凸多面体の用語

本論に入る前に、ここでは凸多面体についての用語を簡単にまとめておく。凸集合や凸多面体、凸多角錐体などのより詳しい記述は [Br] を参照していただきたい。 $\mathbb{R}^m$ の部分集合 P が凸多面体であるとは、 P が、ある有限集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ の凸包 (つまり S を含む最小の凸集合) のときをいう。一般に凸多面体 P はコンパクト集合であり、いくつかのベクトル $u_1, \dots, u_d \in \mathbb{R}^m$ と実数 $c_1, \dots, c_d$ を用いて

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m; \langle u_j, x \rangle \geq c_j \ (j = 1, \dots, d)\} \quad (4)$$

と書き表される。凸多面体 P が S の凸包となるような S のうちで最小のもの (これは自動的に有限集合である) が存在するが、それを P の頂点集合とよび、 $\mathcal{V}(P)$ と書く。 $\mathcal{V}(P)$ の元を P の頂点と呼ぶ。また、一般に $f \subset P$ が P の面であるとは、あるベクトル $u \neq 0$ と実数 c が存在して、

$$P \subset \{x; \langle u, x \rangle \geq c\}, \quad f = P \cap \{x; \langle u, x \rangle = c\}$$

となる場合をいう。面 $f \subset P$ はそれ自身が凸多面体であり、 F を含む最小のアフィン部分空間の次元を f の次元と呼び $\dim(f)$ と書く。また P 自身も P の面と呼ぶことにする。0 次元の面は頂点である。また 1 次元の面を辺と呼ぶ。さらに余次元 1 の面をファセットと呼ぶことがある。凸多面体 P の k 次元の面全体を $\mathcal{F}_k(P)$ と書き、さらに面全体を $\mathcal{F}(P)$ と書くことにする。

凸多面体 P が格子凸多面体であるとは、 $\mathcal{V}(P) \subset \mathbb{Z}^m$ が成り立つときをいう。また、 $\mathbb{R}^m$ の凸多面体 P が単純であるとは、任意の $v \in \mathcal{V}(P)$ に対して、 v から出ている (v を含む) 辺がちょうど m 本あるときをいう。このとき、 P は空でない内部を持つ。また、 P が Delzant であるとは、 P が単純であり、かつ任意の $v \in \mathcal{V}(P)$ に対して、ある $\mathbb{Z}^m$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底 $\{w_1, \dots, w_m\}$ が存在して、 v から出る辺が $\{v + tw_j; t \geq 0\}$ 上にあるときをいう。なお、Delzant 凸多面体は、(滑らかな) トーリック・ケーラー多様体と対応が付くことに注意しておく。この文章で主な考察対象とする凸多面体は格子 Delzant 凸多面体である。本稿ではトーリック幾何学を用いることは無いため、ここでは、Delzant 凸多面体とトーリック・ケーラー多様体の間の対応関係を述べることはしない (講演においては若干解説した)。これについては [Fu], [G]などを参照されたい。

3 先行結果

我々の主定理を述べる前に、Euler-Maclaurin 展開一般について、先行結果をまとめておく。まず始めにリーマン和の定義式 (1) において $\varphi \equiv 1$ とする。 $E_P(N) = N^m R_N(P; 1)$ は P の Ehrhart 多項式と呼ばれているもので、 $E_P(N) = (NP \text{ 内の格子点の個数})$ である。これは、先のトーリック幾何学との関連で盛んに調べられていた。特に P が空でない内部を持つとき $E_P(N)$ は N に

ついでに m 次多項式となることが知られている。また $E_P(N)$ の N のべきの各係数は、対応するトーリック多様体の幾何学と関連する ([Fu])。これらの諸結果は、むしろトーリック幾何学を応用して凸多面体を調べるという方向性のもとで得られた結果であったが、前述したように、最近では、凸多面体上の調和解析・組み合わせ論から逆にトーリック幾何学への応用を考える向きも盛んである。これらの諸結果で特に我々の主定理と密接に関連する定理について、ここではまとめておく。

まず始めに触れたい先行結果は、Khovanskii-Pukhlikov ([KP]) によって Delzant 格子凸多面体に対して証明され、後に Brion-Vergne ([BrV]) によって単純格子凸多面体に対して拡張された定理である。簡単のために Delzant 格子凸多面体に対して彼らの主張を述べると以下のようなものになる: P を Delzant 格子凸多面体とし、 φ を多項式とする。このとき次が成り立つ:

$$R_N(P; \varphi) = \text{Todd}(P; \partial/N\partial h) \int_{P_h} \varphi(x) dx \Big|_{h=0}. \quad (5)$$

