

An Estimate for Hexagonal Circle Packings

須川敏幸 (TOSHIYUKI SUGAWA)

京都大学理学部

このノートは

Zheng-Xu He “An estimate for hexagonal circle packing” J.Diff.Geom. Vol.33(1991) pp.395-412 の解説である。

H_n を第 n 世代までの regular hexagonal circle packing, つまり

$$H_n = \{z \in \mathbb{C}; |z - (2(k_1 + k_3) + 2e^{\pi i/3}(k_2 - k_3))| = 1\}; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}, |k_1| + |k_2| + |k_3| \leq n\}$$

とし、 P_n を circle packing で H_n に組み合わせ同値なもの全体のなす集合、 P_n^0 をその部分集合で、中心の円が単位円周であり、1 を一つの接点に持つようなもの全体とする。

c_0 は単位円周とし、 $c_{j+1} = \{z; |z - 2e^{\pi i j/3}| = 1\}$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) と定める。($c_j \in H_1 \subset H_n$)

$P \in P_n^0$ に対しては単位円周 $c'_0 = c_0 \in P$ に 1 で接する円を c_1 に対応させることにより、一意的に組み合わせ同値を与える写像 $\rho: H_n \rightarrow P$ が定まる。以下では $\rho(c) = c', \rho(H_m) = H'_m$ ($0 \leq m \leq n$) などと略記することがある。

次の n にのみ依存する普遍定数

$$s_n = \sup_{P \in P_n^0} \max_{1 \leq j, k \leq 6} \left(\frac{\text{rad} c'_j}{\text{rad} c'_k} - 1 \right)$$

に関して次を示すのがこの論文での主結果である。

定理. $s_n = O(\frac{1}{n})$ ($n \rightarrow \infty$)

注意: $s_n \geq 4/n$ なのでこの結果は order としては最良である。 $s_n \geq 4/n$ は実際に、 $g(z) = \frac{2(n+1)z-1}{2(n+1)-z}$ とすれば $g(H_n) \in P_n$ で

$$s_n \geq \frac{\text{rad} g(c_1)}{\text{rad} g(c_4)} - 1 = \frac{16n + 16}{4n^2 - 1} > \frac{4}{n}$$

となることから分かる。

では、以下でこの定理の証明の概略について解説する。まず、 $\delta_1 > 0$ を hexagonal packing に対する ring lemma に於ける定数とする。つまり、

$$\delta_1 = \inf_{P \in P_n^0} \min_{1 \leq j \leq 6} \text{rad} c'_j$$

であるとする。すると、次の補題が成り立つことが分かる。

LEMMA2.1. $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \hat{c}_2$ を互いに他と外接する円で $\delta_1 \leq \frac{\text{rad } \hat{c}_1}{\text{rad } \hat{c}_2}$ とする。この時、次の性質を満たす Möbius 変換の元 g が一意的に存在する：

$$g(\hat{c}_0) = c_0, \quad g(\hat{c}_1) = c_1, \quad g(\hat{c}_2) = c_2.$$

さらに、 $\hat{c}_0 = c_0$ なら g は c_0 上 C_1 -bilipschitz である。(ここに、 $C_1 \geq 1$ は普遍定数。)

LEMMA. $f: c_0 \rightarrow c_0$ が C_1 -bilipschitz とすると f を $\tilde{f}: \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ ($D = \{|z| < 1\}$) に $\tilde{f}(re^{i\theta}) = rf(e^{i\theta})$ により拡張すると $\tilde{f}$ は C_1 -擬等角である。

以下、 n を固定して $P \in \mathcal{P}_n^0$ も固定する。上の2つの補題からまず H_{n-1} の隙間の和から $H'_{n-1} = \rho(H_{n-1})$ の隙間の和への等角写像が自然に定まり、あとはそれを円の内部に上のように radial に拡張することにより C_1 -擬等角写像 φ が定義される：

$$\varphi: \text{hull}(\cup H_{n-2}) \rightarrow \text{hull}(\cup H'_{n-2})$$

さらにここで、単位円板から複素平面の中への C_1 -擬等角写像 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ に対し $f|_{\{|z| < 1/\sqrt{3}\}}$ は C_2 -擬等角写像 $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ に拡張できることに注意する。ここに、 C_2 は C_1 のみに依存する定数である。これにより、 φ の $\{|z| < n-2\}$ への制限を C_2 -擬等角写像 $\psi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ($\psi(\infty) = \infty$) に拡張しておく。($\text{hull}(\cup H_{n-2}) \cap \{|z| < (n-2)\sqrt{3}\}$ に注意。)

