

与えられたブロックと一定の共有数をもつ
ブロックの個数の限界

広島大 教育 景山三平
広島大 理 辻 卓見

§ 0 はじめに

ある種の PBIB design について Shah [3] は一つの固定したブロックと共有数が一定のブロックの個数の限界を求めた。今回は Shah とは異なる方法により, Shah の結果が一般の PBIB design に拡張できることを示す。

連結な不完備ブロック計画 (v, b, r, k) の結合行列を N , NN' のスペクトル分解を

$$(1) \quad NN' = rk \left(\frac{1}{v} G_v \right) + \sum_{j=1}^t p_j P_j$$

とおく。ここで G_v はすべての要素が 1 の $v \times v$ 行列であり, また $0 < p_j < rk$ $j=1, 2, \dots, t$ である。

§ 1 $t=1$ の場合

$t=1$ すなわち NN' の rk 以外の非零固有根がただ一つのとき

(1) より $N'N$ のスペクトル分解は

$$(2) \quad N'N = rR\left(\frac{1}{b}G_b\right) + P_1Q_1, \quad Q_1 = \frac{1}{P_1}N'P_1N$$

となる。

ブロックを $B_1, B_2, \dots, B_b$, B_1 と B_i ($i=2, 3, \dots, b$) の共有数を x_i とする。今 B_1 と共有数が l ($0 \leq l \leq R$) のブロックが d 個存在したとする。ブロックの番号を適当につけかえることにより、 $x_2 = x_3 = \dots = x_{d+1} = l$ とおくと $N'N$ の d 行は $(R, l, l, \dots, l, x_{d+2}, \dots, x_b)$ となる。さらに Q_1 の d 行を $(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1b})$ とすると (2) の d 行を比較することにより

$$(3) \quad g_{11} = \frac{R(b-R)}{P_1 b}, \quad g_{1i} = \frac{bl - Rl}{P_1 b} \quad i=2, 3, \dots, d+1$$

を与える。他方 Q_1 は $\frac{1}{G_b}$ と直交する中等行列であることより次を与える。

$$(4) \quad \sum_{i=1}^b g_{1i} = 0, \quad \sum_{i=1}^b g_{1i}^2 = g_{11} = \frac{R(b-R)}{P_1 b}$$

$\bar{g} = \left(\sum_{i=d+2}^b g_{1i}\right) / (b-d-1)$ とおいて $\sum_{i=d+2}^b (g_{1i} - \bar{g})^2$ を計算する。

$$(5) \quad \sum_{i=d+2}^b (g_{1i} - \bar{g})^2 = \sum_{i=d+2}^b g_{1i}^2 - (b-d-1)\bar{g}^2$$

(3) (4) を用いて (5) の右辺を変形する。

$$\begin{aligned} \sum_{i=d+2}^b g_{1i}^2 &= \sum_{i=1}^b g_{1i}^2 - g_{11}^2 - \sum_{i=2}^{d+1} g_{1i}^2 \\ &= \frac{R(b-R)}{P_1 b} - \frac{R^2(b-R)^2}{P_1^2 b^2} - d \cdot \frac{(bl - Rl)^2}{P_1^2 b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b-d-1)\bar{g}^2 &= \frac{1}{b-d-1} \left(\sum_{i=1}^b g_{1i} - g_{11} - \sum_{i=2}^{d+1} g_{1i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{b-d-1} \left(0 - \frac{R(b-R)}{P_1 b} - d \frac{bl - Rl}{P_1 b} \right)^2 \end{aligned}$$

したがって

$$(6) \quad 0 \leq \sum_{i=d+2}^b (g_{ii} - \bar{g})^2 = \frac{A}{p_1^2 b^2 (b-d-1)}$$