上記の式の記号を説明しておく。まず P が式 (4) のように与えられているとき、 $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ は小さなパラメータであり、 P_h は式 (4) において c_j を $c_j - h_j$ に置き換えて得られる凸多面体である。また、 $\text{Todd}(P; \partial/N\partial h)$ は無限階の微分作用素であり、

$$\text{Todd}(P; \partial/N\partial h) = \prod_{i=1}^d \text{Todd}(\partial/N\partial h_i)$$

と定義されるものである。ただし右辺は $\text{Todd}(z)$ のべき級数展開式において形式的に $z = \partial/N\partial h_i$ を代入して得られる無限階の微分作用素である。 h が十分小さく、 φ が多項式ならば上記の積分は h について多項式となる ([BrV])。従って式 (5) の右辺は有限和となる。

この Brion-Vergne らの結果は φ が多項式でなければならない。しかし、例えば講演中に説明したようにトーリック・ケーラー多様体上のテプブリッツ作用素のトレースの漸近挙動などへの応用を考える際、この制約は多少強すぎる。そのような状況でも適用できる公式は Guillemin-Sternberg によって与えられた、次の公式である:

$$R_N(P; \varphi) \sim \text{Todd}(P; \partial/N\partial h) \int_{P_h} \varphi(x) dx \Big|_{h=0}. \quad (6)$$

この公式は任意の $\varphi \in C^\infty(P)$ に対して成り立つ。注意だが、単に $\varphi \in C^\infty(P)$ のとき、上式右辺はもはや (一般には) 収束しない $1/N$ についての形式的べき級数であるが、これが $N \rightarrow \infty$ のとき $R_N(P; \varphi)$ の漸近展開を与える漸近級数となっていることを示すのが上の式である。これが初めて高次元で得られた漸近展開式のようなものである。

この時点で $R_N(P; \varphi)$ は $N \rightarrow \infty$ のとき漸近展開を持つことが示されているから、これ以後問題となるのは、 $1/N$ のべきの各係数の効果的な公式を求めることである。これは Brion-Vergne の結果においても同様で、 $1/N$ の各係数をある程度具体的に求める公式が望ましい。実際、Berline-Vergne ([BeV]) では、「Brion-Vergne の公式は計算可能ではない」と述べられている。(ここで「計算可能」とは、著者自身、計算量などの数値解析の概念に疎く説明できないが、多項式時間の計算アルゴリズムが存在するといった意味である。) このような反省のもとに、Berline-Vergne ([BeV]) は以下のような定理を証明した (以下では簡単のため $N = 1$ とする): 任意の格子凸多

面体 P と $f \in \mathcal{F}(P)$ に対して, f と直交した方向微分のみで定義される有理数係数の無限階の微分作用素 $D(P, f)$ が存在して, 任意の多項式 φ に対して次が成り立つ.

$$R_1(P; \varphi) = \sum_{f \in \mathcal{F}(P)} \int_f D(P, f) \varphi. \quad (7)$$

上式右辺の積分について説明する. $\mathbb{R}^m$ の部分空間 V が有理部分空間であるとは, $V \cap \mathbb{Z}^m$ が V の格子 (つまり $V/(V \cap \mathbb{Z}^m)$ がコンパクト) となる場合をいう. このとき V 上の Lebesgue 測度を $V \cap \mathbb{Z}^m$ の基本領域の測度が 1 となるように規格化して固定する. 格子凸多面体 P の面 $f \in \mathcal{F}(P)$ に対して, f を含む最小のアフィン部分空間は, $\mathbb{R}^m$ のある有理部分空間を平行移動したものである. 従って, その有理部分空間の規格化された Lebesgue 測度の平行移動によって f 上の測度が定まるが, 上記の式の積分は, この測度での積分を表す. (以後, すべての場合においてこのような積分を用いる.) 上記の Berline-Vergne の定理において驚くべきことは, P は格子凸多面体なら何でも良い, ということである. Berline-Vergne の証明では作用素 $D(P, f)$ の表象を, 原点の近傍で解析的となるように帰納的に構成する. 従って計算可能なアルゴリズムがあるとしても, 作用素 $D(P, f)$ の表象の Taylor 展開がどのような係数を持つかは明らかではない.

これまでは凸多面体自身の情報による Euler-Maclaurin 展開についての先行結果を紹介してきた. ここで一つ奇妙な定理を紹介する. それは Zelditch ([Z]) によって証明された次の定理である: P を Delzant 格子凸多面体とする. 任意の $n \geq 1$ に対して, ある (有限階の) 微分作用素 $\mathcal{E}_n(P)$ が存在して, 任意の $\varphi \in C^\infty(P)$ に対して次が成り立つ:

$$R_N(P; \varphi) \sim \int_P \varphi(x) dx + \sum_{n \geq 1} N^{-n} \int_P \mathcal{E}_n(P) \varphi(x) dx, \quad (8)$$

さらに $n = 1$ の項については, 次が成り立つ:

$$\int_P \mathcal{E}_1(P) \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial P} \varphi. \quad (9)$$

ただし上式の ∂P 上での積分は, 先ほど Berline-Vergne の定理の部分で説明した測度によるものである. 上記の第二項 ($n = 1$ の部分) の具体的な式は (式を書いた人間はいるようだが証明つきで述べたものとしては) 最初のもののようである.

