

代数多様体の分類の基本設定

(双有理写像, γ と κ .)

東大 理 飯高 茂

1. 代数多様体の双有理分類理論は, イタリヤ学派による代数曲面の分類とその祖型として持つ. 次元について, 基本的な, 双有理不変数は, 代数多様体の小平次元である. 小平次元の持つ, 簡明で基本的な性質は, 80年代の後半に到りて漸く証明されはいる, この数年間の進歩はまことに著しいものである.

小平次元の初等的な性質を述べた3つの定理, 即ち, ファイバリング定理, 弱加法性, 複素不変性, の証明は, 勿論1970年にできてはいたが, 決して満足するものではなかった. しかし, 1979年に当時学部生である, 角田は簡単で見通し, よい証明の仕方を筆致した. それは, 正規多様体 V の $A(V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ の商体の超越次数を利用するもので, D :次元よりも更に基礎的なものとみなされる. 角田理論を紹介し始める.

2. まず, 強有理写像 $f: V \rightarrow W$ の定義の復習から始める.
 3. 有理写像 $f: V \rightarrow W$ は, そのグラフ $\Gamma_f \subset V \times W$ が V への射影 $p: \Gamma_f \rightarrow V$ が固有正則写像になるとき, 強有理 (strictly rational) とよばれる.

命題 (1) $f: V \rightarrow W \times g: W \rightarrow U$ を強有理写像で, かつ, 合成可能とする. このとき $g \circ f: W \rightarrow U$ も強有理である.

(2) $f: V \rightarrow W$ を双有理写像とする.

f を固有双有理とすると, f, f^{-1} とともに強有理. 又逆も成立する.

(3) $f: V \rightarrow W$ を有理写像, $g: W \rightarrow U$ を正則写像, かつ $g \circ f$ も正則写像とする. g を固有とすると, f は強有理になる.

(1), (2) の証明は省略.

(3) を示す. $V \times_U W = \text{Ker} (V \times W \rightrightarrows \frac{V}{W} \rightrightarrows U)$ は $V \times W$ の閉部分. よって $\Gamma_f \subseteq V \times_U W$ になる. $g: W \rightarrow U$ が固有のため, $V \times_U W \rightarrow V$ も同様. よって $\Gamma_f \rightarrow V$ も固有的. $\square$

定理 1. $f: V \rightarrow W$ を強有理写像とする. V を正規多様体とすると,

(i) $\text{codim}(V \setminus \text{dom}(f)) \geq 2$. すなわち $x \in V$ について,

(ii) $f(x)$ は空でない, 連結の固有スキーム.

証明は省略するが, この定理こそ, 強有理字系の最も基本的な事実であることに注目したい.

系. $f: V \rightarrow W$ を強有理字系とし, V, W を正規とする.
 と, f^* は $A(W)$ から $A(V)$ への字系となる.

ここには $A(V) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ であり, $A(V) = \text{Hom}(V, A^1)$ とも見られる.

系の証明. $\psi \in A(W)$ とする. $\psi \circ f: V \rightarrow A^1$ も強有理だから, $\text{codim}(V - \text{dom}(\psi \circ f)) \geq 2$. 一方, この補題によれば, $V = \text{dom}(\psi \circ f)$. 則ち, $\psi \circ f \in A(V)$. 定義より $f^*(\psi) = \psi \circ f$. □

補題1. V を正規多様体, $F \subset V$ の閉集合で, $\text{codim}(F) \geq 2$ とする. このとき, $A(V \setminus F) = A(V)$.

これは, Krull の正規 Noether 環の定理「 A を Noether 整域とするとき, $A = \bigcap_{\text{ht}=1} A_{\mathfrak{p}}$ 」の幾何的書き換えである.

系により, $f: V \rightarrow W$ が固有双有理なとき, $A(V) \cong A(W)$.
 (ただし, V と W が正規のとき) 即ち, 正規多様体と求むる限り, $A(V)$ は固有双有理不変と表えられる.

3.27. V に対して, $\pi_V: V \rightarrow \text{Spec } A(V)$ が定まる.

$f: V \rightarrow W$ を強有理, V, W を正規とするとき, $\alpha_f^*: \text{Spec } A(V) \rightarrow \text{Spec } A(W)$ を与える. 勿論これは可換:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } A(V) & \longrightarrow & \text{Spec } A(W) \end{array}$$

$\text{Spec } A(V)$ の生成点を x とすると, $\Psi^*(x) \neq \emptyset$. したがって, $\text{Rat}(\Psi^*(x)) = \text{Rat}(V)$.

