

Generalized Cauchy Problem から 基本解の構成へ

京大数理解析 河合隆裕

偏微分方程式論において Cauchy 問題はそれが局所的性質を持つ (cf. 楕円型境界値問題) 故であろうか, 解の parametrize の方法として極めて便利な物であり, しかも複素領域においてもかなりよく調べられている。(特筆すべきは渡田 [1] である。) 従って偏微分方程式論を Cauchy 問題の観点から見直すことは単に双曲型方程式に限らずとも興味深いと期待される。

以下はその試みを実行してみたものである。

Part I は主として Fourier 変換の見地からの approach である。この章で得られる結果は特に新鮮な感じを与えるものではないけれど, 以下の章の理解を助けるのに方法が役立っだろう。又, compact support の hyperfunction の Fourier 変換論はそれほど重要でないが, parameter を入れれば, 一章に応用分野が広がることに注意しよう。

尚, この章の最初に 昨年のシンポジウムの後に得られた初期値問題についての 2, 3 の結果を introduction の意味をかめて記しておく。

Part II では Part I の結果を Radon 変換を用いて変数係数 (係数は実解析的とする。以下同じ。) の作用素の双曲性, 及びその拡張である I -双曲性を考察する。更にその方法で singular solution の構成 (cf. Zerner [1], Hörmander [1]) を行う。これは Part III の結果と合わせると best possible であることが判る。この部分では 層 C の理論 (佐藤 [1] ~ [3]) が問題の表現に適していることが如実に示される。
 (正則性に関連した) 尚 I -双曲性なる概念は

Volterra [1] (cf. Hadamard [1]) にその萌芽が見られるようであるが C の理論なしでは formulate されにくく概念であらう。Cauchy-Kowalevsky の定理と双曲性の gap を埋める物として興味深い。

Part III では基本解の構成を行う。複素係数の時迄こめてこのような議論ができるとは私自身半年以前には考えていなかった。Hyperfunction の merit を感じさせられる。ここで用いられる基本解の構成法は Part I, II の直接接続として思いついた物だが、かなり目新しい有用な方法でないかと思う。

Part I Fourier 変換と初期値問題

§0. 河合 [1], [2] は Fourier hyperfunction の理論を用いて convolution operator S^* の双曲性を S の Fourier transform の性質で決定し, その系として S^* が通常の定数係数偏微分作用素という最も trivial な case には,

Th. $P(D)$ が hyperbolic w.r.t. $(1, 0, \dots, 0) \iff$

$P_m(D)$ が hyperbolic w.r.t. $(1, 0, \dots, 0)$

が成り立つこと

を示した。この系として $P(D)u=0$ なら u は

x_1 について real analytic に depend することが判る。この事実 は 双曲性の概念を初期値問題とより直接的に関係付けうることを示唆する。§3 でそれを実行する。§1 では 後の便宜の為 いくつかの初期値問題についての定理を列挙する。§2 では Fourier 変換論において cohomology がもっともよく理論を表現することを注意する。これは Martineau [1] の一部分の拡張と見なせよう。

§1. 初期値問題について

Th. 1.1. $P_m(0, (1, 0, \dots, 0)) \neq 0$ とする。この時

$$P(x, D)u=0, \quad (\partial/\partial x_1)^j u(x_1, x')|_{x_1=0} = 0 \quad (j=0, \dots, m-1)$$

ならば $u=0$ (in some nbd of 0)

証明] 河合[2] 参照。[2]の本文を書いている時この形の定理は ideal theorem として証明が与えてなかったが、その後 柏原君から 河合[2]の (Hörmander [1] 式の) Holmgren の定理の直接の系であることを注意された。柏原君に感謝します。

尚 p.6. の注意参照。

Cor. $P(D)$ を 定数係数の偏微分作用素とし、
 $P_m(1,0; \dots, 0) \neq 0$ とする。今 $P(\xi)$ の 既約成分のいずれも $(1,0, \dots, 0)$ 方向に関し non-hyperbolic とする。今 $P(D)u=0$, $u(0, x')$ が compact support ^($\neq 0$) をもっているなら ^(実は) $u \equiv 0$ (in some nbd of 0).

証明] 河合[2] 参照。これは Hörmander [1] Th.5.7.2. の精密化と見れるが、これを特異性へのみ注目すると Part II の考察につながっていく。

Th. 1.2. $S = \{s(x)=0\}$ は non-singular な C^ω -submanifold ($\subset \mathbb{R}^n$) とする。今 $P_m(x, \text{grad } s(x)) \neq 0$ (on S) とする。この時、 $B \xrightarrow{P} B \rightarrow 0$ (exact) が S 上で成立すれば、 $\text{Dist}^1(S, B^P) \cong (B_S)^m$

証明] 小松[1]の方法とほとんど同じであるから略す。ただし、 $P: B_x \rightarrow B_x \rightarrow 0$ (exact) なら $\exists \omega \ni x$ s.t. $P: B(\omega) \rightarrow B(\omega) \rightarrow 0$ に注意しておく。(Schapira [1] にこの事実は注意されている。)

注意] 一般に $P: B_x \rightarrow B_x \rightarrow 0$ ($x \in S$) を仮定しなくとも、 $0 \rightarrow \text{Dist}^1(S, B^P) \xrightarrow{\delta} (B_S)^m$ (exact) は成立する。(Th. 1.1. 1. による。) 尚 この δ は次のような process で具体的に与えられる。 $\delta(x) \equiv x_1$ と座標をとることにしておく。

- (i) まず $\mu = \{u^+(x), u^-(x)\} \in B^P(\omega - \omega \cap S)$ とし $\tilde{u}(x)$ を $u^+(x), u^-(x)$ の B の flabbiness による ω 全体への拡張とする。
- (ii) $P\tilde{u} = g(x)$ とすると $\text{supp } g \subset \omega \cap S$ 。
- (iii) Cauchy-Kowalevsky の定理により容易に判る
 ように $g(x) = Pf + \sum_{j=0}^{m-1} \delta^{(j)}(x_1) g_j(x')$
 ($\text{supp } f \subset \omega \cap S$) と unique に分解される。
- (iv) そこで $u(x) \mapsto \{g_j(x')\}_{j=0}^{m-1}$ なる対応を考える
 と (iii) における分解の uniqueness により、これは
 well-defined である。これが δ なる写像の具体的な意味である。

注意] この δ なる写像の具体的な意味を考えれば, Th. 1.1 が通常の Holmgren の定理により得られることは何ら説明を要さない。

注意] この定理の δ の更に構成的意味は Part II で (適当な "regularity" の条件の下で) 与える。

注意] $\rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ ($\mathcal{D}$ は differential operator の sheaf) なる微分方程式系に対しても適当な regularity の条件の下で $\dim S = n - l$ (l は $\mathcal{M}$ の projective resolution の長さ) として $(B_S)^\alpha \cong \text{Ext}_S^l(\mathcal{M}, B)$ (α は $\mathcal{M}$ により定まる。) が成立するようであるか、細部の吟味がまだ不十分なのでこれについては次回に譲る。

§2 Fourier 変換は cohomology 理論で最もよく説明される。(「難しい」² = 易しい)

Ehrenpreis 他により exponential type の entire function と analytic functional には確かによい対応がつけられた。だが、それは構成的でない為に 実用上 不便なことが多い。

又、real compact support をもつ物が 実際、実用上 解析学に現われることは比較的少く、むしろ "fibre compact" に迄は条件がゆるめられることが必要となる。即ち parameter に依存して 逆 Fourier 変換を行わねばならぬ。それは Borel や Polya の考え方を cohomology の言葉を用いて定式化することによってなされる。但し、以下この § では次の事実を 仮定 する。

$$(A) \quad \Omega : \text{open convex} \subset \mathbb{C}^n, \quad V : \text{open} \subset \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow H^j(\Omega \times V; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n}) = 0 \quad (j \geq 1)$$

これは 実解析函数の空間の 局所空間の完備性に関係した微妙な問題があり、未だ証明は出さない。但し、今の場合 正則函数の特殊な、多重調和函数の性質を調べた方が速いかも知れない。但し、(A) は ^{以下の}議論に不可欠というのではない。

lem. 2.1 $J(z)$ を $\mathbb{C}^n$ 上の entire function で
あって 次の評価 (*) を満たすものとする。

$$(*) \quad |J(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon |z| + h_K(z)} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

但し K は compact convex,

$$h_K(z) = \sup_{z \in K} \operatorname{Im} \langle z, z \rangle \quad \text{とする。}$$

この時 $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ を $\mathbb{C}^n$ 内の $\mathbb{R}$ 上
一次独立な vector として $\Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$
を $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ の生成する cone とする。