この結果を Zelditch は P に対応するトーリック・ケーラー多様体上の Hermite 直線束に付随する Bergman 核関数の漸近挙動, ならびに Toeplitz-Fourier multiplier とでも呼ぶべき作用素のトレースの漸近挙動を調べることで証明している. つまり各微分作用素 $\mathcal{E}_n(P)$ は停留位相法からその存在が示されるもので, 従って計算は難しい. さらに $\mathcal{E}_n(P)$ はケーラー形式やエルミート形式に依存している. もちろん $R_N(P; \varphi)$ はそのようなデータとは無縁である. では, どの段階で, このような計量依存性が消えるのだろうか. 彼は「部分積分の後に計量依存性が消える」と説明している. 実際 $n = 1$ の項の計算では Donaldson ([D]) のある補題を用いて計算している.

後述する我々の結果では $n = 1, 2$ の場合に具体的な計算が可能であり, 特に $n = 1$ の場合には Zelditch の計算と一致している. Zelditch の $n = 2$ の項と我々の結果 (後述) を比較することにより, Donaldson の示した補題の類似を得ることが可能かもしれないが, Zelditch の微分作用素の計算は難しく, 現在のところそのような計算はなされていない.

4 主結果とその系

このように、格子凸多面体に対する Euler-Maclaurin 公式は、様々な形で興味を持たれ発展してきたが、我々の得た結果は、(少なくとも Delzant 格子凸多面体に対しては) Berline-Vergne の公式 (7) が漸近展開という意味でも成り立つ、という主張である。正確に述べると以下のようになる。

定理 1 ([T2]) P を $\mathbb{R}^m$ 内の Delzant 格子凸多面体とする。面 $f \in \mathcal{F}(P)$ と非負整数 n が $\dim(f) \geq m - n$ を満たすとき、有理数係数の $n - m - \dim(f)$ 次斉次微分作用素 $D_n(P; f)$ で、 f と直交する方向微分のみで定義されるものが存在し、任意の $\varphi \in C^\infty(P)$ に対して次が成り立つ。

$$R_N(P; \varphi) \sim \sum_{n \geq 0} N^{-n} \sum_{f \in \mathcal{F}(P); \dim(f) \geq m-n} \int_f D_n(P, f) \varphi. \quad (10)$$

この結果は、Berline-Vergne の公式 (7) と非常に似ている。実際 [BeV] で示されているある公式を用いて (10) を形式的に導くことができる。しかしその証明は (7) とは大きく異なる。定理 1 の証明でもっとも重要なことは微分作用素 $D_n(P, f)$ の存在だけでなく、その構成法である。構成法なくして、各係数を計算することは不可能である。我々の証明は、微分作用素 $D_n(P, f)$ を (一部帰納的な議論を用いる箇所はあるものの) かなり詳しく、しかも Berline-Vergne とは全く独立に構成することにある。

微分作用素 $D_n(P, f)$ の形をここで紹介することはしない。実際、計算に向けたアルゴリズムのもとで定義されているものであるが、それでも一部帰納的な議論を用いたり、その他の様々な記号を必要とするため、ここでは割愛させていただく ([T2] を参照)。しかし、我々の構成法が実際に計算に向いている、ということは、これを用いて漸近展開の第三項まで計算できる、ということが物語っている。この第三項の計算結果を表すために、リーマン和 $R_N(P, \varphi)$ の漸近展開を次のように書いておく。

$$R_N(P; \varphi) \sim \sum_{n \geq 0} N^{-n} A_n(P, \varphi). \quad (11)$$

このとき次が成り立つ。

系 2 ([T2]) 設定は定理 1 と同様とする。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned} A_0(P, \varphi) &= \int_P \varphi, \quad A_1(P, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\partial P} \varphi, \\ A_2(P, \varphi) &= -\frac{1}{12} \sum_{f \in \mathcal{F}_{m-1}(P)} \frac{1}{|u(f)|^2} \int_f \nabla_{u(f)} \varphi \\ &\quad + \sum_{g \in \mathcal{F}_{m-2}(P)} \left[\frac{1}{4} - \frac{\langle u(f_1), u(f_2) \rangle}{12} \left(\frac{1}{|u(f_1)|^2} + \frac{1}{|u(f_2)|^2} \right) \right] \int_g \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、上式のうち $A_2(P, \varphi)$ の式において、任意のファースセット $f \in \mathcal{F}_{m-1}(P)$ に対して $u(f) \in \mathbb{Z}^m$ は、 f と直交する P に対して内向きの原始的なベクトルである。また余次元 2 の面 $g \in \mathcal{F}_{m-2}(P)$ に対して $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{m-1}(P)$ は $g = f_1 \cap f_2$ となるようなファースセットの組を表した。

