

Quadratic Inequalities and Factorizations of Matrices

北海道大学 (名誉教授) 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

Hokkaido University (Emeritus)

Email: ando@es.hokudai.ac.jp

1. Introduction $\mathbb{M}_n$ は $n \times n$ の複素行列の空間とし, $\mathbb{M}_n^+$ はその中の positive semi-definite 行列のなす cone とする。以下 $\mathbb{M}_n$ の中での順序 $\geq$ はこの cone に基づくものである。すなわち $A \geq B$ は A, B が共に selfadjoint で $A - B \in \mathbb{M}_n^+$ のことである。

$A, C \in \mathbb{M}_n^+, B \in \mathbb{M}_n$ に関して 2 つの Schwarz 型の不等式を考える。

$$\langle x|Ax \rangle \cdot \langle y|Cy \rangle \geq |\langle x|By \rangle|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad (1)$$

$$\langle x|Ax \rangle \cdot \langle x|Cx \rangle \geq |\langle x|Bx \rangle|^2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n. \quad (2)$$

直ちに判ることは, (1) は

$$\begin{bmatrix} \langle x|Ax \rangle & \langle x|By \rangle \\ \langle y|B^*x \rangle & \langle y|Cy \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2^+ \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad (3)$$

のことで, 言い換えれば

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{i.e.,} \quad \mathbf{S} \in \mathbb{M}_{2n}^+ \quad (4)$$

のことである。一方 (2) は

$$\begin{bmatrix} \langle x|Ax \rangle & \langle x|Bx \rangle \\ \langle x|B^*x \rangle & \langle x|Cx \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2^+ \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad (5)$$

と同値となる。

(5) を満たすが (4) を満たさない例としては, $A = C = I$ のとき (4) が成り立つのは $\|B\| \leq 1$ のことであり, (5) を満たすのは $w(B) \leq 1$ のことである。ここで $w(B)$ は B の数域半径 (numerical radius) である。

よく知られたように (4) は B の A, C に関する分解

$$B = A^{\frac{1}{2}}WC^{\frac{1}{2}} \quad \exists \|W\| \leq 1$$

と同値になる。このような B の parametrization が (5) の条件の下ではどのように形で可能かを探ることから出発し, それの一般化を考える。

2. Parametrization

Theorem 1.

(a) $B = B^*$ のとき, (5) $\iff B = \operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}WC^{\frac{1}{2}}) \quad \exists \|W\| \leq 1.$

(b) $A = C$ のとき, (5) $\iff B = 2D^{\frac{1}{2}}W(A - D)^{\frac{1}{2}} \quad \exists 0 \leq D \leq A, \|W\| \leq 1.$

この定理は次ぎのようにも理解される。

(a) $S = \frac{1}{2}\{T + \varphi(T)\} \quad \exists T \geq 0,$ (b) $S = \frac{1}{2}\{T + \psi(T)\} \quad \exists T \geq 0,$ ここで

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{2,1} \\ T_{1,2} & T_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \psi\left(\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} T_{2,2} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{1,1} \end{bmatrix}.$$

これ等の証明には, positive な多項式の分解に関する Fejer-Riesz の定理を援用することができる。

Fejer-Riesz Theorem ([2] 参照) $F(\cdot)$ は $\mathbb{M}_n$ に値をとる関数とする。

(a) $F(t)$ が $t \in \mathbb{R}$ の多項式で, $F(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ なら, $\mathbb{M}_n$ に値をとる多項式で $G(t)$ で

$$F(t) = G(t)^* \cdot G(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

を満たすものが存在する。

(b) $F(e^{it})$ が $t \in \mathbb{R}$ の trigonometric 多項式で, $F(e^{it}) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ なら, $\mathbb{M}_n$ に値をとる analytic な trigonometric 多項式 $G(e^{it})$ で

$$F(e^{it}) = G(e^{it})^* \cdot G(e^{it}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

を満たすものがある。ここで $G(e^{it})$ が analytic とは e^{ikt} ($k = 0, 1, \dots$) の 1 次結合になっていることである。

この定理が現在の状況に適用できるのは, 以下の理由による。

(a) $B = B^*$ で (5) が満たされる $\iff F(t) := A + 2tB + t^2C \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$

(b) $A = C$ で (5) が満たされる $\iff F(e^{it}) := 2A + e^{it}B + e^{-it}B^* \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