補題 2. $f: V \rightarrow \text{Spec } R$ を支配的正规写像, $0 \neq S \subseteq R$ を乗法系とするとき, $S^*V = V \otimes_R S^*R$ とおくと,
 $A(S^*V) = S^*A(V)$.

ここで $R = A(V)$, $S = R \setminus \{0\}$ に用いると,
 $A(\Psi_V^{-1}(x)) = S^*A(V) = Q A(V)$ をえる. さらに, V を正規とすると, $A(V)$ も正规環で, $\text{Rat}(V)$ 内に於て, 代数的に閉じている. なぜなら, $A(V)$ の $\text{Rat}(V)$ 内整閉包を B とすると, 有理写像 $h: V \rightarrow \text{Spec } B$, 正规写像 $\varphi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A(V)$ を与える. $\Psi_V = \varphi \circ h$ となる.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{h} & \text{Spec } B & \xrightarrow{\varphi} & \text{Spec } A(V) \\ & & & \searrow \varphi & \\ & & & \Psi_V & \end{array}$$

φ は固有だから、 k は双有理。さらに、 $k(x) \subseteq \bar{\varphi}^1(\Psi_V(x))$ だから、 $k(x)$ は有限。よって、定理により、 $k(x) = 1$ 点。このとき k は正則になる。即ち、 $\psi: \text{Spec } A(V) \rightarrow \text{Spec } B$ があり、 $k = \gamma \circ \Psi_V$ 。 $\Psi_V: V \rightarrow \text{Spec } A(V)$ の γ -普遍性により、 ψ は同型となる。 $\square$

定理 2. $\Psi_V: V \rightarrow \text{Spec } A(V)$ は支配的で、 γ を生成する。 γ は $\Psi_V^{-1}(*)$ を F とおくと、 $QA(V)$ 上の多様体として既約であり、 $A(F) = QA(V)$ になる。

さて、 V を正則多様体とし、 V の基礎体を k とすると、 $k \subseteq A(V) \subseteq \text{Rat}(V)$ である。 $A(V)$ の商体を $QA(V)$ と書き、これの k 上の超越次元を $\gamma(V)$ と書く。即ち $\gamma(V) = \text{tr. deg}_k QA(V)$ 。

上記の定理の F は $QA(V)$ 上の多様体とみれるから $\gamma(F) = 0$ 。 $\gamma(V)$ の概念は簡単であり、有用な性質をもつ (角田により、1979 年に導入された)。定義により $0 \leq \gamma(V) \leq \dim V$ 。 V がアフィンならば $\dim V = \gamma(V)$ 。又、 V が完備ならば $A(V)$ は k 上代数的になり、 $\gamma(V) = 0$ 。 $\gamma(\text{Spec } A(V)) = \dim(A(V)) = \gamma(V)$ であり、定理は、 V が Ψ_V により、 $\gamma(F) = 0$ をアフィンと (、 $\gamma(W) = \dim W$ を満たす W を底とする アフィン空間

間の構造を持つことを意味している。

一般に $\gamma(V \times W) = \gamma(V) + \gamma(W)$ が成立している。

定理3. $f: V \rightarrow W$ を支配的写像とし、 γ の一般ファイバ
 $f^{-1}(*)$ を既約とし、 F とおく。すると、

$$\gamma(V) \leq \gamma(F) + \dim W \quad \text{が成立する。さらに、}$$

W がアフィンなら、

$$\gamma(V) = \gamma(F) + \gamma(W) = \gamma(F) + \dim W.$$

証明. W がアフィン多様体 $\text{Spec } R$ のとき、 $S = R - \{0\}$ とすると、 $F = S^{-1}V$ だから、補題により、 $A(F) = S^{-1}A(V) \subseteq \text{Rat}(V)$. $L = Q(R)$, $M = \text{Rat}(W)$ とおけば、 $\gamma(F) = \text{tr. deg}_L QA(F)$. $QA(F) = QA(V)$ になり、 $k \subseteq L \subseteq QA(V)$. ゆえに、

$$\gamma(F) + \gamma(W) = \text{tr. deg}_k L + \text{tr. deg}_L M = \text{tr. deg}_k M = \gamma(V).$$

一般の場合、 W のアフィンの開部分集合 ($\neq \emptyset$) W_α をとると、 $\gamma(V) \leq \gamma(f^{-1}(W_\alpha))$. 上で示したことにより、 $\gamma(f^{-1}(W_\alpha)) = \gamma(F) + \dim W_\alpha = \gamma(F) + \dim W$. □

このように簡単なものでも、 γ についての加法性が鮮やかに成立していることに注目してほしい。

定理4. $f: V \rightarrow W$ を固有全射正則写像とし、 V, W を正規とすると、 $A(W) \rightarrow A(V)$ は整拡大. よって $\gamma(W) = \gamma(V)$.