上記の系において $A_0(P, \varphi)$ はリーマン積分の定義から自明なものであり, $A_1(P, \varphi)$ は Zelditch の得た式 (9) と同じものである. 新しい式は $A_2(P, \varphi)$ である. 実際 $A_2(P, \varphi)$ の式は, 漸近展開の第二項を記述する公式としては初めてのもののようである.

このような公式が得られた理由は, 定理 1 における微分作用素 $D_n(P; f)$ の詳しい構成法に依っている. ここで, 我々の微分作用素 $D_n(P; f)$ と Berline-Vergne の公式 (7) に現れる微分作用素 $D(P, f)$ との関連が気になるところであるが, それについては次の結果を得た.

系 3 ([T2]) 設定は定理 1 の通りとする. 面 $f \in \mathcal{F}(P)$ と非負整数 n は $\dim(f) \geq m - n$ を満たすものとする. このとき Berline-Vergne の無限階の微分作用素 $D(P; f)$ の $n - m - \dim(f)$ 次斉次部分は, 式 (10) に表れた微分作用素 $D_n(P; f)$ と一致する.

つまり, 我々の主定理 1 は Berline-Vergne の仕事とは独立に証明されたのだが, 少なくとも Delzant 格子凸多面体に対しては Berline-Vergne の公式 (7) の漸近展開版が与えられたことになる. なお, この結果により, Berline-Vergne の公式 (7) の (Delzant の場合の) 別証明が与えられていることになることに注意しておく. 実際, Brion-Vergne ([BrV]) によると φ が d 次斉次多項式の場合, $N^{m+d}R_N(P; \varphi)$ は N に関して $m + d$ 次多項式となることが知られている. 従ってこの場合, 漸近展開式 (10) における $m + d + 1$ 次以降の項は消えることが分かり, (10) の漸近式は等式に置き換えて成立する. これについては次章でもう少し詳しく言及する.

5 Ehrhart 多項式の係数

我々の主定理 1 における微分作用素 $D_n(P, f)$ は有理数係数の微分作用素となっている. 係数がある有理数であるという事実は, Ehrhart 多項式の各係数がある有理数であることと密接に関連している. 実際我々の定理によると, $n - m - \dim(f) = 0$ つまり $n = m + \dim(f)$ のとき微分作用素 $D_n(P, f)$ は単に有理数であり, これが Ehrhart 多項式の各係数を表している. 以下では主定理 1 と [BrV] を組み合わせて得られる結果について述べる. なおこの章の結果は論文 [T2] には記述していないが, いずれも新しい結果ではないことを申し添えておく.

Ehrhart 多項式とは

$$E_P(N) = N^m R_N(P; 1) = (NP \text{ 内の格子点の個数})$$

と定義されるもので, これは N についての m 次多項式である. これをもう少し一般化して, 任意の d 次斉次多項式 φ に対して

$$E_P(N; \varphi) := N^{m+d} R_N(P; \varphi) = \sum_{\gamma \in (NP) \cap \mathbb{Z}^m} \varphi(\gamma) \quad (13)$$

とおく (φ が斉次多項式であることに注意). $E_P(N; 1) = E_P(N)$ である. 我々の主定理 1 を用いると

$$E_P(N; \varphi) \sim \sum_{k \leq m+d} N^k A_{m+d-k}(P, \varphi), \quad A_{m+d-k}(P, \varphi) = \sum_{f \in \mathcal{F}(P); \dim(f) \geq k-d} \int_f D_{m+d-k}(P, f) \varphi$$

が分かる. ここで $D_{m+d-k}(P, f)$ は $d - k + \dim(f)$ 次の微分作用素であり, φ が d 次多項式だったから, $D_{m+d-k}(P, f) \varphi = 0$ が $\dim(f) \geq k + 1$ のとき成り立つ. さらに $k < 0$ ならば, 任意の

$f \in \mathcal{F}(P)$ に対して $\dim(f) \geq k+1$ のため, $A_{m+d-k}(P, f) = 0$ が $k < 0$ に対して成り立つ. つまり, 次が分かる:

$$E_P(N; \varphi) \sim \sum_{k=0}^{m+d} A_{m+d-k}(P, \varphi) N^k, \quad A_{m+d-k}(P, \varphi) = \sum_{f \in \mathcal{F}(P); k-d \leq \dim(f) \leq k} \int_f D_{m+d-k}(P, f) \varphi.$$

ここで注意だが前述の通り $E_P(N; \varphi)$ は N について $m+d$ 次の多項式であることが知られている ([BrV]). さらに [BrV] によると

$$\varphi(0) = E_P(N; \varphi)|_{N=0}$$

が成り立つことが知られている. (この式で特に $\varphi = 1$ とすると Ehrhart 多項式 $E_P(N)$ の定数部分が 1 であることが分かる.) 従って, 上式の “ $\sim$ ” は等式に置き換えることができ, 次が得られたことになる.

