

完全 m 組グラフのパータイト・フロー分解について

広島経済大

田沢新成

新居浜高専

潮 和彦

広島大・計算センター

池田秀人

広島大・理

山本純恭

§ 1. はじめに

m 項目について n 水準のレコードに対して 2 項目質問の全体を考える。レコード分布が一様るとき, c 個の 2 項目質問に対応するバケツが最小の冗長率をもつのはそのバケツのグラフ構造が c -パータイト・フローのときかつそのときに限る [1]。ここで c -パータイト・フローというのは, 1 項目質問に対応する点を根とする c -フローのうち, その c 個の葉が c 個の異なる項目にまたがっているものをいう。 c -パータイト・フローの線の集合を P_c とかく。ただし $c \geq 2$ とする。

2 項目質問の全体をそのよりの最小の冗長率をもつバケツに対応する質問の集合で分割して得られる多値レコードに対する均衡型ファイル形式 $H \cup BMF S_2[2]$ を構成することは完

全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ を c -パートイト・クローに分解することに対応する。

§ 2. 分解可能の必要条件

定義 完全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ ($m \geq 2, n \geq 2$) の線の全体からなる集合 E ($|E| = \binom{m}{2} n^2$) が

$$E = \bigcup_{\alpha=1}^b P_c^{(\alpha)} \quad ; \quad P_c^{(\alpha)} \cap P_c^{(\beta)} = \emptyset \quad (\alpha \neq \beta)$$

と表わされるとき, $K_m(n, n, \dots, n)$ は c -パートイト・クロー分解可能であるという。

定理 1 完全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ が c -パートイト・クロー分解可能であるための必要条件は次の 2 つがともに成立することである。

(i) $\binom{m}{2} n^2$ が c の倍数。

(ii) n が偶数のとき $m \geq c+1$, n が奇数のとき $m \geq c+2$ 。

証明 (i) は明らかに必要。(ii) は c -パートイト・クローが存在するためには n が偶数, 奇数を問わず $m \geq c+1$ は必要。 n が奇数, $m = c+1$ のとき, 分解可能とする。点集合 $V_i = \{v_{ik} \mid k=1, 2, \dots, n\}$ ($1 \leq i \leq m$) の点 v_{ik} が $y_k^{(i)}$ 回パートイト・クローの根であったとする。 v_{ik} に接合する線と, v_{il} ($k \neq l$) に接合する線が同じパートイト・クローに属することなく, また $m-1=c$ であるから,

v_i に属する点と根とするハータイト・クローには v_i の点と接合する線が 1 本かつただ 1 本ある。従って、各点の次数が $(m-1)n$ で、 $K_m(n, n, \dots, n)$ が $\binom{m}{2}n^2/c$ 個の c -ハータイト・クローに分解可能ということから、

$$\sum_{k=1}^n \{ (m-1)n - y_k^{(i)} \} c + \sum_{k=1}^n y_k^{(i)} = \binom{m}{2} n^2 / c$$

でなければならぬ。従って $2 \sum_{k=1}^n y_k^{(i)} = n^2$ を得る。これは n が奇数ということに矛盾する。それ故、 n が奇数のときは $m \geq c+2$ が必要である。

n が偶数で $m=c+1$ のときの分解可能性が示され得る。
 n が奇数で $m=c+2$ のとき、たとえば $(m, n, c) = (5, 3, 3), (7, 5, 5), (8, 3, 6)$ の場合について実際 c -ハータイト・クローに分解可能であるから、必要条件は十分条件である。

§ 3. ハータイト・クロー分解

完全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ の mn 個の点を v_{ik} ($i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$) とし、2点間の隣接関係に適當な方向を与え、その隣接関係を表はす $mn \times mn$ の隣接行列を

$$M = \| m_{ik, j\ell} \| \quad i, j = 1, 2, \dots, m; k, \ell = 1, 2, \dots, n$$

$$m_{ik, j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{if } v_{ik} \text{ is adjacent to } v_{j\ell} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。ただし、 $ik = (i-1)n + k$ とする。 M は m^2 個の $n \times n$ の部分