ここで $A = (b-1)\theta - b^2[r(r-1) - l(b-1)]^2 - \theta d$,

$\theta = br[p_1(b-r) + r(r^2-b)] + b^2l[(b-1)l - 2r(r-1)]$ である。

(6) より $A \geq 0$ したが、

$$(7) \quad \theta d \leq (b-1)\theta - b^2[r(r-1) - l(b-1)]^2$$

をえる。一方 $A \geq 0$ より $\theta \geq 0$ である。

$\theta > 0$ のとき (7) の両辺を θ でわることにより

$$(8) \quad d \leq b-1 - \frac{b[r(r-1) - l(b-1)]^2}{r[p_1(b-r) + r(r^2-b)] + bl[(b-1)l - 2r(r-1)]}$$

をえる。

$\theta = 0$ のとき, $A \geq 0$ であったから A の形を見ることにより $r(r-1) - l(b-1) = 0$ でなければならないことがわかる。これを用いて $\theta = 0$ より p_1 について解くと $p_1 = r - l$ をえる。

さらに $\alpha = \text{rank } Q_1$ とおいて (2) の両辺の trace を調べると $br = r\alpha + (r-l)\alpha$ したがって $\alpha = \frac{br - r\alpha}{r-l} = b-1$ をえる。ゆえに $Q_1 = I_b - \frac{1}{b} G_b$ (I_b : $b \times b$ の単位行列) となり N は linked block design でなければならない。逆に N が linked block design で $l = \frac{r(r-1)}{b-1}$ ならば $\theta = 0$ となる。

以上をまとめて次の定理をえる。

[定理1] NN' の非零固有根が r, p_1 の二つになる連結な不完備ブロック計画 N において, 一つの固定したブロックと

共有数が ℓ ($0 \leq \ell \leq k$) となるブロックの数を d とするとき次の不等式が成立する。ただし linked block design で $\ell = \frac{k(r-1)}{b-1}$ の場合を除く。

$$(8) \quad d \leq b-1 - \frac{b[k(r-1) - \ell(b-1)]^2}{k[r(b-r) + k(r^2-b)] + b\ell[(b-1)\ell - 2k(r-1)]}$$

さらに等号が成立するとき、他の $b-d-1$ 個のブロックとの共有数も一定で次の式で与えられる。

$$\frac{k[r(b-r) + k(r^2-b)] - \ell b k(r-1)}{b[k(r-1) - \ell(b-1)]}$$

定理 1 の後半は、等号成立 $\Leftrightarrow g_{1d+2} = \dots = g_{1b} = \bar{g}$, より (3) と (8) の等号を用いて $\bar{g}$ を表わした後に (2) より $x_j = \frac{rk}{b} - r\bar{g}$ $j=d+2, \dots, b$ によってえられる。

定理 1 を具体的な PBIB design に適用すると次のようになる。

(i) Semi-regular group divisible PBIB design ($v = mn$, m groups of n treatments, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$, $rk - v\lambda_2 = 0$, $r_1 = r - \lambda_1 = \frac{r(v-k)}{v-m}$) において一つのブロックと共有数が ℓ であるブロックの数を d とすると、次の不等式が成立する。

$$d \leq b-1 - \frac{[k(r-1) - \ell(b-1)]^2}{c}$$

$$\text{ここで } c = D + \ell^2(b-1) - 2\ell k(r-1)$$

$$D = \frac{k^2[(v-k)(b-r) - (v-rk)(v-m)]}{v(v-m)}$$

(i) と同様の命題が次の (ii) ~ (viii) についても成立するが、こ

のうち (i) ~ (iv) は Shah [3] の結果と一致しており, (v) ~ (viii) は Shah の方法ではえられないものである。

(ii) Triangular PBIB design ($v = \frac{n(n-1)}{2}$, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$,
 $r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2 = 0$, $P_1 = r - 2\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{r(v-k)}{v-n}$)

(iii) L_2 PBIB design ($v = s^2$, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$, $r + (s-2)\lambda_1 - (s-1)\lambda_2 = 0$,
 $P_1 = r - 2\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{r(v-k)}{(s-1)^2}$)