ここで $z \in \Omega(\tau_0, \dots, \tau_{n-1}) \cap \overline{\Omega} \setminus \{z \in \mathbb{C}^n \mid$
 $\operatorname{Im} \langle z, z \rangle > h_K(z) \quad \forall z \in \Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})\}$
に対し

$$\varphi_{\tau_0, \dots, \tau_{n-1}}(z) = \int \dots \int_{\Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})} J(z) e^{i \langle z, z \rangle} d\zeta$$

(これは well-def. τ_i)

と定めると $\{\varphi_{\tau_0, \dots, \tau_{n-1}}(z)\}$ は

$$H^{n-1}(\{\Omega_{\tau_i}\}, \mathcal{O}) \cong H^{n-1}(\mathbb{C}^n - K, \mathcal{O})$$

$\cong H_K^n(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ の元を定める。

証明] $z \in \Omega(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$ とすれば

$$-\operatorname{Im} \langle z, z \rangle + h_K(z) < 0 \quad \text{on } \{|z|=1\} \cap \Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$$

従って K compact 故 $h_K(S)$ が連続故
 $- \operatorname{Im} \langle z, S \rangle + h_K(S) < -\varepsilon_2$ としてよい。

従って $- \operatorname{Im} \langle z, S \rangle + h_K(S) < -\varepsilon_2 |S|$ 故
 (*) により

$$\int_{\Gamma(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})} \int J(S) e^{i \langle z, S \rangle} dS \text{ は絶対収束し}$$

しかも Stein manif. 上 deRham cohomology
 が holomorphic form により表現されること
 より $\sum (-1)^j \varphi_{\tau_0, \dots, \widehat{\tau_j}, \dots, \tau_n}(z) = 0$
 ($z \in \Omega(\tau_0, \dots, \tau_n)$). 即ち cocycle
 condition を $\{\varphi_{\tau_0, \dots, \tau_{n-1}}\}$ は満たして
 いる。

注意 (i) $n=1$ の時は上の cocycle cond.
 が, 互いに解析接続される" という形に
 なる。これが Borel や Pólya の理論の
 出発点だったと思われる。従って Fourier
 変換の理論と関係するのは analytic
 functional であるよりはむしろ cohomology
 群であると考えられるが自然である。

(ii) $n \geq 2$ の時は $h_K(z)$ と

$\overline{\lim} \frac{1}{r} \log |J(rz)|$ の間に δ に対応が

ない。これが $n \geq 2$ の時 "linear な"

covering では不十分な理由であろう。

この周辺を整備することは 多分 重要な議論
の面白い問題であろう。

Th. 2.2. $K \subset \mathbb{R}^n$ を compact convex set
とする。この時 $J(t, z)$ が次の条件 (**) を満
たすとする。

(**) V を $\mathbb{R}^n$ 内の open set とする時, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \Omega_\varepsilon$ ($\mathbb{C}^n$ 内の open set $\supset V$) s.t.

$\forall L \in \Omega_\varepsilon$ に対しても

$$|J(t, z)| \leq C_{\varepsilon, L} e^{\varepsilon |z| + h_K(z)}.$$

この時 $\int J(t, z) e^{i\langle z, \xi \rangle} dz$ に Lem. 2.1.

と同様の意味付けをすれば" これにより

$H_{K \times V}^n(\mathbb{C}^n \times V; \mathcal{O} | \mathbb{C}^n \times V)$ の元を得る。

証明] Lem. 2.1. と同様である。

§3 定数係数双曲型作用素の Cauchy 問題 の基本解

Th. 3.1. P を m 階定数係数 PDO とし,
 P_m が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に双曲型とする。この
時 $\exists \mu_k(x_1, x')$ ($0 \leq k < m$) s.t.

$$\begin{cases} P(D_1, D') \mu_k(x_1, x') = 0 \\ D_1^j \mu_k|_{x_1=0} = \delta_{k,j} \delta(x') \\ \text{supp}_{x'} \mu_k(x_1, x') \subset \{x' \mid |x'| < C x_1\} \end{cases}$$

証明] $P(\zeta) = \sum_{j=0}^m \zeta_1^{m-j} q_j(\zeta')$ とし

$$p_k(\zeta_1, \zeta') \stackrel{\text{df.}}{=} \sum_{j=0}^k \zeta_1^{k-j} q_j(\zeta') \text{ とおく。}$$

(この idea は Hörmander [1] に従う)

ここで P_m が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に双曲型な
らば 河合 [1] により $\exists C$ s.t.

$$\left. \begin{array}{l} P(\xi_1, \xi') = 0 \\ |\operatorname{Im} \xi_1| > C |\operatorname{Im} \xi'| \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$$

s.t.

$$|\operatorname{Im} \xi_1| < \varepsilon |\operatorname{Re} \xi_1| + C_\varepsilon \text{ とする。}$$

従って $P(\xi_1, \xi') = 0$ ならば $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$

$$\text{s.t. } |\operatorname{Im} \xi_1| < \varepsilon |\operatorname{Re} \xi_1| + C_\varepsilon + C |\operatorname{Im} \xi'| \text{ として}$$

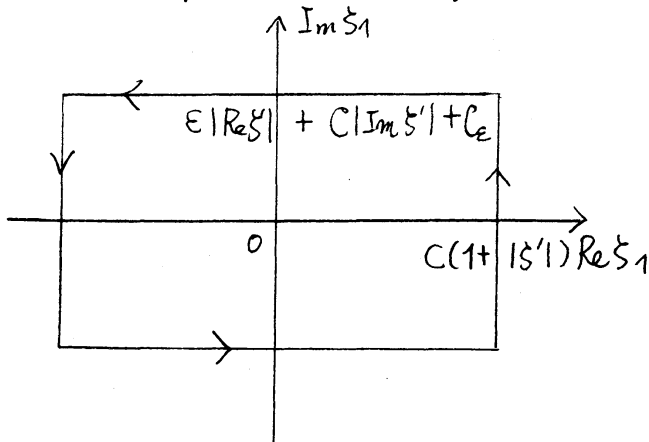
$$\delta u_0 \quad \text{又} \quad P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0 \quad \text{故} \quad |\xi_1| \leq$$

$$\leq C(1 + |\xi'|) \text{ として} \delta u_0.$$

今 (z_1, ξ') の entire function $E_k(z_1, \xi')$ を次のように定める。

$$E_k(z_1, \xi') \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_{\xi'}^\varepsilon} e^{-i\xi_1 z_1} \frac{P_{m-1-k}(\xi_1, \xi')}{P(\xi_1, \xi')} d\xi_1$$

但し $\Gamma_{\xi'}^\varepsilon$ とは ε と ξ' により定まる下図のよう
な ξ_1 -plane 内の 積分路 とする。



この時 $|Re \zeta_1| \leq |\zeta_1| \leq C(1+|\zeta'|)$ 故
 ちし必要ならば C_ε を大きくとり直すことによ
 り $P(\zeta_1, \zeta') = 0$ を満たす ζ_1 は $\Gamma_{\zeta'}^\varepsilon$ に
 ぶつて囲まれる領域内にのみ存在するとい
 う。従って $\varepsilon > 0$ に対して

$$|E_k(z_1, \zeta')| \leq C_{\varepsilon, \theta} e^{\theta|\zeta'|} \times \\
\times \exp\{|\alpha_1| (e|Re \zeta'| + C|Im \zeta'| + C_\varepsilon) + \\
+ C|\eta_1|(1+|\zeta'|)\} \text{ が成立する。}$$

よって §2 Th. 2.1. 1. により

$$\left[\int E_k(z_1, \zeta') e^{-i\langle \zeta', z' \rangle} d\zeta' \right]$$

$$\in H_{\mathbb{R}^n}^{n-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}; \mathcal{O} | \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1})$$

この元を $\mu_k(x_1, x')$ とすれば明らかに
 $\text{supp } \mu_k(x_1, x') \subset \{x' \mid |x'| \leq C|x_1|\}$

又 μ_k の def. 1. により

$$P(D_1, D') \mu_k(x_1, x') = 0 \quad \text{更に}$$

$$D_1^j \mu_k(x_1, x')|_{x_1=0}$$

$$= \left[\int e^{-i\langle \zeta', z' \rangle} d\zeta' \int_{\Gamma_{\zeta'}^\varepsilon} \zeta_1^j \phi_{n-1-k}(\zeta_1, \zeta') \times \right. \\
\left. \times \left(1/P(\zeta_1, \zeta') \right) d\zeta_1 \right] \quad \text{で"あり}$$

しかも

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \dot{S}_1^j p_{m-1-k}(S_1, S') / P(S_1, S') \\ &= \int_{S_1} \dot{S}_1^{j-k-1} + \left\{ \left(\int_{S_1} \dot{S}_1^{j-k-1} \left(\int_{S_1} \dot{S}_1^{k+1} p_{m-1-k}(S_1, S') \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - P(S_1, S') \right) \right) / P(S_1, S') \right\} \end{aligned}$$