行列 $M_{ij} = \|m_{ik,jl}\|$ $k, l = 1, 2, \dots, n$ をもち,

$$m_{ik,il} = 0, \text{ したがって } M_{ii} = 0$$

$$m_{ik,jl} + m_{jl,ik} = 1 \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n m_{ik,jl} = \binom{m}{2} n^2$$

をみたしている。

M の ik 行にある c 個の 1 の集合は v_{ik} を根とする c -クローに対応し、異なった $M_{ij_1}, M_{ij_2}, \dots, M_{ij_c}$ のそれぞれから 1 つづつとった c 個の 1 の集合は v_{ik} を根とする c -パーティット・クローに対応している。したがって、 $K_m(n, n, \dots, n)$ の c -パーティット・クロー分解は適当に方向を与えた隣接行列 M を求め、すべての 1 を c -パーティット・クローの条件をみたす c 個づつの集合に分割することである。

補題 2 $K_m(n, n, \dots, n)$ が c -パーティット・クロー分解可能であるための必要十分条件は、 $Q_{ik} (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n)$ を正の整数とすると、適当に方向づけた $K_m(n, n, \dots, n)$ の隣接行列 M が存在して、

$$\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n m_{ik,jl} = Q_{ik} c \quad i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

$$\sum_{l=1}^n m_{ik,jl} \leq Q_{ik} \quad i, j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

をみたすことである。

証明 各 ik 行の 1 が c -パーティット・クローに対応する Q_{ik} 組の 1 の集合に分割されたとすると明らかに (3.1) (3.2) をみたさなければならぬ。逆に (3.1) (3.2) をみたすとき、 $Q_{ik}c$ 個の 1 を

c 個ずつ Q_{ik} 組の 1 の集合に合け, それぞれを c -パート・クローに対応させることができることを示せばよい。いま $\sum_{k=1}^n m_{ik,jk} = A_j (j=1,2,\dots,m)$, $Q_{ik}=a$ とする。(3.2) から $\max A_j \leq a$ である。従って, 行和および列和がそれぞれ $(c,c,\dots,c), (A_1,A_2,\dots,A_m)$ となる $a \times m$ の 0-1 行列が存在する [3], [4], [5]。上のことは, $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{im}$ の ik 行から高々 1 ずつ 1 を 置く c -パート・クローに対応する c 個の 1 の集合を Q_{ik} 組作ることを示している。

定理 3 $m \geq 2c+1$ のとき, 必要条件 (i) をみたすならば, $K_m(n,n,\dots,n)$ は c -パート・クロー分解可能である。

証明 $\binom{m}{2}n^2/c = mna+r (0 \leq r < mn)$ と書ける。 $Q_{ik}=a+1 (ik=1,2,\dots,r), Q_{ik}=a (ik=r+1,r+2,\dots,mn)$ におく。文献 [6] の定理 3 の証明の中から, (3.1) をみたす隣接行列 M が存在することからわかる。 $m \geq 2c+1$ から, $a \geq n$ である。それ故, M は (3.2) をみたす。補題 2 より求める結論を得る。

定理 4 $c | \binom{m}{2}n$ かつ $c+\varepsilon \leq m \leq 2c$ (n が偶数ならば $\varepsilon=1$, n が奇数ならば $\varepsilon=2$) のとき, $\binom{m}{2}n^2/c = mna+bn (0 \leq b < m)$ として, $2a \geq n$ ならば $K_m(n,n,\dots,n)$ は c -パート・クロー分解可能である。

証明 には, 補題 5, 6, 7 を必要とする。

補題 5 β_1, β_2, b は $\beta_1 \geq n/2, \beta_2 \geq n/2, 0 \leq b < m$ をみたす整数とし, a_i は

$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \binom{m}{2} n$ か、 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_b; \alpha_{b+1} \geq \alpha_{b+2} \geq \dots \geq \alpha_m$ をみたす整数とする。:

のとき,

$$\sum_{j=1}^m y_{ij} = \alpha_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

$$y_{ii} = 0 \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.4)$$

$$y_{ij} + y_{ji} = n \quad i, j=1, 2, \dots, m (i \neq j) \quad (3.5)$$

$$y_{ij} \leq \beta_1 \quad i=1, 2, \dots, b; j=1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

$$y_{ij} \leq \beta_2 \quad i=b+1, b+2, \dots, m; j=1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

をみたす $m \times m$ 整数行列 $Y = \|y_{ij}\|$ が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{P_1} \alpha_i + \sum_{i=b+1}^{b+P_2} \alpha_i \leq \frac{nP(P-1)}{2} + \beta_1 P_1(m-P) + \beta_2 P_2(m-P) \quad (3.8)$$

か、すべての $P=1, 2, \dots, m$ および $0 \leq P_1 \leq b, 0 \leq P_2 \leq m-b$ をみたす P の分割 $P=P_1+P_2$ について成立することである。

証明 m 個の点の集合 $N=\{1, 2, \dots, m\}$ と $\binom{m}{2}$ 本の線の集合 $A=\{(i, j) | i < j\}$ で定義されるネットワーク $[N; A]$ を考える。 A 上で定義される整数値関数 $f(i, j)$ が存在して、 $u_i = \beta_1, i=1, 2, \dots, b, u_i = \beta_2, i=b+1, b+2, \dots, m$ とするとき

$$\sum_{j>i} f(i, j) + \sum_{j<i} (n - f(j, i)) = \alpha_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.9)$$

$$f(i, j) \leq u_i \quad \text{か} \quad n - f(i, j) \leq u_j \quad (i, j) \in A \quad (3.10)$$

をみたすならば $i < j$ に対しては $y_{ij} = f(i, j)$, $i > j$ に対しては $y_{ij} = n - f(j, i)$ とおき, さらに $y_{ii} = 0$ とおけば (3.3)~(3.7) をみたす行列 Y がえられる。逆に Y が存在すれば A 上で定義される (3.9)(3.10) をみたす整数値関数 $f(i, j)$ が存在する。

$$g(i, j) = f(i, j) - n + u_j \quad (3.11)$$

と書く

$$0 \leq g(i, j) \leq c(i, j), \quad c(i, j) = u_i + u_j - n \quad (3.12)$$

である。(3.9) から

$$\sum_{j>i} g(i, j) - \sum_{j<i} g(j, i) = \alpha_i + \sum_{j>i} u_j - u_i(i-1) - n(m-i) \quad (3.13)$$

を得る。逆に (3.12) (3.13) をみたす整数値関数 $g(i, j)$ が存在するならば

は (3.11) と通して (3.9) (3.10) をみたす $f(i, j)$ が存在する。 $S(\subseteq N)$

と $T = \bar{S}$ (S の補集合) と $S = \{i \mid \alpha_i + \sum_{j>i} u_j - u_i(i-1) - n(m-i) \geq 0\}$ と定義

$$L, \quad \lambda(i) = \alpha_i + \sum_{j>i} u_j - u_i(i-1) - n(m-i) \quad i \in S, \quad d(i) = -\alpha_i - \sum_{j>i} u_j + u_i(i-1) + n(m-i)$$

$i \in T$ と書く。 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \binom{m}{2} n$ であるから、 $\sum_{i \in S} \lambda(i) = \sum_{i \in T} d(i)$ である。

integrality theorem [7] おお v feasible theorem [7], [8] により

$$\sum_{j>i} g(i, j) - \sum_{j<i} g(j, i) = \lambda(i) \quad i \in S \quad (3.14)$$

$$\sum_{j<i} g(j, i) - \sum_{j>i} g(i, j) = d(i) \quad i \in T \quad (3.15)$$

$$0 \leq g(i, j) \leq c(i, j) \quad (i, j) \in A \quad (3.16)$$

をみたす整数値関数 $g(i, j)$ が存在するための必要十分条件は、

任意の $X \subseteq N$ に対し、

$$\sum_{i \in T \cap \bar{X}} d(i) - \sum_{i \in S \cap \bar{X}} \lambda(i) \leq \sum_{i \in X, j \in \bar{X}} c(i, j) \quad (3.17)$$