(iv) Rectangular PBIB design ($v = v_1 v_2$, v_1 rows and v_2 columns, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $r - \lambda_1 + (v_1-1)(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$, $r - \lambda_2 + (v_2-1)(\lambda_1 - \lambda_3) = 0$
 $P_1 = r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{r(v-k)}{(v_1-1)(v_2-1)}$)

(v) Triangular PBIB design ($v = \frac{n(n-1)}{2}$, $r - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$,
 $P_1 = r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2 = \frac{r(v-k)}{n-1}$)

(vi) L_2 PBIB design ($v = s^2$, $r - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $P_1 = r + (s-2)\lambda_1 - (s-1)\lambda_2 = \frac{r(v-k)}{2(s-1)}$)

(vii) Rectangular PBIB design ($v = v_1 v_2$, $r - \lambda_1 + (v_1-1)(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$,
 $r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $P_1 = r - \lambda_2 + (v_2-1)(\lambda_1 - \lambda_3) = \frac{r(v-k)}{v_1-1}$)

(viii) Rectangular PBIB design ($v = v_1 v_2$, $r - \lambda_2 + (v_2-1)(\lambda_1 - \lambda_3) = 0$,
 $r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $P_1 = r - \lambda_1 + (v_1-1)(\lambda_2 - \lambda_3) = \frac{r(v-k)}{v_2-1}$)

§ 2 $t > 1$ の場合

(i) より $N'N$ のスペクトル分解は

(9) $N'N = rR(\frac{1}{b}G_b) + \sum_{j=1}^t P_j Q_j$, $Q_j = \frac{1}{P_j} N'P_j N$ $j=1, 2, \dots, t$
となる。

§1と同様にして, B_1 と共有数が l のブロックを $B_2, \dots, B_{d+1}$,
 x_i を B_1 と B_i ($i=d+2, \dots, b$)の共有数とすると $N'N$ の第 i 行は
($R, l, \dots, l, x_{d+2}, \dots, x_b$)となる。さらに $\sum_{i=1}^t P_i Q_i$ の第 i 行を
($S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ib}$), Q_j の(1.1)-要素を g_j ($j=1, 2, \dots, t$)とおく(9)の
第 i 行を比較することにより

$$(10) \quad S_{ii} = \frac{R(b-r)}{b} (= \sum_{j=1}^t P_j g_j), \quad S_{ii} = l - \frac{rR}{b} \quad i=2, 3, \dots, d+1$$

である。他方 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ は互いに直交し, かつ $\frac{1}{b}G_b$ とも直交
する巾等行列であることより次をえる。

$$(11) \quad \sum_{i=1}^b S_{ii} = 0, \quad \sum_{i=1}^b S_{ii}^2 = \sum_{j=1}^t P_j^2 g_j, \quad g_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, t$$

$$\bar{S} = (\sum_{i=d+2}^b S_{ii}) / (b-d-1) \text{ とおく } \text{と } \S 1 \text{ と同様にして}$$

$$(12) \quad 0 \leq \sum_{i=d+2}^b (S_{ii} - \bar{S})^2 = \sum_{j=1}^t P_j^2 g_j - \left\{ \frac{R(b-r)}{b} \right\}^2 - d \left\{ \frac{bl-rR}{b} \right\}^2 \\ - \frac{1}{b-d-1} \left\{ \frac{R(b-r) + d(bl-rR)}{b} \right\}^2$$

(12) を変形すると

$$0 \leq b^2(b-d-1) \left(\sum_{j=1}^t P_j^2 g_j \right) - (b-d-1)R^2(b-r)^2 - d(b-d-1)(bl-rR)^2 \\ - \{ R(b-r) + d(bl-rR) \}^2$$

したがって次をえる。

$$(13) \quad \theta d \leq \theta(b-1) - b[R(r-1) - l(b-1)]^2$$

$$\text{ここで } \theta = b \left(\sum_{j=1}^t P_j^2 g_j \right) + R^2(r^2-b) + bl[(b-1)l - 2R(r-1)].$$