例えば (a) の場合は, $G(t) = X_1 + tX_2$ として, S の背後に $T = \begin{bmatrix} X_1^*X_1 & X_1^*X_2 \\ X_2^*X_1 & X_2^*X_2 \end{bmatrix} \geq 0$ が存在し,

$$A = X_1^*X_1, \quad C = X_2^*X_2 \quad 2B = X_1^*X_2 + X_2^*X_1$$

となっているのである。

3. Three cones 素朴な 2×2 のブロック行列に関する Schwarz 型の不等式から出発したが、より一般に $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ の中で考えるのが適当と思われる。ここで $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ は $\mathbb{M}_n$ の元を entry にもつ $m \times m$ ブロック行列の空間である。これは当然 $\mathbb{M}_{mn}$ と同一され、その同一視を通じて $\mathbb{M}_{mn}^+$ に対応する $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ の cone を $\mathfrak{P}_0$ と書こう。すなわち $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_0$ とは $\mathbf{S} = [S_{j,k}]_{j,k=1}^m \geq 0$ のことで、(4) に対応する。

さらに $\mathbb{M}_{mn}$ はテンソル積空間 $\mathbb{M}_m \otimes \mathbb{M}_n$ と同一視される。ここでの同一視は

$$A = [\alpha_{j,k}]_{j,k=1}^m \in \mathbb{M}_m, \quad B \in \mathbb{M}_n \implies A \otimes B := [\alpha_{j,k} B]_{j,k=1}^m$$

なる対応を通じてである。

よく知られた事実

$$A \in \mathbb{M}_m^+, \quad B \in \mathbb{M}_n^+ \implies A \otimes B \in \mathbb{M}_{mn}^+$$

から判るのは

$$\mathfrak{P}_+ := \text{Conv}\{A \otimes B : A \in \mathbb{M}_m^+, B \in \mathbb{M}_n^+\}$$

は $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ の中で $\mathfrak{P}_0$ の subcone となっていることである。

$\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ には自然に inner product

$$\langle \mathbf{T} | \mathbf{S} \rangle := \text{Tr}(\mathbf{T}^* \mathbf{S})$$

が定義されるが、この inner product を通じて $\mathfrak{P}_0$ は self-dual である。すなわち

$$\mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0 \iff \langle \mathbf{T} | \mathbf{S} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \mathfrak{P}_0$$

となっている。 $\mathfrak{P}_+$ の dual cone を $\mathfrak{P}_-$ と書こう。すなわち

$$\mathbf{T} \in \mathfrak{P}_- \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle \mathbf{T} | \mathbf{S} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \mathfrak{P}_+$$

と定義すると $\mathfrak{P}_+ \subset \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_-$ で、 $\mathfrak{P}_+$ と $\mathfrak{P}_-$ は互いに dual cone になっている。

基本的なことは、

$$\mathbf{S} = [S_{j,k}]_{j,k=1}^m \in \mathfrak{P}_- \iff [\langle x | S_{j,k} x \rangle]_{j,k=1}^m \in \mathbb{M}_m^+ \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad (6)$$

となっており、(5) の一般化であることが判る。

勿論 (3) (よって (4)) に対応するのは

$$\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_0 \iff [\langle x_j | S_{j,k} x_k \rangle]_{j,k=1}^m \in \mathbb{M}_n^+ \quad \forall x_j \in \mathbb{C}^n \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

である。

$\mathbf{S} = [S_{j,k}]_{j,k=1}^m \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ が条件

$$j + k = j' + k' \implies S_{j,k} = S_{j',k'}$$

を満たすとき, Hankel-type (またブロック Hankel 行列) という。また条件

$$j - k = j' - k' \implies S_{j,k} = S_{j',k'}$$

を満たすとき, Toeplitz-type (またブロック Toeplitz 行列) という。したがって, Theorem 1 は Hankel-type および Toeplitz-type のものを取り扱っていることになる。

$\Phi(\cdot)$ を Hilbert 空間 $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ から ブロック Hankel 行列の作る部分空間への ortho-projection, また $\Psi(\cdot)$ は ブロック Toeplitz 行列の作る部分空間への orthoprojection とする。

この設定の下で Fejer-Riesz の定理が有用になるのは,

$$\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_- \implies \mathbb{M}_n \ni \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{m-1} \end{bmatrix}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{m-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}$$