証明. Stein 分解により, f を有限正則と仮定できる. W の
 アフィン被覆 $\{W_\alpha\}$ をとり $V_\alpha = F(W_\alpha)$ とおく. $A_\alpha = A(W_\alpha)$
 $\subseteq B_\alpha = A(V_\alpha)$ は整拡大である. $\varphi \in A(V) = \bigcap_\alpha A_\alpha$ をとり,
 $\text{Rat}(W)$ 上既約でモニックな φ を根にもつ多項式 $F_\varphi(T)$ をと
 る. すると, 次の補題により, $F_\varphi(T) \in A_\alpha[T]$ かわれる. さ
 らに, $\bigcap_\alpha A_\alpha[T] = A(W)[T]$ が成立するから $F_\varphi(\varphi) = 0$ に
 より, φ は $A(W)$ 上整になる. $\square$

補題 3 $R \in \text{Noether 正規環}$ とし, $F[T] \in R[T]$ をモニ
 ックな, かつ $R[T]$ の元として既約な多項式とする. すると,
 $Q(R)$ 上既約である.

証明は $R = \bigcap_{\text{ht } \mathfrak{p}=1} R_{\mathfrak{p}}$ により各 DVR $R_{\mathfrak{p}}$ について見ればよ
 く, この時はよく知られている.

以上の定理を, ファイバー定理, 加法定理, 被覆 (不変
 の) 定理 とよぶ. これを基にして, D -次元についての同様の
 3 定理; 小平次元, 代数的小平次元についても同様の定理
 が定式下され証明が行われる.

4. V を完備正則の代数多様体とする. D を V 上の正因子とし

$V_0 = V \setminus D$ とおくとき,

$$A(V_0) = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_V(mD).$$

ここに $L_V(D) = \{ \psi \in \text{Rat}(V) \mid \psi = 0 \text{ on } D \text{ or } \text{div}(\psi) + D \geq 0 \}$

とおいた. $l(mD) = \dim_{\mathbb{C}} L_V(mD)$ (以後 $\mathbb{C}$ は $\text{Rat}(V)$ 内で代数的に閉としておく) とする. $l(mD)$ の漸近式の係数として $\chi(V_0)$ をおける事をみよう.

$L_V(mD)$ の生成する $\text{Rat}(V)$ の部分体を Q_{mD} で示す. すなわち,

$$QA(V_0) = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_{mD} \quad \rightsquigarrow \quad Q_D \subseteq Q_{2D} \subseteq \dots$$

だから, 体論の定理により m_1 が存在し, $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_{mD} = Q_{m_1 D}$.

ゆえに $QA(V_0) = Q_{m_1 D}$.

一般に $A(V_0)$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成ではない (Zariski). しかしその商体 $QA(V_0)$ は, 有限生成の体 $Q_{m_1 D}$ なのである.

$L_V(mD)$ の定める有理多線型 W_{mD} 又は W_m を示し, $W_m = W_m(V)$ の閉包, とおけば, $\text{Rat}(W_m) = Q_m$ ゆえに,

$$QA(V_0) = Q_{m_1} = \text{Rat}(W_{m_1}).$$

従って, W_{m_1} は $QA(V_0)$ の幾何的モデルとして最適なものである.

$$\chi(V, D) = \max_m \{ \dim W_m \} = \dim W_{m_1}$$

を, V の D 次元とよぶ. ゆえに $\dim W_{m_1} = \text{tr deg } QA(V_0)$ を用いて,

$$\chi(V \setminus D) = \chi(V, D)$$

を得る。

$QA(V_0)$ は $Rat(V) = Rat(V_0)$ 内で代数的に閉である。このため $Rat(W_{m_1})$ も $Rat(V)$ 内で閉であることに注意

以後 k を標数 0 の代数閉体とし、 V を完備非特異としておく。 $\pi_{m,D} : V \rightarrow W_{m_1}$ は不確定的点を持ち得るので、そのグラフを非特異化し、双有理正則写像 $\mu : V^\# \rightarrow V$ ができ $f = \pi_{m,D} \circ \mu : V^\# \rightarrow W_{m_1}$ は正則になる。 $D^\# = \mu^* D$ とおけば、 $\pi_{m,D^\#} = \pi_{m,D} \circ \mu$ になることは周知であろう。

