

Subregular singularities in a symmetric space

都立大 理 関口 次郎

都立大 理 清水 保弘

$\mathbb{C}^3$ 内の次の代数曲面は、原点のみに孤立特異点を持ち、有理二重点と呼ばれている。これらの曲面は、特異点の *minimal resolution* の例外ファイバーのグラフが A , D , E 型の Dynkin diagram になることから興味を持たれてきた。

$$x^{l+1} + yz = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \quad A_l$$

$$x^{l-1} + xy^2 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \quad D_l$$

$$x^4 + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \circ - \circ - \circ - \circ \quad E_6$$

$$x^3y + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \quad E_7$$

$$x^5 + y^3 + z^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \quad E_8$$

この関係は、Lie 環との内在的關係を暗示しているが、実際、Brieskorn は、Nice Congress ('70) の報告で、有理二重点が、実際に対応する型の単純 Lie 環内に構成できることを示した。さらに、Slodowy [11] は、多重線分の現われる Dynkin 図形に対応する Lie 環 (B_l, C_l, F_4, G_2 型) で

も、Brieskorn の結果は成立することを示した。その際、
現われる特異点は次の式で表わされる。

$$B_{2l} : x^{2l} + y^2 + z^2 = 0 \quad (A_{2l-1} \text{ 型有理二重点})$$

$$C_\ell : x^\ell + xy^2 + z^2 = 0 \quad (D_{\ell+1} \quad " \quad " \quad " \quad)$$

$$F_4 : x^4 + y^3 + z^2 = 0 \quad (E_6 \quad " \quad " \quad " \quad)$$

$$G_2 : x^3 + y^3 + z^3 = 0 \quad (D_4 \quad " \quad " \quad , \quad)$$

そして、多重線分の Dynkin 図形は、一重線分のみの Dynkin 図形を“折り畳んで”得られると解釈すれば、上の結果は理解できることを示した。

ところで、有理二重点の versal deformation を考える：

$$A_\ell : x^{\ell+1} + yz + \xi_2 x^{\ell-1} + \xi_3 x^{\ell-2} + \dots + \xi_\ell x + \xi_{\ell+1} = 0$$

$$B_\ell : x^{2\ell} + y^2 + z^2 + \xi_2 x^{2\ell-2} + \xi_4 x^{2\ell-4} + \dots + \xi_{2\ell-2} x^2 + \xi_{2\ell} = 0$$

$$C_\ell : x^\ell + xy^2 + z^2 + \xi_2 x^{\ell-1} + \dots + \xi_{2\ell-2} x + \xi_{2\ell} = 0$$

$$D_\ell : \quad x^{\ell-1} + xy^2 + z^2 + \xi_2 x^{\ell-2} + \dots + \xi_{2\ell-4} x + \xi_{2\ell-2} + \xi_0' y = 0$$

$$E_6: \quad x^4 + y^3 + z^2 + \xi_2 x^2 y + \xi_3 x y + \xi_6 x^2 + \xi_8 y + \xi_9 x + \xi_{12} = 0$$

$$E_7 : x^3 y + y^3 + z^2 + \xi_2 x^4 + \xi_6 x^3 + \xi_8 x y + \xi_{10} x^2$$

$$+ \xi_{12} y + \xi_{14} x + \xi_{18} = 0$$

$$E_8 : \quad x^5 + y^3 + z^2 + \xi_2 x^3 y + \xi_8 x^2 y + \xi_{12} x^3 \\ + \xi_{14} x y + \xi_{18} x^2 + \xi_{20} y + \xi_{24} x + \xi_{30} = 0$$

$$F_4 : x^4 + y^3 + z^2 + \xi_2 x^2 y + \xi_6 x^2 + \xi_8 y + \xi_{12} = 0$$

$$G_2 : x^3 + y^3 + z^2 + \xi_2 xy + \xi_6 = 0$$

後に、この versal deformation のリストを単に「リスト」として引用する。

我々の出発点は、「リスト」の表示式が持つ、こゝの対称性 (symmetry) に注目することであつた。

A_l : $y \leftrightarrow z$ (変数の互換) で式は不変

D_l : $z \leftrightarrow -z$ (変数の符号反転) で式は不変

$E_l (l=6, 7, 8)$: $z \leftrightarrow -z$

B_l : $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow -x$

C_l : $z \leftrightarrow -z$ および $y \leftrightarrow -y$

F_4 : $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow -x$

G_2 : $z \leftrightarrow -z$ および $x \leftrightarrow y$.

