

Φ -like holomorphic mappings

東京電機大 鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)

単位円上の単葉函数論の基本定理の1つに「歪曲定理」がある。特に、単葉函数族の函数解析的研究においては、「歪曲定理」が最も重要な役割を演ずる。しかし、多変数函数においては、1933年に H. Carlan がすでに述べている様に、歪曲定理、Growth theorem は成り立たない。しかし、1991年に R. Barnard, C.H. FitzGerald and S. Gong は $\mathbb{C}^n$ の単位球の starlike 単葉写像に対して Growth theorem が成り立つ事を示した。しかし本講の定理 3.1 により starlike 以外の単葉写像に対しては Growth theorem は成り立たない様に思われる。

本講における Φ -like の概念は1変数の場合に L. Brickman [2] によって導入され、K.R. Gurganus [5] によって、 $\mathbb{C}^n$ 更に Banach 空間に拡張されたもので、単葉写像の幾何学的性質の研究には有効と思われる。なお、本講の諸定理は $\mathbb{C}^n$ の場合に述べているが容易に Hilbert 空間, Banach 空間に拡張できる。

9.1.

$\mathbb{C}^n$ の点 z を列ベクトル

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

で表し, z^* を z の転置共役ベクトルとする。 $z, w \in \mathbb{C}^n$ の内積及びノルムを

$$\langle z, w \rangle := w^* z = \sum_{j=1}^n \overline{w_j} z_j, \quad \|z\| := \sqrt{\langle z, z \rangle}$$

と定義する。この時, $\mathbb{C}^n$ は n -次元 Hilbert 空間になる。 $\mathbb{C}^n$ の原点を中心とする単位球を B で表す, i.e., $B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$.

$\mathbb{C}^m$ の領域から $\mathbb{C}^n$ への写像 $f(z)$ を列ベクトル

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$$

で表し, $f(z)$ の逆写像 (もし存在すれば) を $f^{-1}(z)$ で表す。

各成分が正則関数のとき, $f(z)$ は正則であるという。写像 $f(z)$ の Jacobian 行列を

$$Df(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

で表し, Jacobian を $J_f(z)$ で表す。

正則写像 $f(z)$ に対して, $J_f(z) \neq 0$ のとき局所写像 (1-1) である。また, $f(0) = 0$ (f の定義域が原点を含むとき)

で, $Df(0) = I$ (単位行列) のとき, f は正規化されているという。

Ω を原点 0 を含む $\mathbb{C}^n$ の領域とし, $\Phi(z)$ を Ω から $\mathbb{C}^n$ への正則写像で, $\Phi(0) = 0$ とし,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\|z\|^2} \Re(z^* D\Phi(z) \cdot z) \right\} > 0$$

(存在し, 正である) とする, ここで $\Re$ は実部とする。このとき, 任意の $X \in \Omega$ に対して, 初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -\Phi(w), \quad w(0) = X \quad (1)$$

が解 $w := w_X(t) = w(t, X)$ ($t \geq 0$) を持ち, $\forall t \geq 0$ に対して, $w_X(t) \in \Omega$ で $w_X(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であるとき, 領域 Ω は Φ -like であるという。微分方程式 (1) が解 w ($t \geq 0$) を持てば一意である, そして, 原点 0 は (1) の漸近安定臨界点である。

B から $\mathbb{C}^n$ への正則写像 $f(z)$ に対して, $f(B)$ が $\mathbb{C}^n$ の Φ -like 領域で, $f(z)$ が B で単葉であるとき, $f(z)$ は Φ -like 写像であるという。

次の実像族は重要である。 (D は $\mathbb{C}^n$ の領域)

$\mathcal{H}(D) := D$ 上正則写像全体.

$\mathcal{P}(B) := \{h(z) \in \mathcal{H}(B) \mid \Re\{z^* h(z)\} > 0, (z \in B, z \neq 0)\}$

§ 2. Φ -like mappings

定理 2.1. $f(z)$ を正規化 $z \mapsto z$ 正則写像とする.

更に, $f(z)$ が Φ -like ならば,

$$(Df(z))^{-1} \Phi(f(z)) \in \mathcal{O}(B) \quad (2)$$

で,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\|z\|^2} z^* (Df(z))^{-1} \Phi(f(z)) \right\} > 0 \quad (3)$$

(存在し, 正である), こと $(\cdot)^{-1}$ は逆行列.