$X_1 = m_1 D^\#$ とおき、 $|mX_1|$ の元を X_m と書く。すると、 $X_m = mX_1 + \text{div}(\psi)$ 、 $\psi \in L(m m_1 D^\#)$ 、と書かれる。しかし、 $\psi \in A(V^\# \setminus m m_1 D^\#) = A(V_0)$ [なぜなら、 $V^\# \setminus \mu^{-1}(D)$ は $V_0 = V \setminus D$ と固有双有理同値] であり、 $\psi \in f^*(Rat(W_{m_1}))$ 。ゆえに $\psi \in Rat(W_{m_1})$ を用いて $\psi = f^*(\psi')$ とおける。

さて、一般に $f : V \rightarrow W$ のとき、 $f(\Gamma) = W$ となる素因子 Γ を f について、水平因子、 $f(\Gamma) \neq W$ となるとき垂直因子とよぶ。 $D = \sum_{i=1}^r m_i \Gamma_i$ はすべての Γ_i が水平(垂直)因子のとき、水平(垂直)とよぶと、 $D = D_{hor} + D_{ver}$ の如く一意に分解される。

さて、 $\text{div } f^*(\psi')$ は垂直因子よりなるので、 $(X_m)_{hor} = m(X_1)_{hor}$

を得る。即ち, $m(X)_{\text{hor}}$ は $|mX|$ の固定成分になり,

$l(mX_1) = l(m(X_1 - (X_1)_{\text{hor}}))$ とえる。これにより, 容易に,
次の漸近評式を得る。

定理 5. $\alpha, \beta > 0$ とあり, $\chi = \chi(D, V)$ とおくとき, m_2 に対し,
$$\alpha m^\chi \leq l_V(mD) \leq \beta l(mD) \quad \forall m \geq m_2.$$

この定理は $\chi(D, V) = \chi(V - D)$ と思へ出すと, $A(V - D)$
と $L(mD)$ の定量的関係を与えていると云ってよい。一般の
 D に対し, $|m_0 D| \rightarrow \Delta$ に注意し, $\chi(D, V) = \chi(\Delta, V)$ とおく。

定理 2 に半連続性定理を援用すると次の定理が容易に示さ
れる。

定理 6. $\chi = \chi(D, V) \geq 0$ のとき, 固有双有理正則写像
 $\mu: V^\# \rightarrow V$ (ここは, $V^\#$ は非特異としておく) と,
 $\dim W = \chi$ の射影多様体 W , 全射正則写像 $f: V^\# \rightarrow W$
とあり次の性質を満たす。

- (i) $\text{Rat}(V)/\text{Rat}(W)$ は代数的閉拡大,
- (ii) W 内に閉集合の列 $\{W \supseteq W_{(1)} \supseteq W_{(2)} \supseteq \dots\}$ の列
があり $x \in W_{(1)}$ につき $f^{-1}(x)$ は既約非特異, として,
 $x \in W_{(m)}$ につき $l(m m_0 \mu^*(D)|_{f^{-1}(x)}) = 1$ (ここは, $l(m_0 D) \geq 1$ とおいた m_0 とおいておく),

$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} W_m$ にとると $\chi(\mu^*(D) | \bar{f}(x), \bar{f}(x)) = 0$.

$\bigcap_{m=1}^{\infty} W_m$ は, スキーム論としてこの生成子を含む, 開集合とは限らない. $\ell(mD) = 0$ かつ $m > 0$ で成立するのなら,
 $\chi(D, V) = -\infty$ とおく.

定理3, 定理5, 及び半連続性定理を用いて次の定理を示される.

定理7. $f: V \rightarrow W$ を全射正則. V, W を非特異の完備多様体, D を V 上の因子とする. このとき, $V_x = \bar{f}(x)$ とおくと,

$$\chi(D, V) \leq \chi(D_x, V_x) + \dim W.$$

ただし, x は W のある開集合 W_0 の点とした.

定理3の後半部を D の元に移すと藤田によるこの補題が容易に示される.

補題. 定理7と同じ条件下で, さらに H を W の因子とし,
 $\chi(H, W) = \dim W$, $\chi(D - \alpha H, V) \geq 0$ とおくと $\alpha > 0$
 のあるとき,

$$\chi(D, V) = \chi(D_x, V_x) + \chi(H, W).$$

定理4と補題3を再度用いて次の結果を得る.

