

## 低レイノルズ数乱流における乱流粘性係数

崇城大学工学部総合教育物理 柴田博史 (SHIBATA, Hiroshi)  
Department of General Education, Faculty of Engineering,  
Sojo University

### 1. はじめに

乱流粘性についての研究は長い歴史を持っているが、未解決な部分が多い[1]。その中の一つに乱流の輸送現象が挙げられよう。流体は乱流状態に遷移すると、流体の持つ輸送特性が大きく変化する。輸送特性は具体的に、粒子拡散係数、粘性係数、熱伝導率によって表されるが、流体は静止した状態から、層流、乱流へと遷移することによってそれらの値が大きく変化する[2]。また、新たな定義を必要とする場合もある。

乱流による輸送現象の代表的なものに、乱流粘性係数がある。私たちの身のまわりで、Fig.1 に見る様に、レイノルズ数が 100 前後でカルマン渦列が生じている[3]。一方、Fig.2 には韓国の済州島沖のカルマン渦列が、気象衛星からの写真によって捕らえられている[4]。これら 2 つの渦列は、同じ様なパターンと時間発展を示す。これら 2 つの渦列を作る流体に対して、レイノルズ数の相似則を適用すると、済州島沖の流体が持つ粘性係数は分子粘性係数の  $10^7$  程度にもなってしまう[5]。この粘性係数を乱流粘性係数と呼ぶ。

この講究録では、乱流粘性係数に焦点をあて、その謎、つまり乱流粘性係数は済州島沖では分子粘性係数よりも桁はずれに大きくなる理由とそのメカニズムをつまびらかにしたいと思う。



Fig.1 Kármán vortex street behind the pile in water by the courtesy of Tech. Offi. K. Ishii and Prof. T. Karasudani of the Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University.

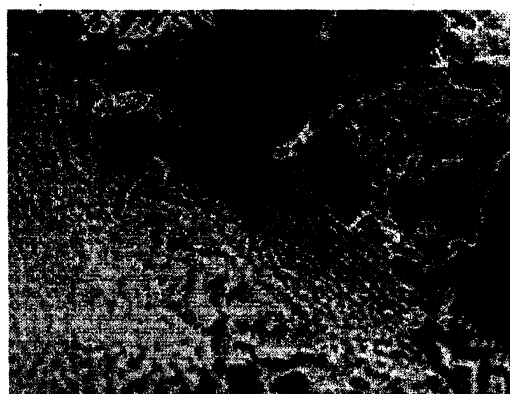


Fig.2 Kármán vortex street behind the Chejudo by the courtesy of Prof. T. Kikuchi of Kochi University.

## References

- [1] U. Frisch, Turbulence, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [2] S. B. Pope, Turbulent Flows, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [3] M. V. Dyke, An Album of Fluid Motion, The Parabolic Press, Stanford, 1982.
- [4] <http://weathernews.jp/satellite/>, Weathernews Inc.
- [5] H. Mori, Chaos, Iwanami Shoten, Tokyo, 1995 [in Japanese].

## 2. LES と乱流粘性係数

ここでは乱流粘性の本質とその導出について説明を行う。乱流粘性の研究は長い歴史を持つが、具体的に数値計算に取り入れられる様になったのは、ラージエディシミュレーション (LES) が行われる様になってからであろう [6,7]。LES では空間を粗視化するので、通常のナビエ・ストークス方程式と異なり、粗視化したことによる付加項が平均流に対する運動方程式に加わる。

静止した流体に対して成立するナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_k u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu_0 \nabla^2 u_i + f_i \quad (1)$$

の様に書き表すことができる。ここで  $u_i$  はある位置と時刻における流体の速度  $\bar{u}$  の  $i$  成分、 $\rho$  は流体の密度、 $\nu_0$  は分子粘性係数を密度  $\rho$  で割った動粘性係数である。 $p$  は流体に働く圧力、 $f_i$  は流体に加わる外力  $\bar{f}$  の  $i$  成分である。

この方程式は、分子粘性係数が良く働くスケール、あるいは良く働く流体の運動状態での流体に対する運動方程式である。流体を非常に大きなスケールで見る、あるいは流体の運動が乱れ、エネルギー散逸に影響をおよぼす様になると、方程式(1)はそのままでは流体に対して適用できなくなる。ここで、方程式(1)は余儀なく変更される。大きなスケール  $l$  で流体の運動を見ようとする、長さ  $l$  より短い流体の運動は消去されるので、方程式(1)はそのまま適用できない。そこで、方程式(1)を長さ  $l$  で粗視化する必要がある。長さ  $l$  で平均を取ると、方程式(1)は