という事実である。この事により, Hankel-type または Toeplitz-type のとき $\mathfrak{P}_-$ と $\mathfrak{P}_0$ の結び着きが現れる。すなわち Fejer-Riesz の定理は次ぎの形に書かれる。

Theorem 2. $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-$ としよう。

(a) $\Phi(\mathbf{S}) = \Phi(\mathbf{T}) \quad \exists \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0.$

(b) $\Psi(\mathbf{S}) = \Psi(\mathbf{T}) \quad \exists \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0.$

さらに (a) でも (b) でも $\mathbf{T} = [T_{j,k}]_{j,k=1}^m$ は $T_{j,k} = X_j^* X_k \quad \exists X_j \in \mathbb{M}_n \quad (j = 1, 2, \dots, m)$ の形であることも要求することが出来る。

したがって,

(a) $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-, \text{ Hankel-type} \implies \mathbf{S} = \Phi(\mathbf{T}) \quad \exists \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0.$

(b) $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_-, \text{ Toeplitz-type} \implies \mathbf{S} = \Psi(\mathbf{T}) \quad \exists \mathbf{T} \in \mathfrak{P}_0.$

この結果の dual な形として, Hankel-type や Toeplitz-type の仮定の下で, $\mathfrak{P}_0$ と $\mathfrak{P}_+$ を関係付ける基となるのが, 次ぎの Truncated moment theorem である。

Truncated moment theorem ([1] 参照) $0 \leq \mathbf{S} = [S_{j,k}]_{j,k=1}^m \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ とする。

(a) $\mathbf{S}$ が Hankel-type $\implies \exists t_l \in \mathbb{R}, E_l \in \mathbb{M}_n^+ (j = 1, 2, \dots, N), Q \in \mathbb{M}_n^+$

$$S_{j,k} = \sum_{l=1}^N t_l^{j+k-2} E_l \quad \forall (j+k < 2m), \quad S_{m,m} = \sum_{l=1}^N t_l^{2m-2} E_l + Q.$$

(b) $\mathbf{S}$ が Toeplitz-type $\implies \exists t_l \in \mathbb{R}, E_l \in \mathbb{M}_n^+ (j = 1, 2, \dots, N)$

$$S_{j,k} = \sum_{l=1}^N e^{i(k-j)t_l} E_l.$$

この定理が現在の状況に適用できるのは、上の t_l, E_l, Q などを使って

(a) $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_0$ が Hankel-type ならば

$$\mathbf{S} = \sum_{l=1}^N ([1, t_l, \dots, t_l^{m-1}]^* \cdot [1, t_l, \dots, t_l^{m-1}]) \otimes E_l + ([0, \dots, 0, 1]^* \cdot [0, \dots, 0, 1]) \otimes Q$$

(b) $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_0$ が Toeplitz-type ならば

$$\mathbf{S} = \sum_{l=1}^N ([1, e^{it_l}, \dots, e^{i(m-1)t_l}]^* \cdot [1, e^{it_l}, \dots, e^{i(m-1)t_l}]) \otimes E_l$$

となり

$$[1, t_l, \dots, t_l^{m-1}]^* \cdot [1, t_l, \dots, t_l^{m-1}], \quad [1, e^{it_l}, \dots, e^{i(m-1)t_l}]^* \cdot [1, e^{it_l}, \dots, e^{i(m-1)t_l}] \in \mathbb{M}_m^+$$

のことから、 $\mathbf{S} \in \mathfrak{P}_+$ が判るからである。これを次ぎの形に書こう：

Theorem 3. $\mathbf{S} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$ としよう。

(a) $\Phi(\mathbf{S}) \in \mathfrak{P}_0 \implies \Phi(\mathbf{S}) \in \mathfrak{P}_+.$

(b) $\Psi(\mathbf{S}) \in \mathfrak{P}_0 \implies \Psi(\mathbf{S}) \in \mathfrak{P}_+.$

$\mathfrak{P}_+$ と $\mathfrak{P}_-$ が、また $\mathfrak{P}_0$ は自分自身と、dual cone になっていることから、Theorem 2(a) と Theorem 3(a) が、また Theorem 2(b) と Theorem 3(b) が互い同値な命題になっていることが判る。

参考文献

- [1] T. Ando, *Truncated moment problems*, Acta Sci. Math. (Szeged), 31(1970), 319-334.
- [2] M. Rosenblum and J. Rovnyak, *Hardy Classes and Operator Theory*, Oxford Univ. Press, New York, 1977.