定理 4 設定は定理 1 の通りとし φ を $\mathbb{R}^m$ 上の d 次斉次多項式とする. このとき N についての $m+d$ 次多項式

$$E_P(N; \varphi) := \sum_{\gamma \in (NP) \cap \mathbb{Z}^m} \varphi(\gamma) = \sum_{k=0}^{m+d} A_{m+d-k}(P, \varphi) N^k$$

の係数 $A_{m+d-k}(P, \varphi)$ は次で与えられる.

$$A_{m+d-k}(P, \varphi) = \sum_{f \in \mathcal{F}(P); k-d \leq \dim(f) \leq k} \int_f D_{m+d-k}(P, f) \varphi.$$

さらに次が成り立つ.

$$\varphi(0) = E_P(N, \varphi)|_{N=0} = A_{m+d}(P, \varphi) = \sum_{v \in \mathcal{V}(P)} [D_{m+d}(P, v) \varphi].$$

この定理において, さらに $\varphi = 1$ とすると, もともとの Ehrhart 多項式 $E_P(N)$ の情報を得ることができる. このとき微分作用素 $D_{m+d-k}(P, f)$ が斉次であることから, その次数 $d-k+\dim(f)$ が正のとき $D_{m+d-k}(P, f)1 = 0$ である. 係数 $A_{m+d-k}(P, 1)$ の和の部分はこれを用いて簡単にすることができ, 次を得ることができる:

系 5 P を Delzant 格子凸多面体とする. このとき Ehrhart 多項式 $E_N(P) = \#[(NP) \cap \mathbb{Z}^m]$ は次で与えられる.

$$E_P(N) = \sum_{k=0}^m N^k \sum_{f \in \mathcal{F}_k(P)} D_{m-k}(P, f) \text{vol}(f).$$

ここで $D_{m-k}(P, f)$ は有理数である.

上記の系 5 の式は古くから知られていたが, 係数にあたる有理数は一意的ではない. Danilov の予想 ([BeV] 参照) とは, この有理数が, P が格子多面体のとき P と f によって定まる “横断的錐体” の格子点による平行移動にしか依らずにとれる, というものであり, これは Morelli ([M])

らによって証明され, Berline-Vergne ([BeV]) らによって別証明が与えられた. (なお“横断的錐体”の定義はここでは与えないが, 我々の定理の証明にも現れる. 次章参照.) 我々の微分作用素 $D_n(P, f)$ は, 幸運にも (あるいは不幸にも) Berline-Vergne の公式 (7) に現れる微分作用素と本質的に等しいため, 上記の式は Berline-Vergne の得たものと同じものであり, 上記は新しい結果ではない. しかし, 例えば

$$1 = E_P(0) = \sum_{v \in \mathcal{V}(P)} D_m(P, v)$$

という式が出るが, 我々の微分作用素の構成法から $D_m(P, v)$ を計算すると, 大変複雑な式が表れ, それが頂点全体で足し合わされて 1 に等しくなる, というのは, 全く非自明である. なお, この最後の等式は $m = 2$, つまり 2 次元の場合, いわゆる Noether の定理 ([Fu], [I] 参照) から直接証明される式となっていることに注意しておく.

6 証明の方針と Szasz 関数

最後に主定理 1 の証明の方針と, そこに現れる“Szasz 関数”について言及する. 簡単のため, 定理 1 の証明の方針を 1 次元の場合に式表示して, 高次元のときに, どのような事実を用いるかを述べ, 実際に 1 次元の場合, つまり古典的 Euler-Maclaurin 公式と, その類似物の証明について述べることにする. 1 次元の場合, つまり $P = [0, 1]$ の場合の証明のステップは以下のようなものである:

(1) $\varphi \in C^\infty([0, 1])$ を $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に拡張することにより, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ として議論する.

(2) $R_N(\varphi) := R_N([0, \infty); \varphi) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k/N)$ の漸近展開を得る.

(3) $R_N(\mathbb{R}; \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx + O(N^{-\infty})$ を示す.