が成立することである。 ($\bar{X} = N$ のとき等号成立)

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \{i \in X, u_i = \beta_\alpha\}, X'_\alpha = \{i \in \bar{X}, u_i = \beta_\alpha\}, \alpha = 1, 2 \leq L, \quad \beta = \beta_1 - \beta_2 \leq L, \quad (3.17) \text{ は} \\ & -\beta_2 \{(|(\bar{X}, X)| + |(X, \bar{X})|) + |(\bar{X}, \bar{X})|\} - \beta \{(|(X'_1, X_1)| + |(X_1, X'_1)|) + |(X'_1, X'_1)|\} \\ & + (\beta_2 - n) \left\{ \sum_{i \in \bar{X}} i - 1 |(X, \bar{X})| \right\} + \beta \left\{ \sum_{i \in X'_1} i - 1 |(X_1, X'_1)| \right\} - \beta \{ |(X_1, X'_2)| + |X'_1| \} \\ & - (\beta_2 - mn) |\bar{X}| \leq \sum_{i \in \bar{X}} \alpha_i \end{aligned} \quad (3.18)$$

と同値である。ここには $(A, B) = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ である。 $|X| = p$,

$|X_\alpha| = p_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ として, (3.18) は

$$\frac{(m-p)(m+p-1)n}{2} - \beta_1 p_1 (m-p) - \beta_2 p_2 (m-p) \leq \sum_{i \in X} \alpha_i \quad (3.19)$$

と同値である。(3.19) に対し $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \binom{m}{2} n$ を用いると

$$\sum_{i \in X} \alpha_i \leq \frac{np(p-1)}{2} + \beta_1 p_1 (m-p) + \beta_2 p_2 (m-p) \quad (3.20)$$

が得られる。(3.20) の右辺は p, p_1, p_2 のみに依存したものであるから, 左辺を最大にするための集合 $X = \{1, 2, \dots, p_1, p_1+1, p_1+2, \dots, p_1+p_2\}$ とすることによって, (3.3)~(3.7) をみたす必要十分条件 (3.8) がえられる。

注意 $\beta_1 = \beta_2 = n$ の場合は文献 [7] で与えられている。

補題 6 Y は (3.3)~(3.7) をみたす $m \times m$ 整数行列とする。この

とき, $\frac{n}{2} \leq \beta_1 \leq n$, $\frac{n}{2} \leq \beta_2 \leq n$ ならば

$$\sum_{k=1}^n m_{ik,jl} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n \quad (3.21)$$

$$\sum_{l=1}^n m_{ik,jl} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, n \quad (3.22)$$

をみたす $n \times n$ の 0-1 行列 $M_{ij} = \|m_{ik,jl}\|$ が存在する。

証明 $\delta_{ij} \leq n$ であるから, Ryser 定理 [3], [4], [5] より明らか。

補題 7 $\alpha_1 = \dots = \alpha_b = (a+1)c$, $\alpha_{b+1} = \dots = \alpha_m = ac$ とする。このとき,

1° n が偶数のとき, $b=0$ ならば $\beta_1 = \beta_2 = \frac{n}{2}$, $b \neq 0$ ならば

$$\beta_1 = \frac{n}{2} + 1, \quad \beta_2 = \frac{n}{2}$$

2° n が奇数のとき, $b=0$ ならば $\beta_1 = \beta_2 = \frac{n+1}{2}$, $b \neq 0$ ならば

$$\beta_1 = \frac{n+3}{2}, \quad \beta_2 = \frac{n+1}{2}$$

として (3.3)~(3.7) をみたす $m \times m$ 整数行列 Y が存在する。

証明 (3.8) の成立を示す: c で証明を終る。

$$\begin{aligned} S_{P_1 P_2} &= \frac{nP(P-1)}{2} + \beta_1 P_1(m-P) + \beta_2 P_2(m-P) - \sum_{i=1}^b d_i - \sum_{i=b+1}^{b+P_2} d_i \\ &= \frac{nP(P-1)}{2} + \beta_1 P_1(m-P) + \beta_2 P_2(m-P) - (a+1)cP_1 - acP_2 \\ &= P_1(\beta_1 - \frac{n}{2})(m-P_1-P_2) + P_2(\beta_2 - \frac{n}{2})(m-P_1-P_2) + \frac{bc}{m}P_1 + \frac{bc}{m}P_2 - cP_1 \end{aligned}$$