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu_0 \nabla^2 U_i - \frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

となる。ここで、 $U_i$ ,  $P$ ,  $Q_{ij}$  は、

$$U_i = \int d\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}') u_i(\vec{r}', t), \quad (3)$$

$$P = \int d\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}') p(\vec{r}', t), \quad (4)$$

$$Q_{ij} = \int d\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}') u_i(\vec{r}', t) u_j(\vec{r}', t) - \int d\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}') u_i(\vec{r}', t) \int d\vec{r}'' G(\vec{r} - \vec{r}'') u_j(\vec{r}'', t), \quad (5)$$

である。ここで積分は、乱流粘性係数を評価したい空間にわたってとる。また、長さ  $l$  にわたって平均をとる重み関数  $G(\vec{r})$  は、規格化条件

$$\int d\vec{r} G(\vec{r}) = 1 \quad (6)$$

を満たす。重みには様々なものが考えられるが、ここでは空間によらない一様なものを仮定する。方程式(2)を

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 U_i \quad (7)$$

の様に書きかえて,  $\nu$  を乱流粘性係数と定義する[7,8]。乱流粘性係数  $\nu$  の計算には様々なモデルが考えられてきたが, ここでは, 分子粘性係数を計算した E. Helfand の方法を用いる[9]。Helfand に沿って乱流粘性係数を統計力学的に表現する。まず, 式(7)を線形化すると,

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} \quad (8)$$

となる。この解は  $U_y|_{|\vec{r}| \rightarrow \pm\infty} = 0$  とすると,

$$U_y = \frac{1}{Z_y} \exp \left[ -\frac{(x - x'_0)^2}{4\nu t} \right] \quad (9)$$

である。粗視化される流体粒子の速度  $\bar{u}$  の各成分に対してガウス分布が成立すると仮定すると,

$$\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \lim_{V \rightarrow \infty} \langle [G_t - G_0]^2 \rangle, \quad (10)$$

$$G_t = \frac{1}{\sqrt{V k T}} \sum_{i=1}^N x_i(t) p_{iy}(t) \quad (11)$$

を得る。式(9)は, 粗視化する長さ  $l$  が十分長いとすると,

$$\nu = \frac{V}{kT} \int_0^\infty dt C(t), \quad (12)$$

$$C(t) = \langle J_{xy}(t) J_{xy}(0) \rangle - \langle J_{xy}(t) \rangle \langle J_{xy}(0) \rangle, \quad (13)$$

$$J_{xy}(t) = \int_V d\vec{r} \rho(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) u_y(\vec{r}, t) \quad (14)$$

と書きかえられる。ここで,  $\langle \dots \rangle$  は一つの解軌道に沿った十分長い時間にわたる平均,  $V$  は乱流粘性係数を評価したい部分の体積,  $k$  はガウス分布にともなう定数,  $T$  は流体の温度,  $\rho(\vec{r}, t)$  は空間  $\vec{r}$ , 時間  $t$  における流体の密度である。式(12)を使って着目する空間における乱流粘性係数を求めようというのが, 私たちのねらいである[10-12]。

## References

- [6] P. Sagaut, Large Eddy Simulation for Incompressible Flows, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2001.
- [7] S. Kida and S. Yanase, Turbulence Dynamics, Asakura Shoten, 1999[in Japanese].
- [8] P. A. Davidson, Turbulence, Oxford Univ. Press, New York, 2004.
- [9] E. Helfand, Phys. Rev. 119, 1(1960).
- [10] H. Shibata, Physica A 333, 71(2004).
- [11] H. Shibata, Physica A 345, 448(2005).
- [12] H. Shibata, Physica A 352, 335(2005).

## 3. 乱流粘性係数の評価

2 節で得た公式(12)を使って, 具体的に乱流粘性係数を評価してみる。対象とする系は大きさ  $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$  の空間 3 次元一様乱流である。シミュレーションには標準的な格子ボルツマン法を用いる。周期境界条件を設定し, 外力  $\vec{K}$  には

$$\vec{K} = (0, K_y(z, t), 0), \quad (15)$$

$$\langle K_y(z, t) K_y(z, t') \rangle = \delta(t - t') \quad (16)$$

を用いる。ただし、外力  $\vec{K}$  の偏差  $\sigma$  は  $\sigma = |10^{-6} \times \sin(4z)|$  とする。格子点数は  $100 \times 100 \times 100$  とする。評価する乱流粘性係数は、この系全体での値となる。