定理8. 今度は D を W 上の因子, E を V 上の正因子で,

$$\text{codim}(f(E), W) \geq 2 \text{ とする. すると}$$

11

$$\chi(f^*D + E, V) = \chi(D, W).$$

定理 6, 7, 8 は D -2元の理論として最も基礎的なものである。

5. V を完備非特異とし, D を V の標準因子とすると, $\chi(D, V)$ を $\chi(V)$ とし, V の小平次元とよぶ。標準因子は $K(V)$ に書けることが多い。 D -2元の理論は因子の理論であることに對し, 小平次元の理論は, n -型式の理論としての性格が強い。

定理 9. $\chi(V) \geq 0$ のとき, $\mu: V^\# \rightarrow V$, $f: V^\# \rightarrow W$ があり, $x \in \bigcap_{m=1}^\infty W_{(m)}$ に対し $\chi(V_x^\#) = 0$. 勿論, μ は双有理であり, $\dim W = \chi(V)$ である. $V_x^\# = \tilde{f}(x)$ を一般化といふ。

定理 10. $f: V \rightarrow W$ に対し,

$$\chi(V) \leq \chi(V_x) + \dim(W).$$

定理 11. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を固有の不台被覆とすると,

$$\chi(V_1) = \chi(V_2).$$

さらに, $\bar{V}$ を完備非特異 D を $\bar{V}$ 上の正規交叉因子とすると, $\ell(m(K(\bar{V}) + D))$ は $V = \bar{V} \setminus D$ のみにより決まること; $\bar{p}_m(V)$ と書き V の対数的 m 種数といふ。さらに,

$\bar{\kappa}(V) = \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V})$ も V のみに依存する κ ; これらば
すべし, V の固有双有理不変量である。しかも, 定理 9, 10,
11, 12, $\kappa \in \bar{\kappa}$ におきかえると, すべし成立する: と証明
される。

以上は, D は元, 小平次元の才 1 段階である。まず, 上野
による定理をあげる。

定理 12. $V \in \text{Abel}$ の標体 $\mathcal{A}$ の部分多標体とする。こ
のとき $\kappa(V) \geq 0$. そして $\kappa(V) = 0$ なら V 自身
 $\mathcal{A}$ -ヘル多標体になる。

さらに $0 < \kappa(V) < n = \dim V$ なら, $\mathcal{A}$ には, エタ-
ル被覆 $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ があり, $\pi(V) \rightarrow V$ もそうであり,
かつ $\pi'(V) = B \times W$, $\therefore B$ は $\mathcal{A}$ -ヘル多標体で,
 $\dim B = n - \kappa(V)$, W は $\dim W = \kappa(W)$ を満たす。

即ち, 定理 11 によれば, エタ-ル被覆のすれを κ の計算上
無視しえ (, 上の) とき V は直線構造をもつ, とわ
うである。

6. $\kappa(V) = 0$ なる V を研究する。 V の Albanese 写像 $\alpha:$
 $V \rightarrow \text{Alb}(V)$ を考える。 $Z = \alpha(V)$ には, 定理 12 を用いる。

Z は $Alb(V)$ を生成する。 $\sim$ である。 Z を含む最小のアーベル多様体は、 $Alb(V)$ に限られている。 ゆえに、定理 12 により、 $Z \neq Alb(V)$ なら $\kappa(Z) > 0$ 。 即ち、このことより、 $\kappa(V) > 0$ と導けよう。 仮定に矛盾する。 かくして、この予想が成り立つ。

予想 C_n . $f: V \rightarrow W$ に対し、 $\dim V \leq n$ なら、
一般の $x \in W$ に対し、
$$\kappa(V) \geq \kappa(V_x) + \kappa(W).$$

C_2 はイタリア学派の代数曲面論で証明されている。
勿論、このような言明を言っていない。 しかし、Shafarevich
の本の中で、 $\dim V = 2$, $g(V_x) \geq 2$, $g(W) \geq 2$ (g は種
数を表す) のとき V は一般型、という記述もあり、これ
にて、2次元の時は OK と考えられる。

分類によらずに G を特定した場合は、上野の仕事が最初
で、即ち 70 年代に早く入り込んでいる。(イタリア学派との
70 年の距離に驚かされる。)

Viehweg により $\dim V = \dim W + 1$ のとき、解決され、
さらに V_x がアーベル多様体のとき、上野が示した。これは、
曲線の場合をカバーする。 $\dim W = 1$ のとき、 $\kappa(W) = 1$, $g(V_x)$

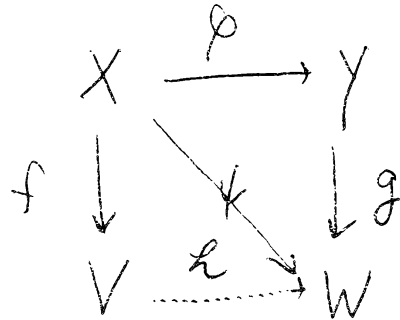
21 の仮定の下で、藤田は証明した。藤田の証明は、Hodge 構造論に依存した全く新しいもので、 Viehweg, 上野の証明と本質的に異なる。この方法を改良発展させて、 $\chi(W) = \dim W$, $\chi(V) \geq 0$ のときに、 m 又は、 C_n を証明した。これは、アベル多様体の双有理特徴づけ等を含み、極めて応用範囲の広いものである。Viehweg は C_3 を証明している。最近 (1980) m 又は、 $\dim W = 1$ のとき、付帯条件なしで、 C_n を完全に証明した (Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves). 証明には、解析幾何の深い高度な技法が必要とされている。