Dynkin 図形が多重線を持つ、 B_l, C_l, F_4, G_2 型の場合では “本質的に異なる” symmetry が少なくとも 2 種類存在することは特に注目値する。

本稿は、Brieskorn-Slodowy 理論の類似を (局所) 対称空間上で展開し、これらの symmetry を Cartan involution を用いて説明することが目的である。

§ 1. Brieskorn - Slodowy 理論

以後、特に断わらない限り、 $\mathfrak{g}$ は複素単純 Lie 環、 G は $\mathfrak{g}$ の adjoint group (内部自己同型群)、 $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{g}$ の (1 つ固定した) Cartan 部分環、 l は $\mathfrak{g}$ の階数 $\text{rank}(\mathfrak{g}) (= \dim \mathfrak{f})$,

W は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ の Weyl 群とする。

$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ は、 $\mathfrak{g}$ 上の複素数値多項式関数全体のつくる環、
 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ は、 G -不変式全体のつくる部分環を表わす。同様に、 $\mathbb{C}[\mathfrak{f}]$, $\mathbb{C}[\mathfrak{f}]^W$ を定義する。 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の元を、 $\mathfrak{f}$ 上に制限することにより、準同型 $\text{rest}: \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{f}]$ を定義する。

定理 (Chevalley, Harish-Chandra)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathfrak{g}] & \xrightarrow{\text{rest}} & \mathbb{C}[\mathfrak{f}] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G & \xrightarrow{\text{rest}} & \mathbb{C}[\mathfrak{f}]^W \end{array} \quad \text{は可換図式であって、}$$

(i) $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \xrightarrow[\text{rest}]{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{f}]^W$ (algebra isomorphism)

(ii) $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ は、 $\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_\ell}$ ($\ell = \text{rank } \mathfrak{g}$) という、
 ℓ 個の代数的独立な斉次生成元を持つ (n_i は ξ_{n_i} の次数とする)。

$\xi_{n_1}|_{\mathfrak{f}}, \dots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{f}}$ は、 $\mathbb{C}[\mathfrak{f}]^W$ の代数的独立な斉次生成元になる訳だが、これは幾何的には、 $\mathfrak{f}/W$ が ℓ 次元アフィン空間 (A^ℓ) になることを示しており、 $\xi_{n_1}|_{\mathfrak{f}}, \dots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{f}}$ はその上の座標関数と考えられる。そこで、 $\mathfrak{f}/W$ の点と、座標 $(\xi_{n_1}|_{\mathfrak{f}}, \dots, \xi_{n_\ell}|_{\mathfrak{f}})$ とを同一視して次の写像を定義する。

定義 (invariant morphism)

$$\begin{array}{ccc} \chi: \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{f}/W \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longmapsto & (\xi_{n_1}(x), \dots, \xi_{n_\ell}(x)) \end{array}$$

invariant morphism χ は、 $\mathfrak{g}$ が A_ℓ 型単純 Lie 環 ($\ell(\ell+1, \mathbb{C})$) のときには、ちょうど固有方程式の係数を対応させる写像になる、というが、いくつか注意をしておく。まず、 χ は intrinsic には次のようにして定義される： $X = X_s + X_m$ を Jordan 分解とする (X_s は半単純部分, X_m は中零部分)。 $G \cdot X_s$ (X_s を通る G 軌道) は $\mathfrak{g}$ と何点かで交わるが、その交点は W の作用で互いに移り合うので、 X_s に対して、 $\mathfrak{g}/W$ の元 $\bar{X}_s$ が一意に定まる。そこで $\chi(X) = \bar{X}_s \in \mathfrak{g}/W$ が invariant morphism を表わすのである。 $\sum a_i(X) = \sum a_i(\bar{X}_s)$ と考えられるので、これを座標表示したものが、前ページに与えた定義に他ならない。