(4) $R_N([0, 1]; \varphi) = R_N([0, \infty); \varphi) + R_N([0, \infty); \psi) - R_N(\mathbb{R}; \varphi)$ とステップ (2), (3) を用いて $R_N([0, 1]; \varphi)$ の漸近展開を得る. ただし $\psi(x) = \varphi(1-x)$ とおいた.

まず上記の各ステップについて, 高次元の場合の困難をふまえて説明する. ステップ (1) が可能なことは自明である. $\varphi \in C^\infty([0, 1])$ のどのような拡張を取ってきても良く, それは高次元でも同様である. このステップは後のステップ (2), (3) に現れる非コンパクトな領域上でのリーマン和を考察するために必要である.

ステップ (3) はステップ (2) から従う. 実際, ステップ (2) について次が知られている:

$$R_N(\varphi) \sim \int_0^\infty \varphi(x) dx - \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n!} \varphi^{(n-1)}(0) N^{-n}, \quad (14)$$

ただし b_n は式 (3) で定義されている定数である. これを用いるとステップ (3) は, [GS] に従って次のように示すことができる. 実際 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して $|l|$ が十分大きな整数 l を取って $T_l \varphi(x) := \varphi(x+l)$ の台が $(0, +\infty)$ に含まれるようにする. このとき, リーマン和を lN だけ平

行移動することにより

$$R_N(\mathbb{R}; \varphi) = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k/N) = \frac{1}{N} \sum_{k > 0} T_l \varphi(k/N) = R_N(T_l \varphi)$$

となる. 従って, 式 (14) において φ を $T_l \varphi$ に置き換えたものを用いることができるが, 初項以外の項は $(T_l \varphi)^{(n-1)}(0) = 0$ であるため消えることがわかりステップ (3) が証明される. ステップ (3) の証明は高次元の場合も本質的には同様であり, ここまでの議論の高次元版はステップ (2) または式 (14) に相当するもの (高次元のときは $[0, +\infty)$ を適当な錐体 (前節に表れた “横断的錐体”) に置き換えたもの) が本質的である.

最後のステップ (4) は一次元の場合は自明で, 高次元の場合は Brion-Vergne ([BrV]) による “Euler の公式の超関数表示式” を用いる. これはいわゆる “inclusion-exclusion の原理” であり, 本質的には一次元の場合と同様である. しかし, 高次元における難点はここにある. つまり, ステップ (2) で得られた種々の微分作用素は, 凸多面体 P を超えて横たわる錐体上でのものであり, ここでの φ の微分は P の外側での情報を含む. それがステップ (4) で足し合わせると相殺して P 上での微分のみの情報で書き表されることを証明しなければならない. この部分はステップ (2) の高次元版で, 何回も部分積分を繰り返すことにより行われる. いくつもの微分作用素の積分を一斉に部分積分しなければならず, ここに帰納的な議論を導入せざるを得ない. この部分が高次元での難しい点である.

以下ではステップ (2), つまり式 (14) とその類似物の証明の概要を述べる. 一次元の場合, これをもう少し拡張した “捩られた” リーマン和の漸近展開を我々の方針で導くことができる. 捩られたリーマン和とは [GS] において Guillemin-Sternberg が必ずしも Delzant ではない単純格子凸多面体に対するリーマン和の漸近展開を得るために導入したもので, 次のように定義される. 任意の $\omega \in S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ に対して

$$R_N^\omega(\varphi) := \frac{1}{N} \sum_{k \geq 0} \omega^k \varphi(k/N) \quad (15)$$

と定義される和を捩られたリーマン和 (twisted Riemann sum) と呼ぶ. Guillemin-Sternberg ([GS]) では, 次の公式が得られている.

$$R_N^\omega(\varphi) \sim - \sum_{n \geq 1} \frac{b_n^\omega}{n!} \varphi^{(n-1)} N^{-n}, \quad (16)$$

ただし, 係数 b_n^ω は次で定義されるものである.

$$\frac{z}{\omega e^z - 1} = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n^\omega}{n!} z^n. \quad (17)$$

以下では, 式 (14), (16) の, Szasz 関数を用いた証明を紹介する. なお, このステップの高次元化は, それほどの困難を伴わないものであることに注意しておく.