(13) より $\theta \geq 0$ かつ $\theta=0$ ならば $R(r-1) - l(b-1) = 0$ である。

したがって $k(r-1) \neq l(b-1)$ のとき (13) の両辺を θ でわることにより次の不等式がえられる。

$$(14) \quad d \leq b-1 - \frac{b[k(r-1)-l(b-1)]^2}{\theta}$$

以上をまとめて次の定理をえる。

[定理2] 連結な不完備ブロック計画 $N(b, r, k)$ において, NN' の k と異なる非零固有根を $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$ とするとき, 一つの固定したブロックと共有数が l ($l \neq \frac{k(r-1)}{b-1}$) となるブロックの個数を d とするとき次の不等式が成立する。

$$(14) \quad d \leq b-1 - \frac{b[k(r-1)-l(b-1)]^2}{\theta}$$

ここで $\theta = b \left(\sum_{j=1}^t \rho_j^2 g_j \right) + k^2(r^2-b) + bl[(b-1)l - 2k(r-1)]$, g_j は N の第一列を固定したブロックとすると, N の第一列ベクトルを g とおき, $g_j = \frac{1}{g} g' P_j g$ $j=1, 2, \dots, t$ により与えられるものであり, P_j は (1) で与えられたものである。

(14) は固定したブロックの構造によつて定まる $g_1, g_2, \dots, g_t$ に depend する不等式であるが, これをブロックの構造に depend しない不等式にすることを考える (当然, 評価が甘くなることは避けられない。)。

ρ_1 を $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$ のうちで最大の固有根とするとき (10) (11) より $\sum_{j=1}^t \rho_j^2 g_j \leq \rho_1 \frac{k(b-r)}{b}$ をえる。したがって次をえる。

$$(15) \quad d \leq b-1 - \frac{b[r(r-1) - \lambda(b-1)]^2}{r[P_1(b-r) + r(r^2-b)] + b\lambda[(b-1)\lambda - 2r(r-1)]}$$

(14) (15) を具体的な PBIB design で計算した例を一つ上げておく。

Group divisible PBIB design ($v=m \cdot n$, m groups of n treatment, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$) においては $P_1 = rk - v\lambda_2$, $P_2 = r - \lambda_1$ であり,

$$NN' = rk(\frac{1}{v}G_v) + P_1\{\frac{m}{v}(I_m \otimes G_n) - \frac{1}{v}G_v\} + P_2\{I_v - \frac{1}{n}(I_m \otimes G_n)\} \text{ である。}$$

Bose, Clatworthy, Shrikhande の PBIB design の Table [1] にある R19 について調べてみる。R19 はパラメーターが $v=12$, $b=32$, $r=8$, $k=3$, $m=2$, $n=6$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ の正則型 group divisible design で $P_1=12$, $P_2=6$ である。Table の第 1 番目のブロック (1, 3, 7) $\theta_1 = \frac{1}{16}$, $\theta_2 = \frac{1}{4}$ と第 13 番目のブロック (1, 3, 4) $\theta_1 = \frac{1}{144}$, $\theta_2 = \frac{13}{36}$ をそれぞれ固定したブロックと考えて $\lambda (=0, 1, 2, 3)$ に対する (15) (14) の限界, 及び実際の d の値を表にしたものが次の表である。

ブロック (1, 3, 7)

λ	0	1	2	3
(15)	18	27	8	3
(14)	14	24	5	2
d	13	15	3	0

ブロック (1, 3, 4)

λ	0	1	2	3
(15)	18	27	8	3
(14)	11	22	4	1
d	11	19	1	0

参 考 文 献

- [1] R.C. Bose, W.H. Clatworthy and S.S. Shrikhande,
Tables of partially balanced incomplete block designs with
two associate classes. North Carolina Agricultural
Experimental Bulletin, No. 107, 1954.
- [2] S. Kageyama and T. Tsuji, General upper bound for
the number of blocks having a given number of treatments
common with a given block. J. Statist. Planning Inf.
1, No. 3 (to appear)
- [3] S.M. Shah, On the block structure of certain
partially balanced incomplete block designs.
Ann. Math. Statist. 37(1966), 1016-1020.