$0 \in \mathfrak{g}/W$ の逆像 $\chi^{-1}(0)$ は、 $\mathfrak{g}$ の中零元 (nilpotent element) 全体 $N(\mathfrak{g})$ と一致している。

さて、 $N(\mathfrak{g})$ については、次の結果が得られている。

定理 (Kostant)

$$X \in N(\mathfrak{g}) \Rightarrow \dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = \ell + 2k \quad (k=0,1,2,\dots)$$

$$\text{すなわち } Z_{\mathfrak{g}}(X) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\} \text{ とする。}$$

$\dim Z_{\mathfrak{g}}(X)$ は、 X を通る G 軌道 $G \cdot X$ の $\mathfrak{g}$ 内での余次元と考えられる。

さらに、注目すべき中零元の族が2つある。それは次の結果をもとに定義される。

定理 (Kostant, Steinberg, Dynkin)

- (i) $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = \ell$ なる $X \in N(\mathfrak{g})$ は存在し、かつ、かかる X の全体は単一の G -軌道をなす。
- (ii) $\dim Z_{\mathfrak{g}}(X) = \ell + 2$ なる $X \in N(\mathfrak{g})$ は存在し、かつ、かかる X の全体は単一の G -軌道をなす。

(i) を満たす nilpotent element を regular nilpotent element とよび、その全体を (単一の G -軌道)、 $N_r(\mathfrak{g})$ で表わす。(ii) を満たすものを subregular nilpotent element とよび、その全体 (単一の G -軌道) を $N_{s.r.}(\mathfrak{g})$ で表わす。

これらの準備の後に、Brieskorn-Slodowy の結果は次のように定式化される。

定理 (Brieskorn-Slodowy)

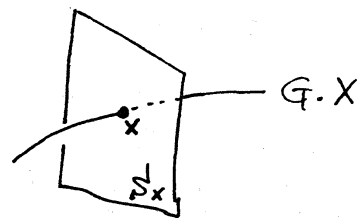
$\mathfrak{g}$ を $A_\ell \sim G_2$ いずれかの型の単純 Lie 環とし、 $X \in N_{s.r.}(\mathfrak{g})$ を任意にとり、 S_X を X における $G \cdot X = N_{s.r.}(\mathfrak{g})$ への transversal slice (後注) とする。また $\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/W$ を invariant morphism とし、 χ の S_X への制限を χ_{S_X} で表わす。このとき

- (i) $\chi_{S_X}^{-1}(0) = S_X \cap N(\mathfrak{g})$ は、 $\mathfrak{g}$ に対応する型の「リスト」の有理二重点 ($\xi=0$ としたもの) に biholomorphic である。
- (ii) $\xi = (\xi_{m_1}, \dots, \xi_{m_\ell}) \in \mathfrak{g}/W$ に対し、 $\chi_{S_X}^{-1}(\xi)$ は (i) に対する「リスト」の versal deformation に biholomorphic である。

(注) S_x は次のように構成される。まず、 X における G -軌道 $G \cdot X$ への接空間 $T_x(G \cdot X)$ は $\{[X, Y] \mid Y \in \mathfrak{g}\}$ と同一視できるので、 $\mathfrak{g}$ におけるその

補空間 N_x を一つとり、アフィン

部分空間 $S_x = x + N_x$ を構



成する。 S_x は必要ならば、 x のまわりの近傍だけに限、

て考察する場合もあり得る。そのときには、定理の (i)(ii)

