

3次元リーマン多様体の $\mathbb{R}^6$ への局所等長埋入問題

慶応大 理工 前田 吉昭

城西大 理 甲村 玄

0. 序.

n 次元リーマン多様体 (M^n, ds^2) と $n(n+1)/2$ (以下 $N = n(n+1)/2$ とかく)
次元ユークリッド空間に局所的に等長埋入する問題について,
考察する。以下記号を簡単にすべく、 $p_0 \in M$ の近傍で
 (M^n, ds^2) の局所等長埋入が存在するとき、 $i: (M^n, ds^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$
と書く。この問題は古くから考察された有名な問題である。
特に、 (M^n, ds^2) が解析的多様体であるとき、局所等長埋入を持
つことが知られている (参 Jacobowitz [2])。このほか、 C^∞ リーマン
多様体に対して C^∞ 局所等長埋入が存在するかどうかという問題を考
察した。特に次の結果を述べる:

定理: (M^n, ds^2) を C^∞ リーマン多様体とする。次の場合、局所等
長埋入 $i: (M^n, ds^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ が $p_0 \in M^n$ の近傍 U 上に存在する。

- (i) $n=2$ の時、 p_0 のガウス曲率 $K(p_0) \neq 0$
- (ii) $n=3$ の時、 p_0 の曲率テンソル $R(p_0) \neq 0$

上に述べた定理のうち、 $n=2$ の場合はよく知られた結果であ
る。又、 $n=3$ のうち曲率テンソル $R(p_0)$ へ、

(*) signature of $R(p_0)$ が $(0,1)$ の $(0,0)$ 以外

の場合 Bryant-Griffiths-Yang [1] による 2 解がある。[1] によれば、線形化偏微分方程式が対称双曲型、強双曲型となる非線形偏微分方程式に対して Nash-Moser 型定理を証明し、その応用として、 $n=3$ の場合の等長埋入の存在を示した。一方 (*) の条件はしむれば、等長埋入方程式は、単に、(実) 主要部型としおける。いゝことは、 $n=2, n=3$ の場合を統一的にとり扱うために線形化方程式が実主要部型になる非線形方程式の局所可解問題ととり扱い、その結果から局所等長埋入定理を証明する。

1. 等長埋入方程式とその線型化方程式

以下 $n=2$ あるいは $n=3$ とする。今、 (M^n, ds^2) の某 p_0 の近傍での等長埋入 $x: (M^n, ds^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ の存在は、 M^n の局所座標系 $(u^1, \dots, u^n)$ を用いて、次を満たす $x^A = x^A(u)$, $A=1, \dots, N$ の存在を示す事にある。

$$(1) \quad \sum_{A=1}^N \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x^A}{\partial u^j} = g_{ij}(u) \quad , i, j=1, \dots, n.$$

$$\text{いゝこと, } \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(u) du^i du^j = ds^2.$$

(1) を考察するために、その線型化方程式を調べる。いゝこと、

$x^A(u) \in M^n$ の $\mathbb{R}^N$ への 1 次 C^∞ 埋入とする。この時、未知関数

$y^A = y^A(u)$, $A=1, \dots, N$ による 2 次線形微分方程式を考える:

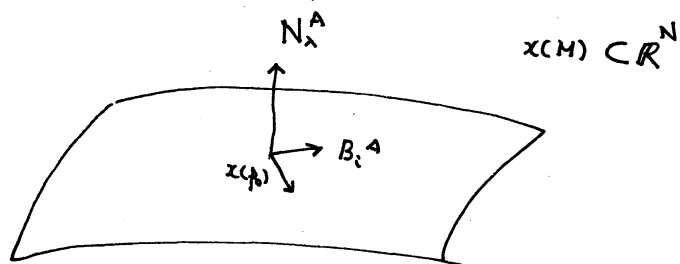
$$(2) \quad \sum_{A=1}^N \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial y^A}{\partial u^j} + \frac{\partial y^A}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x^A}{\partial u^j} = k_{ij}(u)$$

∴ ∃ $(k_{ij}(u)), i, j=1, \dots, n$ は $u \in C^\infty$ に $n \times n$ 対称行列である。

今、我々は微分幾何の用語を用いる。今、埋入 $x^A(u) : (M, ds^2)$

$\hookrightarrow \mathbb{R}^N$ に対し、 $B_i^A(u) = \frac{\partial x^A}{\partial u^i}$ ($i=1, \dots, n$) は曲面の接ベクトル場である。

これらは、各点 $x(p)$ の接空間を張る。これに対し、単位法ベクトル場をとり込められる。これを $\{N_\lambda^A(u)\}_{\lambda=n+1}^N$ とする。