ここで $\{ \}$ 内の分子は

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} \dot{S}_1^{k+1} p_{m-1-k}(S_1, S') \\ &= \int_{S_1} \dot{S}_1^{k+1} \sum_{j'=0}^{m-1-k} \int_{S_1} \dot{S}_1^{m-1-k-j'} g_{j'}(S') \\ &= \sum_{j'=0}^{m-1-k} \int_{S_1} \dot{S}_1^{m-j'} g_{j'}(S') \quad \text{より} \quad S_1 \text{ に } m \text{ まで} \end{aligned}$$

高々 $(j-k-1) + k = (j-1)$ 次である。

故に $j < m$ 故

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{S'}} \int_{S_1} \dot{S}_1^j p_{m-1-k} / P \, dS_1 \\ &= \int_{\Gamma} \int_{S_1} \dot{S}_1^{j-k-1} dS_1 \quad \text{従って} \end{aligned}$$

$$D_1^j \mu_k |_{\alpha_1=0} = \delta_{kj} \bar{\sigma}(\alpha')$$

$$\text{系} \quad \begin{cases} P(D_1, D') u(x_1, x') = f(x_1, x') \\ \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(x_1, x') \Big|_{x_1=0} = g_k(x') \end{cases}$$

$$(k=0, \dots, m-1)$$

において $f \in Q(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in Q(\mathbb{R}^{n-1})$ ならば
 $u \in Q(\mathbb{R}^n)$ として unique に存在。

証明 一意性は §1 Th. 1.1. より明らか。

存在は Duhamel の原理による。簡単の為

$$P(S_1, S') = S_1^{m+1} \quad \text{と仮定しておく。}$$

$$h(x_1, x') \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, x') - P(D) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} x_1^k g_k(x') \right)$$

$$\text{と定めて} \quad \begin{cases} P(D) u'' = h \\ u''|_{x_1=0} \text{ は 0-data} \end{cases}$$

をとこう。

$$\text{今 } v(x_1, y_1, x')$$

$$= \int \mu_{m-1}(x_1, x' - y') h(y_1, y') dy' \quad \text{とおく。}$$

$v(x_1, y_1, x')$ は $(n+1)$ -変数の実解析
~~函数~~ であり 更に $P(D) v = 0$

$$\text{かつ } \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^k v(x_1, y_1, x') \Big|_{x_1=0} = \delta_{m-1}^k h(y_1, x')$$

が満たされる。従って

$\int_0^{x_1} v(x_1 - y_1, y_1, x') dy_1 \stackrel{\text{def.}}{=} u''(x_1, x')$ と
定めれば $u'' \in Q(\mathbb{R}^n)$, 更に
 $P(D_1, D') u''(x_1, x')$

$$= \int_0^{x_1} P(D_1, D') v(x_1 - y_1, y_1, x') dy_1 \\ + v^{(m-1)}(x_1 - y_1, y_1, x') \Big|_{y_1=x_1} = h(x_1, x')$$

× 明らかに u'' の Cauchy data は 0

従って

$u'' + \sum \frac{1}{k!} x_1^k g_k(x') \stackrel{\text{def.}}{=} u$ が求める解である。
ある。

更に初期値問題に関し. hyperfunction
の merit を示す次の定理が 今迄の PFT より
得られる。

$$\text{Th. 3.2. } \begin{cases} Pu = f(x_1, x') \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^k u \Big|_{x_1=0} = g_k(x') \end{cases} \quad \text{与る}$$

Cauchy 問題は f が x_1 について real

analytic に依存する限り P が双曲型 なら
solvable である。

Proof] 河合[1]の基本解を用いて $P(D)u' = f$
なる u' は容易に構成できる。次に河合[1]
の正則性を Th. 1.1 により $u' \mid_{x_1=0}$ etc. を考え、それ
を $\{h_k(x')\}_{k=0, \dots, m-1}$ とする。

Th. 3.1. 1. により

$$\begin{cases} P(D)v = 0 \\ v(0, x') = g_0(x') - h_0(x'), \dots \end{cases}$$

という Cauchy 問題は

$$u(x_1, x') = \sum_{k=0}^{m-1} \int h_k(x_1, x' - y') (g_k(y') - h_k(x')) dy' \text{ として解ける。故}$$

$u = v + u'$ として求める (唯一の) 解が
得られる。

注意] $\left\{ \begin{array}{l} \text{Th. 3.1. 1. において} \\ P(\xi_1, \xi') = \prod_{j=1}^m (\xi_1 - \alpha_j(\xi')) \end{array} \right\}$ として

$|\xi'| \gg 1$ ならば $\alpha_j \neq \alpha_k$ ($j \neq k$) を仮定する

は p_{m-1}/P の代りに

$$\prod_{j=2}^m (s_1 - x_j) / P \text{ を考え, しかる } x_1 \text{ は}$$

p. 12 の長方形内に入るとすれば $PE=0$

$E(0, x') = \delta(x')$ なる E を得る。この事実を精密化した物が Part II 3.8 の結果である。

尚 Part II の結果は const. coeff. の場合には global も結果を与えていることに注意しておく。
(収束半径を調べればよい。)

(*) 但し 今度は積分路 $\Gamma_{s'}^\varepsilon$ は $x_1(s')$ を中心とする (たとえば半径 1 の) 円とする。又、この証明法から判るように $x_j \neq x_k$ という条件はもとよりあ
る。

Part II Cauchy 問題の基本解

§0 まず §1 では 双曲型作用素 に対する Cauchy 問題の基本解を構成する。以下作用素は *simple characteristic* であると仮定する。多分 *constant multiplicity* なら以下の議論は成立すると思うけれど詳細が検討していないので、次回に譲りたい。§2 では §1 の方法を ^{たとえば} *modify* して *principal part* が *real* な operator に対して *bicharacteristic stripe* への *singularity* をつ *solution* を構成する。この結果は更に Part III で拡張される。§3 では I-双曲性なる概念を論じ、Cauchy-Kowalevsky の定理を実領域で拡張する一つの方向 (多分唯一つの方向) を示す。

§1 双曲型作用素と Cauchy 問題の基本解

以下 Part II, Part III を通じて 基本的な次の定理を 浜田 [1] より引用しよう。

Theorem (Cauchy-Kowalevsky - 浜田)

$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x) = (\partial/\partial t)^m + \dots$ は *simple characteristic* とする。今 $K_1(\xi), \dots, K_m(\xi)$ を $t=0, \langle x, \xi \rangle = 0$ を通る ^(P2) *characteristic surface*

とする時 $\langle x, \xi \rangle = 0$ で "pole" をもつ $t=0$ に与えられた初期 data に対して $Pu=0$ の解で $K_1 \cup \dots \cup K_m$ 以外で多価解析的な物で local に, unique に, 存在する。

注意] $P_m(t, x; \tau(t, x, \xi), \xi) = 0$ の解を $\{\tau_j\}_{j=1}^m$ とする時 $K_j = \{g_j(t, x) = 0\}$ 但し $g_j = t\psi_j(t, x) + \langle x, \xi \rangle$ ($\psi_j(0, 0) = \tau_j(0, 0, \xi)$) と表現できる。又 $u = \sum_{j=1}^m u_j$ $Pu_j = 0$, u_j は g_j の逆や $\log g_j$ の正則函数を係数とする一次結合で現わされる。

例 1.1. 上の定理と同様の仮定で $t=0$ での初期 data を p 個 ($1 \leq p \leq m$) 与え, $K_1, \dots, K_m$ の任意の p 個 (これを $K_1, \dots, K_p$ としよう) を指定する時 $K_1 \cup \dots \cup K_p$ 以外で多価解析的な解が存在する。しかもその存在域は, $\langle x, \xi \rangle = \langle y, \xi \rangle$ に pole をもつ data を与えて y について一様な存在域を local にはもつとしてよい。

証明] 浜田 [1] p. 23 冊. の殆んど同一の繰り返し故略する。

TR. 1.2. P が t 方向に双曲型であると仮定する。この時

$$\begin{cases} P(t, x; \partial_t, \partial_x) E_j(t, x; y) = 0 \\ (\partial_t)^k E_j(t, x; y) \Big|_{t=0} = \delta_{jk} \delta(x-y) \end{cases}$$

($0 \leq k \leq m-1$), ($0 \leq j \leq m-1$),

を満たす $E_j(t, x; y)$ が存在する。この時 $E_j(t, x; y)$ は $t=0, x=y$ を通る bicharacteristic curves の全体 (ie characteristic conoid) を除いた所で実解析的である。特に Part I §1 TR. 1.1 により有限伝播速度の現象を示す。