Szasz 関数とは閉区間上の Bernstein 多項式の類似物として Otto Szasz が 1950 年に導入し調べたものである ([S]). ここでは “捩られた” Szasz 関数を導入しておく. 簡単のため $\varphi \in S(\mathbb{R})$ とする. このとき 捩られた Szasz 関数 $S_N^\omega(\varphi)$ (ただし $\omega \in S^1$) とは, $[0, \infty)$ 上の関数で, 次で定義される.

$$S_N^\omega(\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \ell_k(Nx) \varphi(k/N), \quad \ell_k(x) = \frac{x^k e^{-x}}{k!}. \quad (18)$$

Szasz ([S]) が導入したものは $\omega = 1$ のときの関数であり, これを Szasz 関数と呼んでいる. なお $\omega = 1$ のときの本来の Szasz 関数は, $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ に対して定義される通常の Bernstein 多項式

$$B_N(\varphi)(x) = \sum_{k=0}^N m_N^k(x) \varphi(k/N), \quad m_N^k(x) = \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}, \quad x \in [0, 1]$$

と Poisson の少数の法則

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_N^k(x/N) = \ell_k(x)$$

で結びついている. なお, この方向への更なる問題については [T3] を参照していただきたい. 我々にとって Szasz 関数の性質で重要なことは, 次の事実である:

$$\int_0^\infty S_N^\omega(\varphi)(x) dx = R_N^\omega(\varphi).$$

この式により, $S_N^\omega(\varphi)$ の $N \rightarrow \infty$ のときの漸近展開が, 誤差項の x についての評価式とともに得られれば, それを積分することによって $R_N^\omega(\varphi)$ の漸近展開が得られる. $S_N^\omega(\varphi)$ の漸近挙動で我々にとって有効なものは次の命題で与えられる.

命題 6 φ を $\mathbb{R}$ 上の Schwartz 関数とし $\omega \in S^1$ とする. このとき $n < K < 2n$ を満たす任意の自然数 n と実数 K に対して, 次が成り立つ.

$$S_N^\omega(\varphi)(x) = \sum_{\mu=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(\mu)}(x)}{\mu!} J_\mu^\omega(Nx) N^{-\mu} + O(N^{-n}(1+x)^{n-K}), \quad x > 0, N > 0.$$

ただし $O(N^{-n}(1+x)^{n-K})$ は n, K に依存する. ここで関数 $J_\mu^\omega(x)$ は次で与えられる:

$$J_\mu^\omega(x) = e^{-(1-\omega)} \sum_{k=0}^{\mu} p(\mu, k; \omega) x^k,$$

$$p(\mu, k; z) = \sum_{t=0}^k \binom{\mu}{t} (-1)^t S(\mu-t, k-t) z^{k-t}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

さらに $z = 1$ のとき $[\mu/2] + 1 \leq k \leq \mu$ に対して $p(\mu, k; 1) = 0$ であり, 特に $J_\mu^1(x)$ は高々 $[\mu/2]$ 次の多項式である.

なお, 上記の多項式 $p(\mu, k; z)$ の定義に表れた $S(n, k)$ ($0 \leq k \leq n$) は第二種 Stirling 数と呼ばれるもので, n 個の元からなる集合を k 個の空でない部分集合に分割する場合の数である.

命題 6 の証明は [T3] における $\omega = 1$ のときの証明と同様であり, [T2] にはその詳細が述べられているので, そちらを参照されたい. この命題にある $S_N^\omega(\varphi)$ の漸近式において $n+1 < K < 2n$ となる n, K をとり $[0, \infty)$ 上で積分し $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ と自然数 n に対して成り立つ式

$$\int_0^\infty e^{-N\tau x} \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(j-1)}(0)}{(\tau N)^j} + O(N^{-n})$$

を用いると次を得る.

命題 7 任意の $\varphi \in S(\mathbb{R})$ に対して次が成り立つ.

(1) $\omega = 1$ のとき :

$$R_N([0, \infty); \varphi) \sim \int_0^\infty \varphi - \sum_{n \geq 1} c_n \varphi^{(n-1)}(0) N^{-n},$$

$$c_n = \sum_{\mu=n}^{2n} \frac{(\mu-n)!}{\mu!} (-1)^{\mu-n} p(\mu, \mu-n; 1). \quad (19)$$

(2) $\omega \neq 1$ のとき :

$$R_N^\omega(\varphi) \sim \sum_{n \geq 1} c_n^\omega \varphi^{(n-1)}(0) N^{-n},$$

$$c_n^\omega = \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\mu} \frac{(n-k-1)! p(\mu, \mu-k; \omega)}{\mu! (n-\mu-1)! (1-\omega)^{n-k}}. \quad (20)$$

なおここで注意だが, 命題 7 で得られた式 (19), (20) と, 知られている式 (14), (16) を比較すると, 次が得られる:

$$b_n/n! = c_n, \quad b_n^\omega/n! = -c_n^\omega. \quad (21)$$

式 (21) の第一式については, 直接計算することにより

$$c_n = \frac{n+1}{n!} \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l+1} \binom{2n}{n+l} S(n+l, l)$$

が得られる. 右辺は第二種 Stirling 数, Catalan 数 $\binom{2n}{n}$ を含む式だが, 実はこの右辺は $b_n/n!$ に他ならないことが知られており ([GKP]), 式 (21) の第一式は直接確かめることができる. しかし $\omega \neq 1$ のときの c_n^ω と b_n^ω を結ぶ式が知られているかどうか, 筆者は知らない.