証明. (2) に対しては, (f の Φ -like 性により)

$$\operatorname{Re} \{ z^* (Df(z))^{-1} \Phi(f(z)) \} \geq 0$$

を示せばよい. 仮定により, $f(B)$ は Φ -like 領域であるから, $\forall X \in f(B)$ に対して, 微分方程式 (1) はただ 1 つの解 $w = w(t, X)$ を持つ. 故に, 任意 $z \in B$ に対して, $X = f(z)$, $g(t, z) := f^{-1}(w(t, X))$ ($\forall t \geq 0$) とおくと,

$$w(t, X) = f(g(t, z)), \quad w(0, X) = X,$$

$$g(t, z) \in B \quad (t \geq 0), \quad g(0, z) = z,$$

$$Df(g(t, z)) \frac{dg}{dt} = \frac{dw}{dt} = -\Phi(w)$$

$$\frac{d}{dt} g(0, z) = -(Df(z))^{-1} \Phi(f(z))$$

従って, Schwarz の補題により

$$\|g(t, z)\| \leq \|z\|.$$

故に、次の式を得る

$$\begin{aligned} z^*(Df(z))^{-1}\Phi(f(z)) &= -z^* \frac{dg}{dt}(0, z) \\ &= -z^* \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t, z) - g(0, z)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|z\|^2 - z^*g(t, z)}{t} \end{aligned}$$

故に、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ z^*(Df(z))^{-1}\Phi(f(z)) \} &= \operatorname{Re} \left\{ -z^* \frac{dg}{dt}(0, z) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{\|z\|^2 - z^*g(t, z)}{t} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

十分小さい $\|z\|$ に対して、次の式を得る

$$(Df(z))^{-1}\Phi(f(z)) = (Df(0))^{-1}D\Phi(0)(Df(0))z + o(\|z\|)$$

故に、 f の Φ -like 性によつて、(3) が成立し、正である事が導かれる。 □

定理 2.1 の逆には次の定理が必要である。

定理 2.2. (Pfaltzgraff []) $k(t, z)$ を次の条件を満たす $B \times [0, \infty)$ から $\mathbb{C}^n$ への写像とする:

- (a) $k(t, 0) = 0$, $Dk(0) = I$,
- (b) $\forall t > 0$ に対して, $k(t, z) \in \mathcal{Y}(B)$,
- (c) $\forall z \in B$ に対して, $k(t, z)$ は t の可測函数である,

(d) $\forall T > 0, 0 < \delta < 1$ に対して, 次の条件を満たす定数

$K(T, \delta)$ が存在する:

$$\|h(t, z)\| \leq K(T, \delta) \quad (\|z\| \leq \delta, 0 \leq t \leq T).$$

この時, $\forall z \in B$ に対して, 初期値問題

$$\frac{dv}{dt} = -h(t, v) \quad (\text{a.e. } t \geq 0)$$

$$v(0) = z$$

は, ちょうど1つの解: $v(t, z) = e^{-t} I z + \dots \in B$ を持つ.

更に, t を固定すると, $v(t, z)$ は B 上の単葉 Schwarz 函数である.

定理 2.3. $f(z)$ を B 上の正規化された正則写像で, 局所単葉とある. $\Phi(z) \in \mathcal{H}(B)$ の極限値(3)が存在し, 正とある. この時, $(Df(z))^{-1} \Phi(f(z)) \in \mathcal{H}(B)$ ならば, $f(B)$ は Φ -like 領域で, $f(z)$ は単葉である. 従って, $f(z)$ は Φ -like 写像である.

証明. $h(z) := (Df(z))^{-1} \Phi(f(z))$ ($z \in B$) とおく. そうすると, $h(z)$ は B で正則で, $\Re \{z^* h(z)\} > 0$. 従って, 定理 2.2 によつて, $\forall z \in B$ に対して, 初期値問題

$$\frac{dz}{dt} = -h(z) = -(Df(z))^{-1} \Phi(f(z))$$

$$\zeta(0) = z$$

ほたて1つの解 $\zeta := \zeta_z(t) = \zeta(t, z)$ ($t \geq 0$) を持つ。いま,

$$w := w_z(t) := f(\zeta_z(t)) \quad (t \geq 0)$$

とおくと,

$$\frac{dw}{dt} = Df(\zeta) \frac{d\zeta}{dt} = -Df(\zeta) h(\zeta) \quad (4)$$

$$= -\Phi(f(\zeta)),$$

$$w_z(0) = f(\zeta_z(0)) = f(z)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\zeta_z(t)) = f(0) = 0$$