証明 いずれの場合でも証明に変わりはないから最も重要な $j=m-1$ の時を扱おう。以下 E_{m-1} を単に E と記すことにする。

次のように Cauchy 問題を複素領域で考えよう。 ($\xi \in S^{n-1}$)

$$\begin{cases} P(t, z, \partial_t, \partial_z) E(t, z; y, \xi) = 0 \\ (\partial_t)^k E(t, z; y, \xi) = \delta_{k, m-1} \times \frac{1}{\langle z-y, \xi \rangle} \end{cases}$$

(n は $t=0$ の次元数) 但し ここで $t \in \mathbb{R}$,

$y \in \mathbb{R}^n$ ($|t|, \|y\| \leq 1$) とする。このような E は

後述の定理により, $K_0(y, \xi) \cup \dots \cup K_m(y, \xi)$

を除いて多価解析的に存在する。しかも今

P は t -方向に双曲型であり, $x, y \in \mathbb{R}^n$ 故,

$K_j(y, \xi)$ の定義方程式 $\varphi_j(t, x; y, \xi)$ は
 $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ とすれば " $\varphi_j(t, x; y, \xi) = 0$ なる点
 で" $\text{Im} \varphi_j > 0$ なる領域で正則 ^(超函数の) bary value をとめる
 ようになつてゐるとしてよい。(佐藤 [1], [2] 参照。)

($t \in \mathbb{R}$ としても a priori には $t \in \mathbb{C}$ としておいても
 どちらでもよいことは上の議論と p.2. の注意より

明らか。) 今 p.2. の注意により, $E = \sum_{j=1}^m E_j(t, x; y, \xi)$

$PE_j = 0$, E_j は K_j の外で多価解析的とし,

$E_j(t, x; y, \xi)$ の定める超函数を $E_j(t, x; y, \xi)$
 と記す。ここで $S.S. E_j(t, x; y, \xi)$

$$\subset \{(t, x, \tau, \eta) \mid \varphi_j(t, x; y, \xi)$$

$$(\tau, \eta) = c \text{grad}_{(t, x)} \varphi_j(t, x; y, \xi) \quad (c > 0 \text{ と}$$

なつてゐることは明らか。(S.S. は singular

support on S^{*+1} の意) 今 $E_j(t, x; y, \xi)$

は (y, ξ) に real analytic に depend するよう

$E_j(t, x; y, \xi)$ が作られてゐるとして構わないから

$$E_j(t, x; y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|\xi|=1} E_j(t, x; y, \xi) \omega(\xi) \text{ と定める。}$$

$$E = \sum_{j=1}^m E_j(t, x; y) \text{ とすれば" これが求める値}$$

質をすべて持った解であることは容易に判る。
 ここで層 C における積分の正則性に関する
 佐藤の補題 (佐藤 [1] p. 28. [2], [3])
 が用いられた。(これについては更に一般の場合
 により詳しく §2 で論じる。)

注意] 上の証明から判るように初期 data を全く
 一般にすることを要しない。双曲性ばかりでも
 不要でない。これが §3 の発想の出発点であ
 る。

§2 Singular Solution の構成

Th. 2.1. P_m が real であるとする。このとき, P の
 任意の bicharacteristic strip $\mathcal{b}$ を一つ fix
 する時, $Pu=0$ かつ $\phi \neq \text{s.s. } u \subset \mathcal{b}$ とする物が
 存在する。

証明] 適当に座標系をとって $\xi_0 \in I \subset S^{n-1}$ とし
 $(0,0;\tau_0,\xi_0)$ を通る bicharacteristic strip が $\mathcal{b}$
 となり, しかも $\tau(t,x;\xi)$ が $(0,0,\xi_0)$ の近傍で
 real と仮定して構わない。ここで §1 Th. 1.1.

の結果と Th. 1.2. の方法を用いて、

$$\begin{cases} PE=0 \\ E(0, x, y, \xi) = 1/(\langle x-y, \xi \rangle + i0)^n \end{cases}$$

が $E(t, x, y, \xi)$ を構成できる。 ($\xi \in I$)

$E(t, x, y, \xi)$ を (t, x, y, ξ) の超函数と思て

その S.S. を考えれば 明らかに

$$S.S. E \subset \{ \varphi(t, x, y, \xi) = 0 \} \text{ として}$$

$\text{grad}_{(t, x, y, \xi)} \varphi$ が方向 ξ . ここで $\mu(y)$ を $\{y=0, \xi=\xi_0\}$ へのみ support をもつ超函数として (たとえば $1/(\langle x, \xi_0 \rangle + i(|x|^2 - \langle x, \xi_0 \rangle^2) + i0)$)

$$\int E(t, x, y, \xi) \mu(y) dy \omega(\xi) = u(t, x) \text{ を考え}$$

れば、この積分は C での積分 (佐藤 [2], [3] 参照) として well-defined で、しかも ξ についての積分が行われているから 佐藤の補題により $S.S. u(t, x) \subset \emptyset$ しかも構成法より明らかに $u(0, x) = f(x) \neq 0$ i.e. $\emptyset \neq S.S. u(t, x)$

注意] 我々の singular support の定義によらず $u(t, x)$ は bicharacteristic curve の外で real analytic であることは注目に値する。 (cf. Hörmander [1])

Ch. 8.)

注意] この定理の逆については Part III で論
 いる。

Th. 8.2. P を real coefficient と限らない作
 用素とし, $P_m = A_m + i B_m$, A_m, B_m は real coeff.
 とする。この時 $\text{grad}_\xi [P_m, \bar{P}_m] = 0$ on $P_m(x, \xi) = 0$ ----- (1) とし, 更に $P_m(x, \xi) = 0$ 上で
 $\text{grad}_\xi A_m(x, \xi)$ と $\text{grad}_\xi B_m(x, \xi)$ が一次独立
 ----- (2) と仮定しよう。

この時

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = \text{grad}_\xi A_m(x, \xi) \\ \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} = \text{grad}_\xi B_m(x, \xi) \\ \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial t} = -\text{grad}_x A_m(x, \xi) \\ \frac{\partial \xi(t, s)}{\partial s} = -\text{grad}_x B_m(x, \xi) \end{array} \right. \quad \text{なる偏微}$$

分方程式系は完全積分可能であり, 従って $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ として $(x(0, 0), \xi(0, 0))$ を与えれば "unique
 な "bicharacteristic surface" (という用語があ

るかとか知らないか) を定める。この時、
この bicharacteristic surface $P = \text{singularity}$
を持つ non-trivial な solution u が存在
する。

証明] Th. 2.1. の方法をこの場合に適用することは可能と思われるし、又それは §3 の結果を改良するためにも重要なのだが、また Th. 1.1. に相当する結果が証明していないので、ここでは Hadamard [1] の方法を用いよう。(Th. 1.1. も Hadamard の方法で証明されているのだから同じことだが。) 条件 (2) を考えると $x_1 = x_2 = 0$ 内で $\langle x, \xi' \rangle = 0$ ($\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$) なる超平面を考え、ここを通る bicharacteristic surface の全体を考えると x -space 内で P のある real characteristic surface として parameter を ξ' に、もつものがある。その surface の方程式を $\{\varphi(x; \xi')\}$ とすれば、 $P_m(x, \text{grad } \varphi(x, \xi')) \equiv 0$ 故、 φ の (逆) 中 $\log \varphi$ の一次結合として $Pu = 0$ $u(x; \xi')$ 作れる。しかも $\varphi(x, \xi')$ が real 故、 $u(x; \xi')$ の境界値として $u(x; \xi')$ なる超函数を得、これを ξ' について積分すれば、求める singular solution が得られる。

注意] いくつかの例から考えて この定理の条件 (2) はもとよりめられると思われる。

§3 I-双曲性 ——— 初期値問題の可解性へ の 一つの approach ———

$$\text{Th. 3.1. } \begin{cases} P(t, x; D_t, D_x) u = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j u(t, x) \Big|_{t=0} = \mu_j(x) \quad (0 \leq j \leq m-1) \end{cases}$$

が 任意の $\{\mu_j\}_{j=0}^{m-1}$ に対して 解けるなら $\forall \xi \in S^{n-1}$ に対して $\exists \tau \in \mathbb{R}$ s.t. $P_m(0, x; \tau, \xi) = 0$

証明] 佐藤の基本定理 (佐藤 [1], [2]) により
 $S.S. u \subset \{P_m(t, x; \tau, \xi) = 0\}$ 従って $\mathbb{C}$ に
 おける制限の理論 (佐藤 [2]) により,
 $S.S. u(0, x) \subset \{\xi \mid (\tau, \xi) \in S.S. u(t, x)\}$ 故
 明らか。

注意] 上の結論は当然 $P_m(0, x; \tau, \xi) = 0$ の根
 τ は必ず $\mathbb{R}$ 上 real とおけるからである。これを証す
 るには Pseudo-differential operator の一般論の

構成を要し (Part III §3) まだ一般の case には証明していない。P が ~~定数係数~~ 有次の作用素の時には正しい。

$$\text{Th. 3.2. } \begin{cases} P(t, x, D_t, D_x) u = 0 \\ \text{(C.P.) } \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j u(t, x) \right|_{t=0} = \mu_j(x) \quad (0 \leq j \leq m-1) \end{cases}$$

において ω_ξ S.S. $\mu_j(x) \in I \subset S^{m-1}$ (ω_ξ とは ξ -方向への projection) とする。次の条件 (IH) が成り立つなら上の (C.P.) は solvable.