$b=0$ のときは明らかに $S_{P_1 P_2} \geq 0$ である。 $b \neq 0$ のときは $\beta_1 \geq \frac{n}{2} + 1$ であるから,

$$\begin{aligned} S_{P_1 P_2} &\geq P_1(m-P_1-P_2) + \frac{bc}{m}P_1 + \frac{bc}{m}P_2 - cP_1 \\ &= P_1(m-b-P_2)(1 - \frac{c}{m}) + (P_1 + \frac{cP_2}{m})(b-P_1) \geq 0 \end{aligned}$$

したがって, Y が存在する。

定理4の証明 補題7により $m \times m$ の整数行列 $Y = \|y_{ij}\|$ が存在する。 Y を用いて隣接行列 M を求める。 $i > j$ に対しては, $\frac{n}{2} \leq \beta_1 \leq n$, $\frac{n}{2} \leq \beta_2 \leq n$ から, 補題6により (3.21) (3.22) をみたす M の $n \times n$ の ij 部分行列 $M_{ij} = \|m_{ik, j\ell}\|$ が与えられる。 $i < j$ に対しては, $m_{j\ell, ik} = 1 - m_{ik, j\ell}$ として M の $n \times n$ の ji 部分行列 $M_{ji} = \|m_{j\ell, ik}\|$ を定義すると, $y_{ij} + y_{ji} = n$ から, M_{ji} は (3.21), (3.22) をみたすことがわかる。もちろん $y_{ii} = 0$ に対しては $M_{ii} = \|m_{ik, i\ell}\| = 0$ である。さて, $a_{ik} = a+1$ ($i=1, 2, \dots, b; k=1, 2, \dots, n$), $a_{ik} = a$ ($i=b+1, b+2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$) とすれば隣接行列 M は (3.1) をみたすことがわかる。 $a \geq \frac{n}{2}$ から, β_1, β_2 のとり方により, (3.2) は明らかに成立。補題2から, 定理4の結論を得る。

系8 n が偶数で, $m=c+1$ のとき, $K_m(n, n, \dots, n)$ は c -パー

タイト・クロ-分解可能である。

証明 $a = \frac{n}{2}$ であるから, 定理 4 より明白。

必要条件 (i) をみたし, $c + \varepsilon \leq m \leq 2c$ かつ $c \nmid \binom{m}{2}n$ の分解問題が残っているかも知れない。

参考文献

- [1] 潮和彦, 田沢新成, 池田秀人, 山本純恭 (1976) 完全 m 組グラフのタイト・クロ-分解, 日本数学会年会応用数学分科会講演予稿集, 46-53
- [2] 潮和彦, 田沢新成, 池田秀人, 決田昇, 山本純恭 (1975) 多値レコードに対する均衡型ハイン方式 (HUBMFS₂) について, 情報処理学会昭和50年度第16回大会講演論文集 69-70
- [3] Ryser, H.J. (1957), Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Canad. J. Math.* 9, 371-377
- [4] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975), Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy, *Information and Control* 28, 156-175
- [5] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975), On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, *Hiroshima Math. J.* 5, 33-42
- [6] 潮和彦, 田沢新成, 山本純恭 (1976), 完全 m 組グラフの claw 分解について, 京都大学数理解析研究所共同研究集会「デザイン」の構成法および不存性予稿集
- [7] Ford, L.R. Jr. and Fulkerson, D.R. (1962), *Flows in networks*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.
- [8] Gale, D. (1957), A theorem on flows in networks, *Pacific J. Math.* 7, 1073-1082