従って、 $y^A(u)$ は、

$$y^A(u) = \sum_{i=1}^n y_i^A(u) B_i^A(u) + \sum_{\lambda=n+1}^N y_\lambda^A(u) N_\lambda^A(u)$$

と一意に表わされるから、(2) は新たに未知関数 $(y_i(u), y_\lambda(u))$ になる。

$$(3) \quad \nabla_i y_j(u) + \nabla_j y_i(u) = 2 \sum_{\lambda=n+1}^N y_\lambda(u) H_{ij\lambda}(u) + k_{ij}(u)$$

とかける。∴ ∃ ∇_i は $ds^2 = \sum g_{ij}(u) du^i du^j$ による変微分、

$H_{ij\lambda}(u)$ は、 $\{x^A(u), N_\lambda^A(u)\}$ による 2 基本形式である。

($y_i(u), y_\lambda(u)$ は $(1-n)$ 計量の添字と下添字である)。

以下の必要のために次の定義としておく：

定義 1.1. C^∞ 埋入 $\alpha: (M^n, ds^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ が non-degenerate であるとは、 n 個の基本形式 $\{H_{ij\lambda}(u)\}_{\lambda=n+1, \dots, N}$ が、 $n \times n$ 対称行列の値をベクトル空間の中で 1 次独立 (各点 u で) であることと意味する。

2° 実主要部型線型偏微分方程式系

ここで我々は線形微分方程式の用語を用意する。

定義 2.1. $P \in M$ の $m \times m$ classical (擬) 微分作用素とし、その主象を $p(x; \xi)$ とする。

(i) P が $(p_0; \xi_0) \in T^*M - \{0\}$ において、実主要部型系であるとは、 $(x_0; \xi_0)$ の近傍 Γ 、有次 classical 象 $\tilde{p}(x; \xi)$ 、 $\tilde{q}(x; \xi)$ が存在し、

$$(4) \quad \tilde{p}(x; \xi) \cdot p(x; \xi) = \tilde{q}(x; \xi) \text{Id}_m \quad \text{in } \Gamma$$

かつ、 $d\tilde{q} = \sum \xi_i dx^i$ は $\Gamma \cap \{(x; \xi) \mid \tilde{q}(x; \xi) = 0\}$ 上で 1 次独立である。

(ii) P が $p_0 \in M$ において (resp. $U \subset M$ において) 実主要部型系であるとは、 P は $\pi^{-1}(p_0) - \{0\}$ (resp. $\pi^{-1}(U) - \{0\}$) の各点で主要部型系であることと意味する。(ここで、 $\pi: T^*M \rightarrow M$ は射影)。

ここで我々は (3) がどのような様子になるのかを見よう。例として、 $n=2$ の場合を考へてみる。このとき、(3) の特性方程式は、次の行列式の 0 点から与えられる。

$$(5) \quad \sigma(x; z) = \begin{vmatrix} z_1 & 0 & z_2 \\ 0 & z_2 & z_1 \\ H_{11} & H_{22} & H_{12} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{mod. 低階項}).$$

従って、2. $d\sigma(x; z) \neq 0 \iff K = H_{12}^2 - H_{11}H_{22} \neq 0$ が成り立つ。K は曲面 σ のガウス方程式より、ガウス曲率に他ならない。

3. 主要部型系理入の構成

2. の見方様に、(3) が主要部型に成るために、 (M^n, ds^2) の曲率を調べる事が必要。実際我々は、次の事を得る：

命題 3.1. 主定理の仮定の下で、任意の $\eta > 0$ と任意の正の整数 s に対し、近傍 $U \ni p_0$ と 3×3 対称行列 $\{H_{ij\lambda}(0)\}_{\lambda=1,2,3}$ と U 上の単位 C^∞ ベクトル場 $\{N_\lambda^A(u)\}_{\lambda=n+1, \dots, N}$ と C^∞ 理入 $(x^A(u))$ が存在して：

(i) $(x^A(u))$ は non-degenerate 理入

(ii) $\{N_\lambda^A(u)\}$ は $(x^A(u))$ の法ベクトル場

(iii) $\{H_{ij\lambda}(0)\}_{\lambda=n+1, \dots, N}$ は $(x^A(u))$ の単位法ベクトル $\{N_\lambda^A\}$ に関する

点 p_0 における $2s$ 基本量

$$(iv) \quad \|g_{ij}(u) - \sum_{\lambda=1}^N \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x^A}{\partial u^j}\|_{H^s(0)} < \eta$$