条件 (IH) $P_m(t, x; \tau, \xi) = 0$ の根では $\xi \in I$ なる限りすべて real である。

証明] §1 Th. 1.2 のそれと同様である。

Th. 3.3 更に条件 (IH)' : $\text{Im}(t \tau(t, x; \xi)) \geq 0$ でも同様の結論が成立する。

証明] 証明方法より明らか。

注意] 更に上の定理を $m \geq 3$ の時は精密化/することも可能であるか。今ここでそれに深入りすることは、遊びになるだろう。Part II §1 を参照されたい。とこと同じ analysis か (ie. 曲面波を

用いる)可能であることは容易に判らう。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eg. 1. } P = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 \\ \quad \quad \quad \text{(これは Volterra [1] の扱ったものである。)} \\ \text{eg. 2. } P = \frac{\partial}{\partial t} + it \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right.$$

注意] 上のように 初期値に 特異性の制限をつけて 双曲性 を考えることを 仮に I-双曲性と呼んでみた。このように mod $\mathcal{Q}$ で考えることは reflection の原理の 一つの新しい見方を与える。ただし それには $N \geq 3$ の時 坂田 [1] の結果をもう少し改良する必要がある。詳しくは次回に譲りたい。ただし $N=2$ の時は 坂田 [1] の結果で十分で、その考え方を Part III §1 の $n=2$ の時の 正則性定理の証明中に示しておいた。詳細は Part II §1 と重複するので省略する。

Part III (Pseudo)differential operator の局所理論

§0 この章では 偏微分作用素の可解性, 正則性等を論じる。又この章の考察は最近 Pseudodifferential operator の formalism をほぼ完成させたので 殆んどそのまま Pseudodifferential operator に拡張できる。まず §1 では 基本解の構成について Part II §3 の考え方をまかした物を述べる。(他にも構成法はあるが、これが最もよい結果を与える。) 又同じ考え方の適用例として $n=2$ の時の正則性定理に証明を与える。§2 では §1 で構成された基本解の正則性を検討する。§3 では pseudodifferential operator に対して §1, §2 の結果の拡張を試みる。

§1 基本解の構成

lem. 1.1. 次に示す条件 (S) の下で

$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x) E(t, x) = 1 / (\langle x, \xi \rangle + at + i0)^n$ を満たす $E(t, x)$ が存在する。

条件 (S): $\text{Im} \langle x, \xi \rangle > 0$ に含まれ $\mathbb{R}^n$ 上で $\text{Im} \langle x, \xi \rangle = 0$ に接するある領域 U_ξ において 各 j に対して $x_j > x_j \geq \alpha$ 又は $\beta \geq x_j > x_j$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) ならば $\text{Re } q_j(t, x; \lambda) = 0$ なる限り $\text{Im } q_j(t, x; \lambda) > 0$ 。ここで

t と s の大小関係は各 j により異なってもよい。尚 $g_j(t, z; s) = 0$ を $t = s$, $\langle z, \xi \rangle = 0$ を通る

characteristic surface の方程式とする。

証明] 今 たとえば " $\xi_1 \neq 0$ としてもよいから ($\because \xi = 0$

なら non-characteristic 故問題ない。) $T = t$,

$w_1 = at/\xi_1 + z_1$, $w_j = z_j$ なる座の変換をして考

えることにより

$$I(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x) E(t, x) = 1/\langle z, \xi \rangle + i0)^m$$
 の解を求めれば十分である。

今 初期 data を $t = s$ において

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\langle z, \xi \rangle^{m+1} \end{pmatrix}$$

で " 与えて Part II §1 Th. 1.1. を適用して $u(t, z; s) = \sum_{j=1}^m u_j(t, z; s)$ なる解を得る。ここで " $j = 1, \dots, l$

に対しては $t > s \geq \alpha$ で " $j = l+1, \dots, m$ に対しては

$\beta \geq s > t$ において $\operatorname{Re} g_j = 0$ なる限り $\operatorname{Im} g_j > 0$

となるように j は決めておく。ここで

$$E(t, z) = u_+(t, z) - u_-(t, z)$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{j=1}^l \int_{\alpha}^t u_j(t, z, s) ds - \sum_{j=l+1}^m \int_t^{\beta} u_j(t, z, s) ds$$

と定めれば"これは $z \in U_\xi$ で"一意正則"であり, しかも $P(t, z, \partial/\partial t, \partial/\partial z) E(t, z) = 1/\langle z, \xi \rangle^{m+1}$ が成立する。

実際, $u^{(0)} = u$, $u^{(j)} = (\partial/\partial t)^j u$ とおいて一階化した方程式を $\partial/\partial t \tilde{u} = Q \tilde{u}$ $\left(\tilde{u} = \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{pmatrix} \right)$

と略記する。今

$$P(t, z) \stackrel{\text{df.}}{=} \sum_{j=1}^l \int_a^t \tilde{u}_j(t, z, s) ds$$

$$- \sum_{j=l+1}^m \int_t^\beta \tilde{u}_j(t, z, s) ds \quad \text{と定めれば, 定義}$$

$$\text{により } \partial/\partial t \tilde{u}_j = Q \tilde{u}_j \quad \text{BZ}$$

$$\partial/\partial t \int_a^t \tilde{u}_j(t, z, s) ds = \tilde{u}_j(t, z, t) + \int_a^t \partial/\partial t \tilde{u}_j ds,$$

$$\partial/\partial t \left(- \int_t^\beta \tilde{u}_j(t, z, s) ds \right) = \tilde{u}_j(t, z, t) - \int_t^\beta \partial/\partial t \tilde{u}_j ds$$

が成立つから

$$(\partial/\partial t - Q) P(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\langle z, \xi \rangle^{m+1} \end{pmatrix}$$

が $u(t, z, s)$ の初期条件の予え方により成立する。

この方程式系の最下行に目をみて, 初期条件の予え

方により成立する $v_0 = (\partial/\partial t)^2 v_0$ を代入すれば

$$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial z) v_0(t, z) = 1/\langle z, \xi \rangle^{n+1}$$

しかも定義により $v_0(t, z) = E(t, z)$

$$\text{従って } P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial z) E(t, z) = 1/\langle z, \xi \rangle^{n+1}$$

故に条件(1)により $E(t, z)$ の境界値を考えて

$$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial z) E(t, x) = 1/(\langle x, \xi \rangle + i0)^{n+1}$$

解 $E(t, x)$ が求まる。

系. 今 $\mathcal{P}_j$ に対してについての一種の positivity を要求したか。実は一つの $\mathcal{P}_j$ についての条件でその方向の solution が出ていることは明らかである。実際

$$E(t, z) = \sum_{j=2}^l \int_a^t u_j(t, z, s) ds + \sum_{j=l+1}^m \int_t^b u_j(t, z, s) ds$$

で $E_1(t, z)$ とすれば $E_1(t, z)$ の定める超函数 $E_1(t, x)$ に対して $P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial z) E(t, x)$

$= 1/(at + \langle x, \xi \rangle + i0)^{n+1}$ が (τ_0, ξ) の n 度 δ 成立つからである。尚、と直接的にこの事実を示せるか。それには 須田[1]をもう少し改良する必要がある。

更に上では 平面波による δ 函数の分解により基本解を作ったが、これでは適用範囲が狭くなる。そこで 曲面波による δ 函数の分解を与える次の佐藤の公式

を用いよう。(佐藤 [3] 参照)

公式 (佐藤)

今 $\varphi(x, \xi)$ が $(0, \xi)$ で positive type と
する。 $\varphi(x, \xi) = \sum x_j \varphi_j(x, \xi)$ ($\varphi_j(x, \xi)$ は
 ξ について positively homogeneous) と分解して

$$\int_{S^{n-1}} \frac{\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}}{(\varphi + i0)^n} \omega(\xi) = \frac{(-2\pi i)^n}{(n-1)!} \delta(x)$$

この公式により characteristic surface として
 $t=s$ で $\varphi(x, \xi)=0$ を通る物を考えよう。 Part II
§1 Th. 1.1. を initial data として