の主張は、「biholomorphic」を「locally biholomorphic」に置き換えればよい。

§2. 局所対称空間, Cartan involution

$\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 環, θ を $\mathfrak{g}$ の位数 2 の自己同型とする。

$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$, $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$ とお

くと、 $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分環, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の (部分環ではない) 部分空

間となり、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は直和分解を与える。この分解を複

素化された Cartan 分解とよび、 θ を複素化された Cartan

involution, $\mathfrak{p}$ を複素化された局所対称空間とよぶ。

Remark : 通常の 実 単純 Lie 環の Cartan 分解については

Helgason [7] を参照。ここでの状況では、 $\mathfrak{k}$ が非コンパクト型実 Lie 環の複素化にな、てい

る場合も含めて考えてしま

う。また、局所対称空間という用語は、まだ広くは用いら

ていないが、 $\mathfrak{g}$ の adjoint group G の、 $\mathfrak{k}$ に対応する analytic

subgroup を K とするとき、複素化された対称空間 G/K の単位元 (の剰余類) における接空間と $\mathfrak{p}$ とが同一視できることから用いる。以後、煩わしいので「複素化された」という形容は省くが、誤解なきよう。大切な状況は、 G の $\mathfrak{g}$ への adjoint action を K に制限することで、 K は $\mathfrak{p}$ に作用することである。我々は「 $K \curvearrowright \mathfrak{p}$ 」という状況で、Brieskorn と Slodowy の結果に相当するものを考えたい。ただし、一般の $\mathfrak{g}$ ではまだ不明で、 $\mathfrak{g}$ に非常に似ている $\mathfrak{p}$ として次の概念を想定する。

定義 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とするとき、 $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分環 $\mathcal{O}$ が、 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環になっているならば、この分解 (あるいは局所対称空間 $\mathfrak{p}$) を normal type であるという。

補題 1 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が normal type の Cartan 分解ならば、 $\dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{k} = \text{rank}(\mathfrak{g}) = \ell$ 。

まず、 $\mathfrak{p}$ 内の nilpotent element というものを考える必要があるが、それについては、次の結果を得る。

補題 2 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を normal type の Cartan 分解とする。このとき、

$$(i) \quad N_r(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset, \quad N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$$

$$(ii) \quad \forall X \in N_r(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} \text{ に対して}$$

$$\dim Z_{\mathfrak{k}}(X)=0, \quad \dim Z_{\mathfrak{p}}(X)=\ell$$

(iii) $\forall X \in N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ に対して

$$\dim Z_{\mathfrak{k}}(X)=1, \quad \dim Z_{\mathfrak{p}}(X)=\ell+1$$

$$\text{すなわち、} Z_{\mathfrak{k}}(X)=\{Y \in \mathfrak{k} \mid [X, Y]=0\}, \quad Z_{\mathfrak{p}}(X)=\{Y \in \mathfrak{p} \mid [X, Y]=0\}$$

補題2は、§1の Kostant の結果に相当するもので、証明は (ii), (iii) については、補題1と、Jacobson-Morozov の補題を用いてなされる。(i)については、残念ながら case by case でしか証明ができていない。

Remark: ① 補題2で、normal type という仮定ははずせない。実際、normal type でない局所対称空間 $\mathfrak{p}$ であって、 $N_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ かつ $N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ となる例がある。

② $N_{r.}(\mathfrak{g})$, $N_{s.r.}(\mathfrak{g})$ が各々、単一 G -軌道であつたのに対し、一般に $N_{r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$, $N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ は(空でなければ)いくつかの K -軌道に分解する。実際、 $\mathfrak{g}$ が B_e , C_e , F_4 , G_2 型のいずれかで、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が normal type の Cartan 分解のときには、 $N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ は少なくとも2つの K -軌道に分かれることが、後に示される。

補題3 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を normal type の Cartan 分解とする。 $X \in N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ について、 X における $G \cdot X$ への(局内での) transversal slice $S_X = X + N_X$ が存在して、次を満たす：