定理 9 でその存在を主張された $V^\# \rightarrow W$ は、双有理を除く一意である。即ち、 $\mu_1: V^\# \rightarrow V$, $f_1: V^\# \rightarrow W^\#$ が同様の条件を満たすと、双有理写像 $\rho: W^\# \rightarrow W$ があり、次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccccc}
 V^\# & \xrightarrow{\mu} & V & \xleftarrow{\mu_1} & V^\# \\
 & \searrow f & & & \searrow f_1 \\
 & & W & \xleftarrow{\rho} & W^\#
 \end{array}$$

つまり $f: V^\# \rightarrow W$ は V の 標準ファイバリング である。

さて、一般に $\varphi: X \rightarrow Y$ を与えられたとき、 $\kappa(X) \geq 0$, $\kappa(Y) \geq 0$ を仮定する。 X, Y の双有理変換 $\in L$ (即ち、 $X^\#, Y^\#$ とも、 X, Y と書べて) $f: X \rightarrow V, g: Y \rightarrow W$ を各々の標準射影 $\pi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^1$ としよ。



すなわち、 $h: V \rightarrow W$ を与えよ。上図式は可換に仮定する。すなわち、角に ψ があってほしいと思われた。このような h を仮定してみる。すなわち、一般の $w \in W$ をとると、 $\psi = g \circ \varphi$ とおけば、定理 10 により $\psi: X \rightarrow W$ を用いて、

$$\kappa(X) \leq \kappa(\psi^{-1}(w)) + \dim W = \kappa(\psi^{-1}(w)) + \kappa(Y)$$

を得る。一方、 $\psi^{-1}(w) \rightarrow V^{-1}(w)$ の一般射影 π は、

$f^{-1}(w)$ であり、 $\kappa(f^{-1}(w)) = 0$ であるから、定理 10 により、

$$\kappa(\psi^{-1}(w)) \leq \dim h^{-1}(w) = \dim V - \dim W = \kappa(X) - \kappa(Y),$$

即ち、 $\kappa(X) \geq \kappa(\psi^{-1}(w)) + \kappa(Y)$ 。

かくして、

$$\kappa(X) = \kappa(\psi^{-1}(w)) + \kappa(Y) \text{ を得る。これは角田の}$$

等式として以下に用する。

一方, $\dim W = \kappa(Y) > 0$ とすると, $\dim \psi'(w) < \dim X$ だから, 帰納法を $\dim X$ について組み, $C_{\dim \psi'(w)}$ を用いると, $\kappa(g'(w)) = 0$ に注意すれば,

$$\kappa(\psi'(w)) \geq \kappa(\varphi'(y))$$

を得る。角田の等式の右辺に合わせて,

$$\kappa(X) = \kappa(\psi'(w)) + \kappa(Y) \geq \kappa(\varphi'(y)) + \kappa(Y).$$

これは C_n の不等式である。即ち, h の存在を仮定するとき, 角田の等式も C_n も示されてしまう。

しかし, h の存在は決して自明でないばかりで, 現在この証明が完全に成ることはない。 $K(X/Y) = K(X) - \varphi^* K(Y)$ とかく。

$$\boxed{\kappa(K(X/Y), X) \geq \kappa(X_Y) ; \text{ とくに } }$$

Viehweg の予想. $\kappa(X_Y) \geq 0 \Rightarrow \text{ と } \kappa(K(X/Y), X) \geq 0.$

これを仮定する。即ち, ある $m > 0$ に対して, $D_m \in |K(X/Y)|$ があるとしよう。双有理同値で適当に動かして, さらに $m \gg 0$ にとり, $g = \pi_{mK(Y)}$ とすると, $g \circ \varphi = \pi_{\varphi^* |mK(Y)|}$ 。一方 $m(K(X) - \varphi^* K(Y)) + \varphi^* |mK(Y)| \leq |mK(X)|$ であり, $g \circ \varphi$ は $f: X \rightarrow V$ を経由して, 分解する。よって $h: V \rightarrow W$ がある。即ち, Viehweg 予想から, h の存在がわかる。Viehweg 自身はこれを自信ある態度で言っている。 $\dim X_Y = 1$ のときは確かめられている。しかし, $\dim X_Y > 1$ のときは既に絶望的。