従って, $\Omega := f(1B)$ とおくと, $w_z(t)$ は(1)の解で, $w_z(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) とほり, $\Omega = f(1B)$ は Φ -like 領域である。

また, $z, z' \in 1B$ に対して, $f(z) = f(z')$ とあると, 上記の式より, $w_z(0) = w_{z'}(0)$ 。また, (4)の解の一意性により, $w_z(t) = w_{z'}(t)$ ($t \geq 0$), 更に, $J_f(z) \neq 0$ の $\zeta_z(t), \zeta_{z'}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) であるから, $\zeta_z(t) = \zeta_{z'}(t)$ ($t \geq 0$)。従って,

$$z = \zeta_z(0) = \zeta_{z'}(0) = z'.$$

よって, $f(z)$ は単葉である。

系. $f(z)$ を, $\mathcal{H}(B)$ の正規化エホを局所写像と
 する。この時, $f(z)$ が写像であるための必要十分条件は,
 或る Φ に対して $f(z)$ が Φ -like であることである。

例. [1] $f(z)$ が starlike であるための必要十分条件
 は $\Phi(w) = w$ となることである。

[2] $\Phi(w) = Aw$, 而

$$A = U^{-1} D U, \quad U: \text{unitary}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ (対角行列)}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_j > 0$$

のとき, $f(z)$ は spiral-like という。

§ 3. The growth theorem.

$f(z)$ を $\mathcal{H}(B)$ の正規化エホ写像とする。 $f(z)$ を
 Φ -like とすると, $\forall z_0 \in B$ に対して, 初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -\Phi(w), \quad w(0) = f(z_0)$$

は解曲線 $w(t) (t \geq 0) \in f(B)$ を持つ。(曲線 $w(t)$ は
 $f(z_0)$ から原点 0 への向きが正の向きである。) $z(t)$ を曲線
 $w(t)$ の原像とすると, 即ち, $z(t) := f^{-1}(w(t)) (t \geq 0)$ 。

従つて, $z(t)$ は B 内の解析曲線であり, $Df^{-1}(w) = (Df(z))^{-1}$ であるから, 次の式を得る

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= Df^{-1}(w) \frac{dw}{dt} = (Df(z))^{-1} (-\Phi(w)) \\ &= -(Df(z))^{-1} \Phi(f(z(t))).\end{aligned}$$

$s(t_0)$ を原点 0 から $z(t_0)$ までの曲線 $z(t)$ の長さであると,

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \left\| \frac{dz}{dt} \right\| dt, \quad \left\| \frac{dz}{dt} \right\| = \left\| (Df(z))^{-1} \Phi(f(z(t))) \right\|.$$

$$\frac{ds}{dt} = - \left\| (Df(z))^{-1} \Phi(f(z)) \right\|.$$

故に,

$$\begin{aligned}\frac{df(z(s))}{ds} &= \frac{df(z(t))}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \frac{df(z(t))}{dt} \\ &= \frac{1}{\left\| (Df(z))^{-1} \Phi(f(z)) \right\|} \Phi(f(z(t)))\end{aligned} \tag{5-}$$

これから, 次の定理が得られる:

定理 3.1. A を正値 Hermite 行列とし, λ, A をそれぞれ A の最小及び最大固有値とし, $\Phi(w) = Aw$ とする。 $f \in \mathcal{H}(B)$ が正規化された Φ -like 写像とあると, 次の式が成り立つ:

$$\left\{ \frac{(1 + \|z(s_1)\|)^2}{\|z(s_1)\|} \cdot \frac{\|z(s_2)\|}{(1 + \|z(s_2)\|)^2} \right\}^{1/\Lambda} \leq \frac{\|f(z(s_2))\|}{\|f(z(s_1))\|}$$

$$\leq \left\{ \frac{(1 - \|z(s_1)\|)^2}{\|z(s_1)\|} \cdot \frac{\|z(s_2)\|}{(1 - \|z(s_2)\|)^2} \right\}^{1/\Lambda}$$

($0 < s_1 < s_2 < \infty$)