証明は解析的理入を構成する際の手法により $x^A(u)$ を作る。

$g_{ij}(u)$ を u についての Taylor 展開し、 $x^A(u)$ の Taylor 展開を逐次求める。

この時、ガウス方程式により、曲率に対する $2s$ 基本量 $\{H_{ij\lambda}(0)\}$

を求めとある。それを本質的にして求めなければならない。

4. (3) の局所可解性

(1) の存在と正しさは 命題 3.1 により, (3) の局所可解性が問題となる。ここに注意しなくては $\{g_\lambda(u)\}_{\lambda=n+1, \dots, N}$ は, $\{H_{ij\lambda}(u)\}$ の作り方から, 代数的操作で解ける。一般的には, $N \times N$ 一階非線形微分方程式系

$$(6) \quad \bar{\Phi}(u) = g$$

で, $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 係数の線形化方程式系を主要部型と $u=u_0$ で、この考察するにとらえる (ここに, $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ は微係数係数で有界な C^∞ 関数), (6) に対し 2 次バズとする。

定理 4.1. $\bar{\Phi}(u)$ は $N \times N$ 非線形偏微分方程式系とする。

$\bar{\Phi}(u)$ の order = m , かつ $\bar{\Phi}(u)$ は $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 係数とする。 $\bar{\Phi}(u)$ は order 1 以上の Sobolev 空間で Fréchet 微分可能で $\bar{\Phi}'(u)$ とその微分とする。 $p_0 \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in C^\infty(U, \mathbb{R}^N)$ とし, $\bar{\Phi}'(u_0)$ は $N \times N$ 主要部型系とする。この時, U の p_0 に含まれる p_0 の open 近傍 U_1 , $s_0 \in \mathbb{Z}_+$ と $\eta > 0$ が存在して, 任意の $g \in C^\infty(U_1)$ に対し 2

$$(7) \quad \|g - \bar{\Phi}(u)\|_{H^{s_0}(U_1)} < \eta$$

が成り立ち, $u \in C^\infty(U_1, \mathbb{R}^N)$ で $\bar{\Phi}(u) = g$ in U_1 と成り立つものが存在する。

証明は Nash-Moser 陰関数定理に基づいて。線形化方程式

$$(8) \quad \bar{\Phi}'(u_0)v = h$$

は $p_0 \in U$ の近傍では, 解の一意性を持つとはいえから高階微分の解の評価と (8) の微分によって求める事は不可能に近い。

そこで、我々は、 $\Phi'(u)$ の exact T_2 局所石基を構成する。しかもそれは、次の性質を持つ、 U_1 の $h \in H^s(\mathbb{R}^n)$ に対し、

$$(9) \quad \|Q(u)h\|_{s-\alpha} \leq C_s \|u\|_s$$

$$(10) \quad \Phi'(u)Q(u)h = h \quad \text{in } U_1.$$

を得る。 $\|u - u_0\|_\alpha \leq \delta$, (α は十分大きく固定する)。そこで、 C_s, α, U_1 は u に無関係にある。さらに、 $\|\cdot\|_s$ は $H^s(\mathbb{R}^n)$ の norm. これは、実主要部型線型方程式の上に作用する 0 階 Γ -リエ積分作用素の群を構成する。それは実主要部型線型方程式全体の上に Transitive に作用をしとおりかつ、非常により多様体構造を持つ、Lie 群と見る事が出来る (参 Omori-Maeda-Toshioka-Kohayashi [5]). この構造 (多様体の) から (9) の評価を持つ。後は、Nash-Moser の iteration scheme を追ってこの事を定理が出来る。

5. 最後に、

等長埋込み問題の最近の結果として Lin [13] や Nakamura [4] 等が $n=2$ について調べられている。特に Lin の結果はガウス曲率が 0 を持つ、変に対してであるが、これも我々の範囲に従う。又、 $n=4$ の場合、曲率に、ある程度の条件をよければ局所等長埋込みの存在を今までのやり方で示せるが、この方法などにより利用出来るかは、完全に調べ出すのは難しい。

参考文献

- [1] R. Bryant, P. Griffiths and D. Yang, Characteristics and existence of isometric embeddings, *Duke Math. J.* 50, 893-994 (1983).
- [2] H. Jacobowitz, Local isometric embeddings, *Ann of Math. Studies* 102, 381-393 (1982).
- [3] C.S. Lin, The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of two dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly, Ph. D. dissertation at Courant Institute (1983).
- [4] G. Nakamura, Local isometric embedding of two dimensional Riemannian manifolds into $\mathbb{R}^3$ with non-positive Gaussian curvature (submitted)
- [5] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka and O. Kobayashi, regular Fréchet Lie groups I-VIII, *Tokyo J. Math.*