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} / \varphi^n \end{bmatrix}$$

を予えて用いよは"条件 (S) の下で" Lem 1.1. が
成立つことは明らかである。

従って前章系により, 適当な φ を選ぶことによ
り, そこを通る characteristic surface の
厚みを精密に調べられる。これには Nirenberg =
Treves [1] の方法が役に立つのでこれを次章以降で
(座標変換の)

検討しよう。

適当な実の座標変換により $t=0$ での initial data を $\langle x, \xi \rangle + i \sum x_j^2$ として与えた characteristic equation の solution $w(t, x)$ が、下の条件 (NT) の下に $t > 0$ x は $t < 0$ ($t \in \mathbb{R}$) において $\tilde{X}$ における原点のある近傍において $w(t, x) \neq 0$ とできることを証明する。このようにして条件 (NT) の下に基本解の構成は完了する。

(条件 NT) を述べる前に Nirenberg - Trèves に従って operator の normal form を求めておく。

$P_m(x, \xi)$ は simple characteristic とするから、
 $P_m(x, \xi) = Q(x, \xi)(\xi_{m+1} - a - ib)$ (a, b は positively homogeneous order 1) と仮定してよい。以下 ξ_{m+1} を α_{m+1} も α と書くことにする。この時

(条件 NT) $\mathcal{C}_{(0,0,\xi^0)}$ は $\tau - a(x, t, \xi^0)$ の bicharacteristic strip に沿って偶数次の零点を持つか、あるいは奇数次の零点を持つとする。そこで微係数は正 ($\neq 0$) である。ここで 0 は偶数と見なす。

次に座標変換により α を消すこととする。それは、Nirenberg Trèves [1] に実行されているか 復習しておこう。これは実際 $J(y/x)$ を $y = y(x)$ の Jacobian

matrix として.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y = J(y/x) \operatorname{grad}_\xi a(t, x, {}^t J(y/x) \xi^0) \\ y|_{t=0} = x \end{array} \right. \quad \text{を とけば } \delta u. \quad t=s \text{ として}$$

$(t, x) \mapsto (s, y)$ はもちろん 原点の 複素近傍での

解析的変換である. (原点の Jacobian = 1)

$\partial_s = 0$ とすれば.

$$\sigma = \tau - \langle \operatorname{grad}_\xi a(t, x, {}^t J(y/x) \xi^0, {}^t J(y/x) \eta \rangle$$

故に $\tau - a(t, x, \xi)$ は

$$\sigma - \tilde{a}(s, y, \eta) = a(x(y, s), s, {}^t J(y/x) \eta) -$$

$$- \langle \operatorname{grad} a(s, x(y, s), {}^t J(y/x) \xi^0, {}^t J(y/x) \eta \rangle$$

従って $\operatorname{grad}_\eta \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0$ 従って

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0 \quad \therefore \operatorname{grad}_y \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0 \end{array} \right.$$

さてこのような座標変換の後に $s=0$ で

$\tilde{w}(0, y) = i \langle \xi^0, y \rangle - \sum_{j=1}^N y_j^2$ なる初期値問題に対する

$$\partial_s \tilde{w}(s, y) = \tilde{a}(s, y, \operatorname{grad}_y \tilde{w}) + i b(s, y, \operatorname{grad}_y \tilde{w})$$

の解 (これは既に unique に存在すること は判っていること

(一階偏微分方程式の一般論により
(収束する))

に注意) $\tilde{w}$ の漸近展開を行い その最初の数項の
評価を行うことにより $\tilde{w}$ について p.6. で述べた性質

を証明する。即ち $\tilde{w}(s, y) = 1 \langle \xi_0, y \rangle - \sum y_j^2 + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(s, y)$ 但し $u_k(s, y)$ は y について k 次奇次多項式 $\tilde{w}$ を展開する。もちろん初期条件により $u_k(0, y) = 0$ ($\forall k$) である。同様に

$$l(s, y, \gamma) = \tilde{u}(s, y, \gamma) + \tilde{v}(s, y, \gamma) = \sum T_k(s, y, \gamma)$$

(T_k は y について k 次奇次, γ について 1 次奇次) と展開しておく。 $\partial/\partial s \tilde{w} = T(s, y, \text{grad}_y \tilde{w})$ の y についての展開の係数を比べよう。

$$(0) \quad \partial/\partial s u_0 = T_0(s, y, \xi^0 + \text{grad}_y u_1)$$

$$(1) \quad \partial/\partial s u_1 = T_1(s, y, \xi^0 + \text{grad}_y u_1) + \langle \text{grad}_y T_0(s, y, \xi^0 + \text{grad}_y u_1), \text{grad}_y u_2 - 2y \rangle$$

ここで $u_2(s, y)$ を known function と考えてよいから上の (0), (1) なる 微分方程式 の解の評価を行う。

即ち

$$\begin{aligned} d/ds u_1 &= T_1(s, y, \xi^0) + \langle \text{grad}_y T_0(s, y, \xi^0), \\ &\quad \text{grad}_y u_2 - 2y \rangle + \Phi_1(s, y, u_1) \quad (\Phi_1 \text{ は} \\ &\text{解析的}) \quad u_1 = \sum u_{1j} y^j \quad \text{とする。} \end{aligned}$$

$$\text{かつ } \Phi_1(s, y, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{よるに 定義により, } &\text{grad}_y T_0(s, y; \xi^0) \\ &= \text{grad}_y T(s, 0; \xi^0), \quad T_1(s, y, \xi^0) \\ &= \langle y, \text{grad}_y T(s, 0, \xi^0) \rangle \text{ 故} \end{aligned}$$

ここで $\text{grad}_y \tilde{a}(s, y, \xi^0) \equiv 0$, $\partial/\partial s \tilde{a}(s, y, \xi^0) \equiv 0$,

$\text{grad}_y \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0$ を思い出し

$$d/ds u_1 = i \langle y, \text{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi^0) \rangle$$

$$+ i \langle \text{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi^0), \text{grad}_y u_2 - 2y \rangle$$

$$+ \Phi_1(s, y, u_1). \quad \text{ここで } u_2 \text{ は } y \text{ について}$$

の 2 次斉次 多項式, $\Phi_1(s, y, 0) \equiv 0$ 故.

$$|d/ds u_{ij}| \leq C_0 \left(\sum_k |u_{ik}| + |\text{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi^0)| \right)$$

(の動(範囲))

(C_0 は y_k にのみ 依存.)

ここで 次の評価 (A) が 成り立つと 仮定しよう。(この評価 については後述)

(A) $\tau = a(t, x, \xi)$ の rich. strip の上で

$$|\text{grad } b|^2 \leq \text{const} |b|.$$

この仮定の下に.

$$|d/ds u_{ij}| \leq C_1 \left(\sum |u_{ik}| + |\tilde{b}(s, 0, \xi)|^{1/2} \right)$$

故に $|s| \ll 1$ とし

$$|u_{ij}| \leq C_2 \int_0^s |\tilde{b}(s', 0, \xi^0)|^{1/2} ds'$$

従って (条件 NT) $_{(0,0,0,\xi^0)}$ により,

$$\tilde{b}(s, 0, \xi^0) = -b_0 s^{k_0} + O(s^{k_0+1})$$

ここで (i) k_0 は 偶数, または (ii) k_0 が 奇数 なら

$$b_0 \leq 0.$$

38

よす case (i) の場合に話を進めよう。

$$|u_{ij}| \leq C_3 |s|^{(k_0+2)/2}$$

$$\therefore |u_i| \leq C_3'' |y| |s|^{(k_0+2)/2}$$

$$\leq C_3' |s|^{1/2} (|y|^2 + |s|^{k_0+1})$$

(0) により

$$|d/ds u_i| = T_0(s, y, \xi_0) + \langle \text{grad}_y T_0(s, y, \xi_0), \text{grad}_y u_i \rangle$$

$$+ O(|\text{grad}_y u_i|^2)$$

$$\therefore |d/ds u_0| + b(s, 0, \xi_0)$$

$$\leq |\langle \text{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi_0), \text{grad}_y u_i \rangle| + C_4 |\text{grad}_y u_i|^2$$