- (i) S_x は $(-\theta)$ -stable, こゝに $(-\theta)$ は Cartan involution θ に負符号をつけたもの。
- (ii) $\dim N_x \cap \mathfrak{k} = \operatorname{codim}_{S_x} (S_x \cap \mathfrak{p}) = 1$
- (iii) $S_x \cap \mathfrak{p}$ は、 X における $K \cdot X$ への ($\mathfrak{p}$ 内での) transversal slice を与える。
- (iv) S_x 内に座標系 $(\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}, \mu)$ がとれて、
 $(-\theta)|_{S_x} : (\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}, \mu) \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}, -\mu)$
 とできる。こゝに $\dim S_x = l+2$ 。

この補題3が symmetry を説明する Key point になる。

証明は補題2を用いる。

§3. subregular singularities in $\mathfrak{p}$

この節を通じて、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ は normal type の Cartan 分解とする。 θ を Cartan involution とする。normal type の定義から、Cartan 部分環 $\mathfrak{k}$ を $\mathfrak{p}$ 内にとれるので、そのようにとって 1 を固定する。 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ についての Weyl 群を W とする。 $\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k}/W$ を invariant morphism とし、 χ の $\mathfrak{p}$ への制限も同一の記号で表わす: $\chi: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}/W$ 。

我々の主定理は次の3つである。

定理1 次のような $X \in N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ が存在する:

補題3をみたす transversal slice S_x をとるとき、 $(-\theta)|_{S_x} : (\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}, \mu) \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}, -\mu)$ は、「リスト」にある

$\mathfrak{g}$ に対応する型の versal deformation の symmetry
 $y \leftrightarrow z$ ($\mathfrak{g}$ が A_ℓ 型の時), $z \leftrightarrow -z$ ($\mathfrak{g}$ が $B_\ell \sim G_2$ 型の時)
 を、各 fiber $\mathcal{X}_{S_x}^{-1}(\xi)$ 上でひきおこす。ここで、 ξ は
 $\mathfrak{g}/W$ の元で、 $\mathcal{X}_{S_x}$ は $\mathcal{X}$ の S_x への制限とする。

定理2 $\mathfrak{g}$ が B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2 型のいずれかとする。このとき、
 定理1の X とは、相異なる K -軌道に属する $Y \in N_{s.r.}(\mathfrak{g})$
 $\cap \mathfrak{p}$ が存在して、次をみたす： 定理1のように transversal
 slice S_Y をとるとき、 $(-\theta)|_{S_Y} : (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}, \mu) \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1}, -\mu)$
 は、「リスト」にある $\mathfrak{g}$ に対応する型の versal deformation
 の symmetry $x \leftrightarrow -x$ (B_ℓ, F_4 型), $y \leftrightarrow -y$ (C_ℓ 型),
 $x \leftrightarrow y$ (G_2 型) を、各 fiber $\mathcal{X}_{S_Y}^{-1}(\xi)$ 上でひきおこす。

これらの定理の証明には、補題3 および、Slodowy [11],
 Bala-Carter [4], Elkington [6] の結果を用いる。また、
 $\mathfrak{p}$ が $(-\theta)$ の fixed point set であることから、容易に次の
 結果を得る (定理1, 2の系として)。

定理3 次のような $X \in N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ が存在する： X に
 おける ($\mathfrak{p}$ 内での) $K \cdot X$ への transversal slice $\tilde{S}_X$ を適当
 にとり、 $\chi: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{g}/W$ invariant morphism の制限 $\chi|_{\tilde{S}_X}$ を $\mathcal{X}_{\tilde{S}_X}$ と書くと
 き、 $\xi \in \mathfrak{g}/W$ に対し、 $\mathcal{X}_{\tilde{S}_X}^{-1}(\xi)$ は、次の曲線特異点の versal
 deformation と biholomorphic である： (左に $\mathfrak{g}$ の型を書く)
 A_ℓ : $x^{\ell+1} + y^2 + \xi_2 x^{\ell-1} + \dots + \xi_\ell x + \xi_{\ell+1} = 0$