ともかく, C_n のもとで, $\chi(V) = 0$ なら $\alpha: V \rightarrow \text{Alb}(V)$ は全射になり, とくに $g(V) = \dim \text{Alb}(V) \leq n = \dim V$ である。これを, 予想 (B_n) と書んたこともあつた; C_n の正しさを確信する以上 改めて ' $g(V) \leq n, \text{ if } \chi(V) = 0$ ' と取りあげるのは反ばない。従つて, 予想のアルゴリズムを述べた。

また $g(V) = n, \chi(V) = 0$ のときを考へる。 $V \rightarrow \text{Alb}(V)$ は次元が等しく全射である。よつて, その Stein 分解 $V \rightarrow Y \rightarrow \text{Alb}(V)$ をとると $\chi(Y) = 0$ かつ, $Y \rightarrow \text{Alb}(V)$ は有限正則, Y は正則, さらに $V \rightarrow Y$ は双有理になる。よつて, 又の定理は $Y \rightarrow \text{Alb}(V)$ のエタールになることを云う。

定理 13. Y を正則多様体, A をアーベル多様体で, $f: Y \rightarrow A$ は有限とする。 $\chi(Y) \geq 0$ であり, $\chi(Y) = 0$ なら, Y は A のある Abel (部分) 多様体 A_0 上のエタール被覆になる。

これは, 予想 B_n とよばれるもので, 川又による。証明は, 後に紹介される。(かつては D_n ともよばれた)。

上野の定理 12 及び, アーベル多様体の部分多様体のみで扱ふ, たのいけし。これは, その上の分岐被覆を考へてゐることに注意。

定理 12 の後事と同様の事実; アーベル多様体の部分多様体

についても示される。そして、これを用いれば、 $\kappa(V)=0$ なる V の研究に、証明されてゐる C_n の部分解も使へるゝがある。

即ち、次の定理を用いる。

定理14. $f: V \rightarrow W$ が全射, $\kappa(V) \geq 0$, $\kappa(W) = \dim W$ のとき $\kappa(V) = \kappa(V_y) + \kappa(W)$.

定理15. $f: Y \rightarrow \mathcal{A}$ が有限正則とする。(但し、 Y は正規、 $\mathcal{A}$ はアーベル多様体)。 Y にはイタール被覆 $\tilde{Y}$ もあり $\tilde{Y} = B \times J$ と分解する。ここに B はアーベル多様体、 J は $\kappa(J) = \dim J$ を満たす。

$\kappa(V)=0$ のとき、 $\alpha_V: V \rightarrow Z = \alpha_V(V) \subseteq \text{Alb}(V)$ の Stein 分解 $V \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{\mu} Z$ を考える。定理16のイタール被覆 $\tilde{Y}$ をとり、 $\tilde{V} = (V \times_Y \tilde{Y})_1$ とする。(ここでの1は、1既約成分の意味)。すると、 $\kappa(\tilde{V}) = \kappa(V) = 0$ (しかも $\tilde{V} = B \times J$)。よって $\tilde{V} \rightarrow J$ に定理14を用いて、 $\kappa(J) = 0$ 、即ち $\dim J = 0$ 、いふかえると、 $\tilde{Y} = B$ となる。 $Z = \text{Alb}(V)$ であり、 $Y \rightarrow Z$ はイタールである。 $V \rightarrow \text{Alb}(V)$ は普遍性をもつから $Y = Z$ となる。即ち、 α_V は全射で、そのファイバーは既約となる。

定理の証明も技巧的であり興味深いが、何となくこれも定理15の証明が、中立的である。以下に趙と角田の両氏が詳しく紹介する。

一方、 $\chi(V) = 0$, $n = g(V)$ なる $\alpha_V: V \rightarrow \text{Alb}(V)$ は双有理になり、この判定法をえる。

Abel多様体の特徴づけ: V はアーベル多様体と双有理同値 $\iff \chi(V) = 0$, $g(V) = n$.

$0 < \chi(V) < n$ のとき、 $\alpha_V: V \rightarrow \text{Alb}(V)$ の一般のファイバー F_a は、どうなるであろうか。 $C_n \in V$ に仮定する限り、 $\chi(F_a) = 0$ となって(まう)。従って、これを確立できるように C_n を部分的にでも解決する必要もある。更に、この F_a は、互いに双有理同値で、 V は F_a をファイバーとするエタール・トポロジークのファイバー束に双有理同値になると予想されている。これを上野の予想 K_n である。 $g(V) = n-1$ のとき、 m はこれを確立している。

$\chi(V) = 0$, $g(V) = 0$ をめぐる V の研究は一般には手をつけられていない。しかし、 $mk(V) \sim 0$ のとき、 V のエタール被覆 $\tilde{V}$ があって $\tilde{V} = A \times C$, A はアーベル、 C は単連結の形に分解するといわれる、というところである。この結果は