再(0) (A) により

$$\leq C_5 (|\tilde{b}(s, 0, \xi_0)|^{1/2} |s|^{k_0+2/2} + |s|^{k_0+2})$$

よす $\tilde{b}$ の展開により

$$= C_6 |s|^{k_0+1}$$

$$\therefore |u_0 - b_0' s^{k_0+1}| \leq C_7 s^{k_0+2}$$

$$\angle \text{III} \text{より } |u_2(s, y)| \leq C_8 |s| |y|^2$$

$$\therefore \tilde{w}(s, y) = i \langle \xi_0, y \rangle + \sum y_j^2 + u_0 + u_1 + u_2 + O(|y|^3)$$

$$\therefore |\tilde{w}(s, y) - i \langle \xi_0, y \rangle + \sum y_j^2 - b_0' s^{k_0+1}|$$

$$\leq \text{const.} \left\{ s^{k_0+2} + |s|^{1/2} (|y|^2 + |s|^{k_0+1}) + \underbrace{|s| |y|^2}_{+ |y|^3} \right\}$$

$$\leq \text{const.} (|y| + |s|^{1/2}) (|y|^2 + |s|^{k_0+1}) \quad (\because |s| \ll 1)$$

従って $\overline{w} = -i\omega$ を考えれば、これは characteristic equation の solution で、しかも $s=0$ で $\langle \xi, y \rangle + i \sum y_j^2$ かつ $\text{Im } w \geq C(\sum y_j^2 - b's^{k_0+1})$, 故に k_0 が偶数故 $b' > 0$ なら $s < 0$, $b' < 0$ なら $s > 0$ とすればよい。

しかも、今 $\lambda = 0$ で考えたけれど、 $\omega = \lambda' \neq 0$ を原点として考えれば、そこで ω の λ に関する展開の初項は $b'\lambda^{k_0}$ 故 $b' > 0$ なら $\lambda < \lambda'$, $b' < 0$ なら $\lambda > \lambda'$ としてよい。従って $\int_{\alpha}^t F(t, z, \lambda) d\lambda$ として

基本解を求めよう。

次に case (ii) を考えよう。この時

$b_0 > 0$ 故、 $\lambda' > 0$ ならそこで case (i) の $b' > 0$ の状況が適用されて、 $\int_0^t F(t, z, \lambda) d\lambda$ が well-defined.

又、 $\lambda' < 0$ ならそこで $b' < 0$ の状況が適用されてやはり

$$\int_0^t F(t, z, \lambda) d\lambda = - \int_t^0 F(t, z, \lambda) d\lambda \text{ が well-defined.}$$

従って $\int_0^t F(t, z, \lambda) d\lambda$ で基本解を求めよう。

よって (条件A) の検討が残るのみである。しかも (条件A) は 今迄述べて来た所より判るように、 k_0 が偶数で ≥ 2 の時にのみ確かめればよい。実際、 $k_0 = 0$ の時は問題なく、又 k_0 が奇数で、 $b_0 > 0$ の時には上のような評

価を必要としただけからである。しかるに k_0 が 2 以上の偶数であればこの条件が必ずしも成立することはない。Nirenberg-Treves [1] の Lem. 1.1 を用いて判る。以上により証明は終了。 $\square$

以上述べてきた所から 条件 (NT) の下で 基本解が構成された。従って

Th. 1.2. (x_0, ξ_0) の近傍で (NT) が成立していれば $P(x, D_x) u(x) = \mu(x)$ が とける。ここで

S.S. μ は (x_0, ξ_0) の十分小さい近傍に含まれるとする。

証明] $\mu(x) \in (C_M)_*$ は $(B_{S^*M} / \mathcal{A}_{S^*M})_*$ の元で表現されるから それに $\chi_I(x, \xi)$ (I は (x_0, ξ_0) の適当な nbd.) をかけることは well-defined であるから その元を $\mu_I(x, \xi)$ とし、これを $\mathcal{B}$ の flabbiness を用いて $\mu_I(x, \xi) = \mu_+(x, \xi) + \mu_-(x, \xi)$ とし $\text{Supp } \mu_+(x, \xi) \subset [\text{(NT) の条件中 } \mu \text{ の } s \text{ に関する展開の最初の項の係数が負の閉包}] \cap A_+$ $\text{Supp } \mu_-(x, \xi) \subset [\text{(NT) の条件中 } \mu \text{ の } s \text{ に関する展開の最初の項の係数が正の閉包}] \cap A_-$ とする。

上の分解を用いて $\varphi_+(z, \xi) \in \mathcal{D}'$
 $= \int F_+(z, y, \xi) \mu_+(y, \xi) dy$ と定めれば、

$F_+(z, y, \xi)$ の構成法により $\varphi_+(z, \xi)$ は $z \in \Omega$ (ie. (x_0, ξ_0) の $\tilde{X}$ における nbd.) において正則な超函数 (in ξ) である。 $\varphi_-(z, \xi)$ も同様にして定めて $\varphi(z, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_+(z, \xi) + \varphi_-(z, \xi)$ とすれば $\int \varphi(z, \xi) \omega(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} U(z)$ は $z \in \Omega$ で

正則故 その境界値を考えることが出来る。これを $u(x)$ とする。すると

$$P(z, D_z) U(z) = \iint \frac{1 + i \langle z - y, \xi \rangle}{(\langle z - y, \xi \rangle + i |z - y|^2)^n} (\mu_+(y, \xi) + \mu_-(y, \xi)) dy \omega(\xi)$$

$$= \iint \frac{1 + i \langle z - y, \xi \rangle}{(\langle z - y, \xi \rangle + i |z - y|^2)^n} \mu(y, \xi) dy \omega(\xi)$$

両辺は Ω で正則故 ここで境界値に移して

$$(x_0, \xi_0) \text{ の nbd. で } P(x, D_x) u(x) = \mu(x) \quad \text{Q.E.D.}$$

尚、今迄我々は Nirenberg Trèves 式 2 条件の与え方をしてきた。上の考察では その $k = \infty$ の case がまだ cover されていない。(近傍で $k = \infty$ ならも53ん

といけれど) 今度は $n=2$ の時には容易に判るように
 今回の理論で cover されるか $n \geq 3$ の時はまだうまく
 証明できない。ところで Nimberg Trèves 型
 の条件は実にうまいぎりぎりの所を挿え切ったもので
 あるが、naturalty の点でやや不満がある。これを
 補うものとして考えられたのが 佐藤の条件 (佐藤 [3]
 参照) であるが、これについて次の Th. が成り立つこと
 を注意しておく。

Th. 1.3 (佐藤の条件) $\Rightarrow P$ は (x, y) で
 "non solvable"

ここで (non) solvable の意味は次のように
 (少しずるいけれど) 定義する。

① $C \xrightarrow{P} C$ が solvable

$$\Leftrightarrow PE(x, y) = \delta(x - y) \text{ が } S.S.E \notin \{(0, \gamma)\}$$

としてとける。(但し γ は dy 座標)

証明は殆んど自明故省略する。ここで上のように
 parameter を入れて solvable を定義しないと
 一般には $\text{supp } \text{Cok } C^P$ が closed かどうか (少

なくとも *a priori* には) 不明故 上の σ の定義にも一理あるとの advice を柏原君から頂いた。

ここで 佐藤条件 と (NT) の条件 は多分 equivalent であろうと予想されることを 付記しておく。(但し 直接証明は かなり難しいであろう。)

さて 次に 正則性の問題については かなり問題は微妙で これには Nirenberg-Trèves 流の formulation 以外 今一考えつかない。(我々の間にあったある予想が最近 柏原君の反例により $n \geq 3$ の時崩れたので)。

正則性については A_+ , A_- の内点では 今迄述べてきた所で 証明は 済んでいるが $(x_0, \xi_0) \in \partial A_+$ の時は微妙で まだよく判らない。

ただ $n=2$ の時のみは, characteristic surface と bicharacteristic curve が一致すること等の 特殊事情のため 理論は 簡明になる。次頁以降でそのことを示す。 $n \geq 3$ の時のこの方法の拡張は 後田 [1] の拡張と 共に 現在 考えている所である。

$m=2$ の時の正則性定理

Th. 1.3. $m=2$ とする。この時

$$\begin{aligned} \text{Ker } C^P \ni (x_0, \xi_0) &\iff \exists k(x) \text{ s.t.} \\ P_m(x, \text{grad } k) &\equiv 0, \quad k(x_0) = 0, \\ \text{grad } k|_{x_0} &= \xi_0. \quad \text{Im } k \geq 0 \text{ if } \text{Re } k = 0 \end{aligned}$$

証明($\Rightarrow$)を行えばよい。 $x_0 = (0, 0)$ とする。

$x_1 = t, \quad x_2 = x$ とし、 x の複素座標を z で記す。対偶を証明するのであるが、それには k に関する条件を少し言いかえた形で行う。
上の仮定