7 今後の課題

最後になったが, 今後の課題を述べておく. まずあげられることが, Delzant という条件をはずし, 単純格子凸多面体に対する定理 1 と同様の公式を得ることである. Berline-Vergne によると, 彼女らの微分作用素 $D(P, f)$ は P, f の関数として, 大変良い振る舞いをする (valuation property と呼ばれる性質である). これは, いわば “ P の凸多面体による分割に即して $D(P, f)$ も分解される” といったたぐいの性質で, 彼女らはこの性質を用いて, 公式 (7) を一般の格子凸多面体に対して示した. (注意だが, $D(P, f)$ は実は “横断的錐体” に対して定義されるものであり, valuation property は錐体に対して成立するものである. ここでは, あえて不正確な説明をした.) 我々の微分作用素 $D_n(P, f)$ も同様の性質を持つことが分かるが, これを用いて一般の格子凸多面体上のリーマン和の漸近展開公式を得ることはできるかもしれない. しかしそのようにして得られた公式は, いわば「分割して, 個々のデータを足し合わせた」ものであり, それが effective な公式を導くとは, 思えない.

また, 単純格子凸多面体に制限して考えると, この場合は実は既に方針は示されている. つまり振られたリーマン和の漸近挙動を用いて, それを高次元化し, Guillemin-Sternberg の方法, なら

びに我々の方法を組み合わせることにより微分作用素を構成する、という手法である。しかし、実際にこれを遂行しようとする、(Delzant の場合ですら大変煩雑な式を丹念に調べなくてはならないがそれ以上に) 煩雑きわまりない式が現れる。このような煩雑な式は、うまい記号を導入すればきれいな式にまとめあげることができる場合が一般に多いが、現時点でそのような式は得られていない。

また、もう一つの問題は Poisson の少数の法則を用いて、一般の (必ずしも格子とは限らない) 一般の凸多面体上でのリーマン和の漸近挙動を、Bernstein 測度の少数の法則を定式化し証明してそれを用いて導き出す、というものである。これについては [T3] に詳しく述べておいたので、そちらを参照されたい。

いずれにしても、このような単純な問題ではあるが、内容は決して簡単ではなく、まだまだ面白い問題が残されているようである。

参考文献

- [BeV] N. Berline and M. Vergne, *Local Euler-Maclaurin formula for polytopes*, Moscow Math. J. **7** (2007), no. 3, 355–386.
- [BrV] M. Brion and M. Vergne, *Lattice points in simple polytopes*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 2, 371–392.
- [Br] A. Brøndsted, *An Introduction to Convex Polytopes*, GTM 90, Springer, 1983.
- [D] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Diff. geom. **62** (2002), no. 2, 289–349.
- [Fu] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, in: Annals of Mathematics Study, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [GKP] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (2nd ed.), Addison-Wasley Publ., Reading, MA, 1994.
- [G] V. Guillemin, *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n -spaces*, Progress in Math. **122**, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [GS] V. Guillemin and S. Sternberg, *Riemann Sums over Polytopes*, Festival Yves Colin de Verdière. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007), no. 7, 2183–2195.
- [I] 石田正典 著「トーリック多様体入門–扇の代数幾何–」(すうがくの風景) 朝倉書店, 2000.
- [KP] A. G. Khovanskii and A. V. Pukhlikov, *A Riemann-Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials over virtual polytopes*, St. Petersburg Math. J. **4** (1993), 789–812.
- [M] R. Morelli, *Pick's Theorem and the Todd Class of a Toric Variety*, Adv. in Math. **100** (1993), 183–231.

- [S] O. Szasz, *Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval*, J. Research of the National Bureau of Standards, vol. **45** (1950), no. 3, 239–244.
- [T1] T. Tate, *Bernstein measures on convex polytopes*, in “Spectral Analysis in Geometry and Number Theory”, 295–319, Contemp. Math., **484**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [T2] T. Tate, *Asymptotic Euler-Maclaurin formula for Delzant polytopes*, arXiv:0908.3073 [math.CO].
- [T3] 楯辰哉, 「凸多面体上の Bernstein 測度と関連する話題」研究集会「Bergman 核と代数幾何への応用」報告集. 数理解析研究所講究録 **1613**, 2008 年 9 月.
- [W] Z. Wang, *The twisted Mellin transform*, arXiv:0706.2642v2 [math.CO].
- [Z] S. Zelditch, *Bernstein polynomials, Bergman kernels and toric Kähler varieties*, J. Symplectic Geom. **7** (2009), no. 2, 51–76.