次に m を $\frac{n-3}{2}$ の整数部分とすれば $\cup H_m \subset \{|z| \leq n-2\}$ となることに注意しておく。

円 c に関する反転を γ_c と書くことにして、 $\{\gamma_c\}_{c \in H_m}, \{\gamma_{c'}\}_{c' \in H'_m}$ で生成される群をそれぞれ G_m, G'_m と書くと、 $\gamma_c \mapsto \gamma_{c'}$ ($c' = \rho(c)$) により同型写像 $\tau: G_m \rightarrow G'_m$ が定まるが、この τ は自然に同相写像 $\tau_*: \Lambda(G_m) \rightarrow \Lambda(G'_m)$ を誘導する。($\Lambda(G)$ は G の limit set)

I_m を H_m の隙間の和集合、 U_m を $\hat{\mathbb{C}} \setminus \cup_{c \in H_m} c$ の非有界成分としたとき、 $I_m \cup U_m =: W_m$ が G_m の基本領域となる。そこで $m = [\frac{n-3}{2}]$ として、 $f = f_n$ を

$$f := \begin{cases} \tau(g) \circ \psi \circ g^{-1} & \text{on } g(\bar{W}_m) \quad (g \in G_m) \\ \tau_* & \text{on } \Lambda(G_m) \end{cases}$$

により定めると次のことが成り立つ。

- (1) $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は C_2 -擬等角写像,
- (2) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = \infty,$
- (3) $f \circ g = \tau(g) \circ f$ for $\forall g \in G_m,$
- (4) f は $J_m = \cup_{g \in G_m} g(I_m)$ 上等角。

ここで J_m に対して次のような評価が成り立つことが分かる。

LEMMA2.2. $|D \setminus J_m| \leq C_3/m^2$ (ここに $C_3 > 0$ は普遍定数)

実は論文ではこの評価にかなりのページが割かれているが、幾分技術的な評価などが色々必要になるので、ここでは証明は省略する。 J_m は G_n ($m \leq n$) の不連続領域を含むのでこの系として次の結果が得られる。

COROLLARY. $G_\infty = \varinjlim G_m$ の limit set は 2 次元測度 0 である。

さて、以下では次の主張を示すことを考える。

主張. 単位円周 c_0 上の任意の点 z について $|\varphi(z) - z| \leq \frac{C_4}{n}$ が成り立つ。ただし、ここに $C_4 > 0$ は普遍定数である。

この主張から $c'_0 \cap c'_j$ は $\frac{1}{n}$ の order で $c_0 \cap c_j$ に近いことが分かり、これから $s_n = O(\frac{1}{n})$ が容易に従う。この主張を示すには Lemma 2.2 と次の補題を組み合わせばよい。

LEMMA (SULLIVAN). $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を正規化された C_2 -擬等角写像とすると C_2 のみに依存する正定数 C_5 が存在して次が成り立つ：正定数 $\delta > 0$ に対して f の Beltrami 係数 $\mu = f_{\bar{z}}/f_z$ が球面測度 δ 以下の可測集合 E の外部で 0 になるならば、任意の $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ について $d(z, f(z)) \leq C_5 \sqrt{\delta}$ が成り立つ。ただし、ここに $d(z, w)$ は球面距離とする。

この補題は本質的には長さと面積の方法 (length-area method) を用いて証明される。評価が $\sqrt{\delta}$ の order になってしまうのは、球面を 2 重に被覆するトーラスを考えてそこに写像を持ち上げて考えるからで、その場合、分岐点があるために $1/2$ 乗の因子がついてしまうのである。

以上が主定理の証明の概略であったが、この結果の系として次のものが得られる。これは Rodin による “Schwarz’s lemma for circle packings II” J. Diff. Geom. 30(1989) pp. 639-554 の結果 (志賀氏の稿を参照のこと) を用いれば直ちに従う。

系. 平面内の単連結領域 R のリーマン写像の circle packing 近似解 f_ϵ について、その微分はリーマン写像 f の微分に広義一様収束する。

特に R が Jordan 領域の場合、 f_ϵ は f に一様収束する。ここで、 $f_\epsilon: R_\epsilon \rightarrow D_\epsilon$ が $f: R \rightarrow D$ に一様収束するというのは、次が成り立つことを言う：

$$\forall \eta > 0, \exists \delta > 0, \exists \epsilon_0 > 0, \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0) \quad z \in R_\epsilon, w \in R, |z - w| < \delta \Rightarrow |f_\epsilon(z) - f(w)| < \eta$$