系 (Barnard, Fitzgerald and Gong [1]) 正規化された starlike 写像 $f(z)$ に対して, 次の式が成り立つ:

$$\frac{\|z\|}{(1 + \|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1 - \|z\|)^2} \quad (z \in B)$$

定理 3.1 の証明には次の補題が必要である:

補題 3.2. A, λ, Λ を定理 3.1 のものとする.
この時, $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\lambda \Re(z^* w) \leq \Re(z^* A w) \leq \Lambda \Re(z^* w),$$

補題 3.3 (Pfaltzgraph [8]) $g(z) \in \mathcal{P}(B)$ を正規化された写像とすると, $\forall z \in B$ に対して,

$$\|z\|^2 \frac{1 - \|z\|}{1 + \|z\|} \leq \Re(z^* g(z)) \leq \|z\|^2 \frac{1 + \|z\|}{1 - \|z\|}.$$

補題 3.4. $A, \lambda, \Lambda, \Phi(w)$ を定理 3.1 のものとする.
この時, $\forall z \in B$ に対して, 次の式が成り立つ.

$$\operatorname{Re} \{ z^* (Df(z))^{-1} A f(z) \} = \|z\| \| (Df(z))^{-1} A f(z) \| \cos \theta$$

$$\operatorname{Re} \{ z^* (Df(z))^{-1} f(z) \} = \|z\| \| (Df(z))^{-1} f(z) \| \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \lambda \|z\| \frac{1 - \|z\|}{1 + \|z\|} &\leq \| (Df(z))^{-1} A f(z) \| \cos \theta \\ &\leq \Lambda \|z\| \frac{1 + \|z\|}{1 - \|z\|} \end{aligned}$$

ここで θ は z と $(Df(z))^{-1} A f(z)$ との間の角である。

定理 3.1 の証明

$$g(s) := \|f(z(s))\|^2 = (f(z(s)))^* f(z(s)).$$

とすると, (5) より

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ (f(z(s)))^* \frac{df}{ds}(z(s)) \right\} \\ &= \frac{2}{\| (Df(z(s)))^{-1} A f(z(s)) \|} (f(z(s)))^* A f(z(s)). \end{aligned}$$

この時, 補題 3.2 より

$$\lambda g(s) \leq \operatorname{Re} \{ (f(z(s)))^* A f(z(s)) \} \leq \Lambda g(s)$$

よって, 補題 3.4 より, 次の式を得る:

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda}{\Lambda} \cdot \frac{1 - \|z(s)\|}{\|z(s)\| (1 + \|z(s)\|)} \cos \theta &\leq \frac{1}{g(z(s))} \frac{dg}{ds} \\ &\leq \frac{2\Lambda}{\lambda} \cdot \frac{1 + \|z(s)\|}{\|z(s)\| (1 - \|z(s)\|)} \cos \theta \end{aligned}$$

この不等式を曲線 $Z(s)$ 上に積分すれば、定理の式が得られる。

References

- [1] R.W. Barnard, C.H. FitzGerald and S. Gong, The growth and $\frac{1}{4}$ -theorems for starlike mappings in $\mathbb{C}^n$, *Pacific J. Math.* 150(1991), 13-22.
- [2] L. Brickman, Φ -like analytic functions. I, *Bull. Amer. Math. Soc.* 79(1973), 555-558.
- [3] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, and Tokyo, 1983.
- [4] P.L. Duren and W. Rudin, Distortion in several variables, *Complex Variables Theory Appl.* 5(1986), 323-326.
- [5] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory*, Second Edition, Interscience Publishers, New York and London, 1963.
- [6] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.
- [7] M.C. Pease III, *Methods of Matrix Algebras*, Academic Press, New York and London, 1965.
- [8] J.A. Pfaltzgraff, Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, *Math. Ann.* 210(1974), 55-68.
- [9] J.A. Pfaltzgraff and T.J. Suffridge, Close-to-starlike holomorphic functions of several variables, *Pacific J. Math.* 57(1975), 271-279.
- [10] T.J. Suffridge, The principle of subordination applied to functions of several variables, *Pacific J. Math.* 33(1970), 241-248.
- [11] T.J. Suffridge, Starlike and convex maps in Banach spaces, *Pacific J. Math.* 46(1973), 575-589.
- [12] K.R. Gurganus, Φ -like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 205(1975) 389-406
- [13] T.J. Suffridge, Starlike, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions
Lecture Notes in Math. 599(1976) 146-158.