$P_m(t, x, 1, 0) \neq 0$ が考えている所で成立しているとして一般性は失われない。又 $P(t, x, D)u = 0$ ならば、佐藤の基本Th. により、 $u = \sum_{j=1}^m u_j$ S.S. $u_j \in \{(t, x, \tau_j(t, x), \xi_j(t, x)) \mid P_m(t, x, \tau_j, \xi_j) = 0\}$, $Pu_j = 0$ としよう。ここで仮定より $\xi_j \neq 0$ である。今 $(\tau_1(0, 0), \xi_1(0, 0)) = \xi_0$ と仮定して u_1 が $(0, 0)$ の近傍で実解析的であることをいいた。今 $(0, 0, \xi_0)$ を通る characteristic curve の方程式 $k(t, z) = 0$ を z についてとき、 $z = \varphi(t)$ とする。 $\tau_1/\xi_1 > 0$ とする。

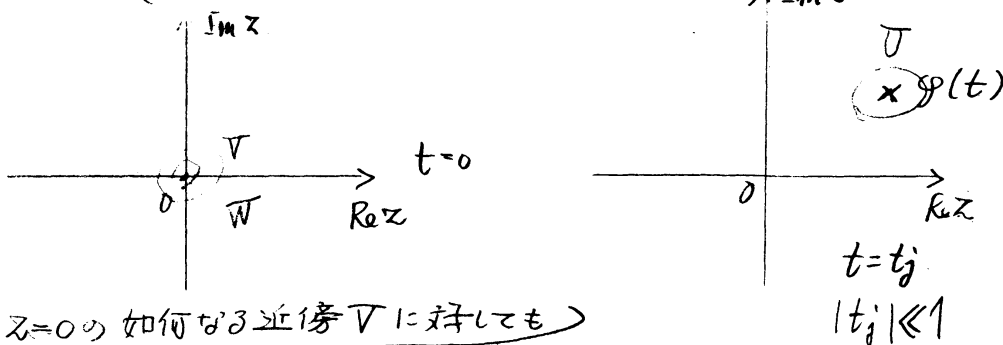
ここで我々は 次のことを証明する。

$$(R) \quad \exists t_j \rightarrow 0 \quad \text{s.t.} \quad \text{Im} \varphi(t_j) > 0$$

$$\Rightarrow S.S.U. \nmid (0,0)$$

実際 (R) が成り立つとしよう。

[図]



$z=0$ の如何なる近傍 V に対しても

($\varphi(t)$ の十分小さな近傍 U を考えれば,

$z \in U$ として (ε, z) を通る characteristic curves は ただ一本を除き $\{0\} \times V$ と

交わらないとよい。何故なら $t=\varepsilon$ で

$z_0 \in U$ を初期 data として Hamilton-Jacobi

の方程式をとき $t=0$ における z の値を

$z(z_0)$ とすれば, $z(z_0)$ は local homeo.

特に U を十分小とて homeomorphism として

よいからである。従つて Part II Th.1.1.1 によつて

($n=2$ 故に) $U(0, z)$ は V 上正則である。

($\because z_0 \in \partial U \Rightarrow z(z_0)$, which enters in V , never enters in $W \ni 0$)

逆に条件 (R) が成立たないならば 明らかに singular solution が存在する。

さて 条件 (R) を characteristic surface の言葉に言い直しておこう。

$k(t, x) = x - \varphi(t)$ 故 $\varphi(t) = \theta(t) + i\psi(t)$
 として $\exists t_j \rightarrow 0$ s.t. $\psi(t_j) > 0$ 一方

$\operatorname{Re} k(t, x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) とすると $x - \theta(t) = 0$

特に $t = t_j$ として $x_j = \theta(t_j)$ の時 $\psi(t_j) > 0$

即ち $\operatorname{Im} k < 0$ 言い換えれば $\exists (x_j, t_j) \rightarrow 0$
 s.t. $\operatorname{Re} k(t_j, x_j) = 0$ かつ $\operatorname{Im} k(t_j, x_j) < 0$

逆に $\operatorname{Re} k = 0$ かつ $\operatorname{Im} k < 0$ ならば $\psi(t) > 0$
 は明らか故 条件 (R) は characteristic surface の言葉で言い換えられた。

注意] この様に characteristic surface の言葉で regularity が記述できるのは $n=2$ の特殊性にかなり強く依存していることを最近 柏原君が反例により示した。

§2 基本解の正則性

この節では §1 で作られた基本解の正則性を調べる。この節の事実の証明は 柏原君の advice によりかなり短くなった。私の最初の証明は複素領域での analysis をもとに要した。柏原君に厚く感謝します。

Th. 2.1. $P_m(x, D)$ は real coefficients であるとする。この時 §1 で作られた基本解の $\text{sing. support} \neq S$, S, E は $\mathbb{R}^n$ の集合 S に含まれる。
(local には)

$$S = \Delta^n \cup \{(x, x', \xi, -\xi') \mid (x, \xi) \text{ と } (x', \xi') \text{ は同一の bicharacteristic strip に乗っていて } x_1 > x'_1\}$$

証明] 今 P_m は real coefficients としているから

$$E(x, x') = \int d\omega(\xi) \int_{x_1}^{x'_1} E(x, x', \xi, s) ds \quad \text{において}$$

$$S, S, E(x, x', \xi, s) \subset \{ \text{grad } \varphi \mid \varphi = 0 \}$$

としてよい。ここで φ は $x_1 = s$ で $\langle x - x', \xi \rangle$

となる characteristic equation の solution

$$\text{故. } \partial/\partial \xi_1 \varphi = (x - x'_1) \text{ 又. } \text{grad}_\xi \varphi|_{t=x_1} = x - x'$$

$$(\partial/\partial x_1 + \partial/\partial t) \varphi|_{t=x_1} = \xi_1, \quad \text{grad}_x \varphi|_{t=x_1} = -\xi$$

は明らかである。従って積分の正則性に関する

佐藤の補題 (佐藤 [1] p. 28 [2], [3]) を $\int d\omega(\xi)$ と $\int d\omega$ に適用すれば直ちに結果が得られる。実際半空間に入っていることは、

$\varphi(\xi, \eta) = 0$ として $x = x_1'$ 一方積分範囲から見て $x < x_1$ 故 $x_1' < x_1$ が従うからである。

注意] この定理により Part II §2. の結果が best possible であることが判る。

§3 Pseudodifferential operator の calculus について。
漸近展開とは何かを反省するとそれは formal power series の空間 (又はその部分空間) に適当な位相を入れて考察することの代数的表現であることがわかる。これと Fourier 変換とを結びつけることにより我々は自然に (スホクトル分解された) pseudodifferential operator の概念に到達する。これは、定義のみあって定理がないと言われてきた hyperfunction における pseudodifferential operator の概念 (佐藤 [1], [2]) に肉付けを与える物である。時間があれば pseudodiff. op. の可解性 その他に関する定理, 予想等を話したい。又基本解の構成もこの方法で可能であるか、詳しくは次回に譲る。

文献

- Hamada [1] PRIM. '69 p. 21~41
- Zerner [1] C.R. 250 (1960)
- Hörmander [1] Linear P.D.O. Springer
- [2] Conference at Tokyo. '69
- Volterra [1] Rivista di Matematica (1894) p.1~14.
- 河合 [1] To appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
- [2] '69. 11月 Symposium 報告集
- 佐藤 [1] 堅田シニホ・ジウム 報告集
- [2] ~~数学の~~歩み 15-1 (1970) p.9-72.
- [3] To appear
- Martineau [1] Math Annalen (Köthe 記念⁽⁵⁾)
- Schapiro [1] Bull. Soc. math. France (1969)
- 小松 [1] Conf. at Tokyo '69
- Nirenberg-Treves [1] C.P.A.M. '70-1.

追記

このシニホ・ジウム 後に、次の notes が出ておりますので
御参考迄。

- T. KAWAI. Proc. Japan Acad. 46 p. 912-916.
- M. Kashiwara and T. Kawai. " p. 1130-1134.

T. Kawai. Proc. Japan Acad. 47 p.19.-23

(このトト中 p.20. Th.1. 中の $P'(z, D_z)$ は

$$P'(z, D_z, D_s) \left(\frac{1}{i\hbar} P(z, D_s + D_{z_1}, D_{z_1}) - P(z, D_z) / D_s \right)$$

の誤りです。尚同上. 47.-2 の T. Kawai の

(To appear)

Construction of a local elem. sol. (II) を

御覧下さい。

更に Pseudo-diff. op. に 関した部分は 間もなく出
す 12月 Tokyo Symp. の報告集で 述べる 予定です。

尚本報告集, 今とまでは (1971年2月) 飽き足らぬ
部分も多いのです。私に 今 加筆訂正をする 持間の
余裕が 御座居ませんので 1971年3月のシンポジウムの私の
お話や 現在 準備中の "Construction of a local
elem. sol. for linear p.d.o. I, II." (上の Proc.
Japan Acad はその resumé です。) 及び 相原-河合
の (間もなく resumé のみは 出す予定) pseudo-diff. op.
についての 考察 等を 御覧頂ければ 有難く存じます。