$$B_\ell : \textcircled{1} x^{2\ell} + y^2 + \xi_2 x^{2\ell-2} + \xi_4 x^{2\ell-4} + \dots + \xi_{2\ell-2} x^2 + \xi_{2\ell} = 0$$

$$\textcircled{2} y^2 + z^2 + \xi_{2\ell} = 0$$

$$C_\ell : \textcircled{1} x^\ell + xy^2 + \xi_2 x^{\ell-1} + \dots + \xi_{2\ell-2} x + \xi_{2\ell} = 0$$

$$\textcircled{2} x^\ell + z^2 + \xi_2 x^{\ell-1} + \dots + \xi_{2\ell-2} x + \xi_{2\ell} = 0$$

$$D_\ell : x^{\ell-1} + xy^2 + \xi_2 x^{\ell-2} + \dots + \xi_{2\ell-4} x + \xi_{2\ell-2} + \xi_{2\ell}' y = 0$$

$$E_6 : x^4 + y^3 + \xi_2 x^2 y + \xi_5 xy + \xi_6 x^2 + \xi_8 y + \xi_9 x + \xi_{12} = 0$$

$$E_7 : x^3 y + y^3 + \xi_2 x^4 + \xi_6 x^3 + \xi_8 xy + \xi_{10} x^2 + \xi_{12} y + \xi_{14} x + \xi_{18} = 0$$

$$E_8 : x^5 + y^3 + \xi_2 x^3 y + \xi_8 x^2 y + \xi_{12} x^3 + \xi_{14} xy + \xi_{18} x^2 + \xi_{20} y + \xi_{24} x + \xi_{30} = 0$$

$$F_4 : \textcircled{1} x^4 + y^3 + \xi_2 x^2 y + \xi_6 x^2 + \xi_8 y + \xi_{12} = 0$$

$$\textcircled{2} y^3 + z^2 + \xi_8 y + \xi_{12} = 0$$

$$G_2 : \textcircled{1} x^3 + y^3 + \xi_2 xy + \xi_6 = 0$$

$$\textcircled{2} x^3 + z^2 + \xi_2 x^2 + \xi_6 = 0$$

注目すべきは、normal type の局所射影空間 $\mathbb{P}^3$ (K の作用の下で) での Brieskorn-Slodowy 理論に類似のものを考えると、曲線の特異点とその versal deformation が得られるということである。さらに、 $\mathbb{P}^3$ が B_ℓ, C_ℓ, F_4, G_2 型るときには、subregular nilpotent element のとりおにより少なくとも2つの曲線特異点が生ずることである。実際、これら2つ(①, ②で表示)の Milnor 数は異なるので、biholomorphic な変数変換では互いに移れなくて、このことから、少なくとも2つの subregular nilpotent K-orbit が $\mathbb{P}^3$ 内に存

在することが結論されるのである。

§4. 予想と展望

定理3は、Lie環での Brieskorn-Slodowy の定理に比べると若干弱い形であるが、その原因は、 $\mathfrak{p}$ における nilpotent K -軌道の構造論が、1980年7月現在不備なことによる。次のことは、多分正しいと予想され、これらが確認されれば、定理3は、もっと強い形にできるはずである。

予想 $\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie環, G を $\mathfrak{g}$ の adjoint group, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を normal type の Cartan 分解, K を $\mathfrak{k}$ に対応する G の analytic subgroup とする。このとき、

(i) 任意の $X \in N(\mathfrak{g})$ について、 $G \cdot X \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$

(ii) $\mathfrak{g}$ が、 A_2, D_2, E_2 型るときには、(i)の $G \cdot X \cap \mathfrak{p}$ は単一の K -軌道からなる。