2次元に限っても、イタリヤ予想を越えた結果である。 $\chi(V) \sim 0$ の条件を $\chi(V) = 0$ でおきかえて、同様の結論を得たいものである。(これは予想 E_n である)。

従って、 $\chi(V) = 0$, $\pi_1(V) = \langle \bar{\omega} \rangle$ とする V の研究にと話を収束する。2次元であれば、これらは K3 曲面であり、すべて同相。そして適当な複素変形後と令せると互いに移り合う。このままの形では、勿論高次元に移せない。現在では要をつかむようなもので、何もわかんない。

$\chi(V) = -\infty$ のとき、やはり Albanese 写像 $\alpha_V: V \rightarrow \alpha_V(V)$ をとり、この Stein 分解 $\psi: V \rightarrow Z$ をとる。予想 C_n の下で、 $\chi(\psi^*(z)) = -\infty$ であるから、この正否が重要な点である。つまり、 $\chi(V) = 0$ のとき、Stein 分解をつかえないので、どうしたようかわかんない。

一般に、 $\chi(V) = -\infty$ のとき、藤本氏の意味で、 V は 準線形的 (quinaruled) になることも期待しておこう。準線形的とは、 V に 有理曲線 の族が存在し、これらで V をおおう、ということである。今迄は、便宜的な概念として、単有理的 (uniruled) 等とよばれた。しかし、藤本の研究により、準線形的でない V の、その偏極束はよい性質をもつことが示され、これらの一般論的地位も違ってくるように思われる。予想 C_n にしても、 $-\infty$ のときは最も難なく、この部類の

研究は本開始である。

より返しに与る x , 予想 C_n を示すには,

$$1) \quad \kappa(X_y) \geq 0, \kappa(Y) \geq 0 \Rightarrow \kappa(X) \geq 0.$$

$$2) \quad \kappa(X_y) > 0, \kappa(Y) \geq 0 \Rightarrow \kappa(X) > 0.$$

$$\kappa(X_y) \geq 0, \kappa(Y) > 0 \nearrow$$

と示せば, ほぼ充分なっている。

今回の研究集会では $\kappa(X) = 0$ の X を研究した⁴ 又の仕事を理解消化の中心であり, 概略次のような手順をふむ。

- ① $\kappa(X) \geq 0$ のとき, X の ~~近似~~ $X' \rightarrow X$ をとり, $\kappa(X') = \kappa(X)$, $p_g(X') > 0$ にする。
- ② $f: X \rightarrow Y$ に対し, 中置化定理を示す。即ち, X, Y の双有理モデルのとりかえを行って更に, $\tilde{Y} \rightarrow Y$ なる有限正則全射をとると, $X \times_Y \tilde{Y}$ の非特異化 $\tilde{X}$ と $\tilde{Y}$ への正則全射は中置にできる。
- ③ $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ に対して, $\tilde{f}_*(K(\tilde{X}/\tilde{Y}))$ の半正値性を示す。
- ④ 3を基に, ②の状況下で, $\kappa(X) \geq 0, \dim Y = \kappa(Y)$ と更に仮定するとき, $\kappa(X) > 0$ を示す。
- ⑤ $\kappa(X) \geq 0, \kappa(Y) = \dim Y$ のとき $\kappa(X) = \kappa(X_y) + \kappa(Y)$ としう。

技術的に最も困難なのは③の段階である。

⑥ アーベル多様体の部分多様体の場合は補題に対して、構造定理を示す。

⑦ ⑤, ⑥を用いて、定理15を示す。

$0 < \chi(V)$ となる V については, canonical ring $\sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(V, \mathcal{O}(mK(V)))$ の有限生成の問題, 測度双曲性の事実と: 一般の問題もあるがここでは述べない。しかし, $\dim V = 3, \chi(V) = 3$ なる V についても研究の現状は満足のものではない。

一般化の方向として, ($\chi(V) = 0$ の分類や C_n については,)

1. 非完備な上の代数多様体への一般化。

これは, 非常に早く行っている。アフィン環の理論への応用もある。

2. コンパクト複素多様体への一般化。

Kähler (又は, 藤本) 多様体に関するとはほでさるが, これのせいで, 大抵成立しない。しかし, 別種の分類理論についてみる (上野の稿参照)

3. 正標数の完備多様体について一般化すること。

微分形式の統制力の弱さ, 非特異化理論の不成熟さ, 全体的な話についていない。同じ話論は期待しない。非 Kähler と似た病理現象も見出さるよう。特有の分類理論も...

4. p -進解析空間への一般化等。▷▷…… ?!