(iii) $\mathfrak{g}$ が、 B_2, C_2, D_2, G_2 型るときには、

① $N_r(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ は単一の K -軌道からなる。

② $N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ は、2個の K -軌道からなる。

Remark: 予想(i)は、 $\mathfrak{g}$ が A_2 型るときには、正しい。

さて、versal deformation (「リスト」) の symmetry という概念は、現段階では熟したものとはいえず、もしも、うまく定式化できて、かつ「同値」の概念がうまく定義できれば、symmetry の「同値類」と、 $N_{s.r.}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p}$ 内の K -

軌道は、1対1, onto に対応すると考えられる。予想が正しいければ、定理1, 2の symmetry 以外には、symmetry の“同値類”は存在しないと考えられる。

また、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$ が、normal type でない Cartan 分解の場合には、“ $\mathfrak{p}$ 内の subregular nilpotent element”をいかに定義するかは考慮の余地があるが（一般に $N_{sr}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ ）、「nilpotent K -軌道の中で、二番目に generic なもの」ととらえれば、次の例がある。 $\mathfrak{p}$ が、複素化された対称空間 $SO(n+1, \mathbb{C}) / SO(n, \mathbb{C}) \oplus SO(1, \mathbb{C})$ 【Cartan のリストでは BDI 型 rank 1 の場合 cf. Helgason [7]】に対応するとき、“subregular singularity”としては、 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$ という $(n-1)$ 次元超曲面を得る。その他にも、もう一つ、多変数の特異点の例が知られている。このように、局所対称空間での Brieskorn-Slodowy 理論では、特異点を有理二重点（これは2次元）として捉えることは多分不適で（normal type のときには、すでに1次元になった！）、代わりに、V.I. Arnol'd が提起した単純特異点（これは多変数でも同様に定義できる。cf. [1]）という形で捉えるべきではないかと思われる。これについて言えば、 B_2, C_2, F_4 (G_2) 型での現象は、Arnol'd の最近の論文 [2], [3] と関連しているように思える。

参 考 文 献

- [1] V. I. Arnol'd : Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities (Functional Analysis and its Application, Vol. 6, 1972, pp. 254-272)
- [2] V. I. Arnol'd : Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k and F_4 and singularities of evolutes (Russian Mathematical Surveys, Vol. 33, 1978, pp. 99-116 (No. 5))
- [3] V. I. Arnol'd : Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. (Russian Math. Surveys, Vol. 34, 1979, pp. 1-42 (No. 2))
- [4] P. Bala and R. W. Carter : Classes of unipotent elements in simple algebraic groups I, II (Math. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 79, 1976, pp. 401-425 ; Vol. 80, 1976, pp. 1-18).
- [5] E. Brieskorn : Singular elements of semi-

- simple algebraic groups (Actes, Congrès intern. Math. 1970. Tome 2, pp. 279-284).
- [6] G.B. Elkington : The centralizers of unipotent elements in semisimple algebraic groups (Journal of Algebra Vol. 23, 1972, pp. 137-163)
- [7] S. Helgason : Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. (Academic Press)
- [8] B. Kostant : The principal three-dimensional subgroups and the Betti numbers of a complex simple Lie group (Amer. J. Math. Vol. 81, 1959, pp. 973-1032).
- [9] B. Kostant : Lie group representations on polynomial rings (Amer. J. Math. Vol. 85, 1963, pp. 327-404)
- [10] B. Kostant and S. Rallis : Orbits and representations associated with symmetric spaces (Amer. J. Math., Vol. 93, 1971, pp. 753-809)
- [11] P. Slodowy : Einfache Singularitäten und einfache algebraische Gruppen (Regensburger Math. Schriften 2, 1978)

- [12] R. Steinberg : Conjugacy classes in
Algebraic Groups (Lecture Note in Math.
No. 366 , Springer-Verlag)
- [13] E. B. Dynkin : Semisimple subalgebras of
semisimple Lie algebras (Amer. Math.
Soc. Trans. (2) , Vol. 6 , 1957 , pp. 111-244)

以上。

1980年7月。