このシミュレーションによる乱流は等方的でないので、計算する乱流粘性係数も、

$$\nu_{xy} = \frac{V}{k_{xy} T} \int_0^\infty dt C_{xy}(t), \quad (17)$$

$$\nu_{yz} = \frac{V}{k_{yz} T} \int_0^\infty dt C_{yz}(t), \quad (18)$$

$$\nu_{zx} = \frac{V}{k_{zx} T} \int_0^\infty dt C_{zx}(t) \quad (19)$$

の3種類である。ここで、

$$C_{xy}(t) = \langle J_{xy}(t) J_{xy}(0) \rangle - \langle J_{xy}(t) \rangle \langle J_{xy}(0) \rangle, \quad (20)$$

$$C_{yz}(t) = \langle J_{yz}(t) J_{yz}(0) \rangle - \langle J_{yz}(t) \rangle \langle J_{yz}(0) \rangle, \quad (21)$$

$$C_{zx}(t) = \langle J_{zx}(t) J_{zx}(0) \rangle - \langle J_{zx}(t) \rangle \langle J_{zx}(0) \rangle \quad (22)$$

である。さらに

$$J_{xy}(t) = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) u_y(\vec{r}, t), \quad (23)$$

$$J_{yz}(t) = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}, t) u_y(\vec{r}, t) u_z(\vec{r}, t), \quad (24)$$

$$J_{zx}(t) = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}, t) u_z(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) \quad (25)$$

である。レイノルズ数は、

$$\text{Re} = \frac{ul}{\nu_0} = \frac{u2\pi}{\frac{1}{3}(\tau - 0.5)} \quad (26)$$

より評価する。ここで、速さ  $u$  は、

$$u = \langle \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \rangle \quad (27)$$

である。 $\langle \dots \rangle$  は時間と空間両方にわたる平均を意味する。 $\tau$  は緩和時間で、ここでは 1.80 と 1.90 に設定する。その結果得られるレイノルズ数は、 $\tau = 1.80$  で 8.6051、 $\tau = 1.90$  では 19.0916 である。

計算結果を Fig.3 と Fig.4 に示す。Fig.3 には、運動量流れ  $J_{xy}$ 、 $J_{yz}$ 、 $J_{zx}$  の時系列が示されている。レイノルズ数が 19.0916 の場合の方が 8.6051 の場合よりも、運動量流れの値の揺れ幅がかなり大きいことがわかる。また、外力の性質より、 $J_{xy}$  と  $J_{yz}$  の揺れ幅が  $J_{zx}$  の揺れ幅よりもかなり大きい。Fig.4 には、運動量流れの2時間相関関数  $C_{xy}(t)$ 、 $C_{yz}(t)$ 、 $C_{zx}(t)$  が示されている。アンサンブル数は 200 である。Fig.3 の結果からも推測できる様に、レイノルズ数が 19.0916 の場合の方が 8.6051 の場合よりも、2時間相関関数のとる値は大きい。これから、乱流粘性係数の値はレイノルズ数が多いほど大きいことが推測される。また、乱流粘性係数  $\nu_{xy}$ 、 $\nu_{yz}$  は  $\nu_{zx}$  よりも大きいことが推測される。

いまこの段階では、運動量流れの2時間相関関数の関数形が十分収束しているとは

言えず、また、すそのが十分飽和しているとは言えない。アンサンブル数をさらに増やし、時間 $t$ をさらに大きな値に設定する必要があるだろう。しかし、レイノルズ数が大きいときの方が小さいときに比べ、運動量流れの2時間相関関数のとる値が大きいことより、乱流粘性係数はレイノルズ数が大きいほど大きいと言えよう。

#### 4. 結語

乱流粘性係数をラージエディシミュレーションをもとに考察した。ここでは、Helfand の考え方を援用して、乱流粘性係数の表式を得た。また、この表式をもとに、空間3次元一様乱流の乱流粘性係数を推測した。乱流粘性係数はレイノルズ数が大きいほど大きいということが推測される。計算をさらに進め、このことを確実にするとともに、乱流粘性係数のレイノルズ数依存性を調べて行く予定である。

#### 謝辞

この研究は、九州大学応用力学研究所及川研究室のスタッフの皆さんから有益な助言をもらっており、加えて、同研究所の共同利用研究 18ME-2 より補助してもらっています。また、数値計算のプログラミングに際し、九州大学理学部の成清修さんに多くのノウハウをもらっています。ここに感謝いたします。

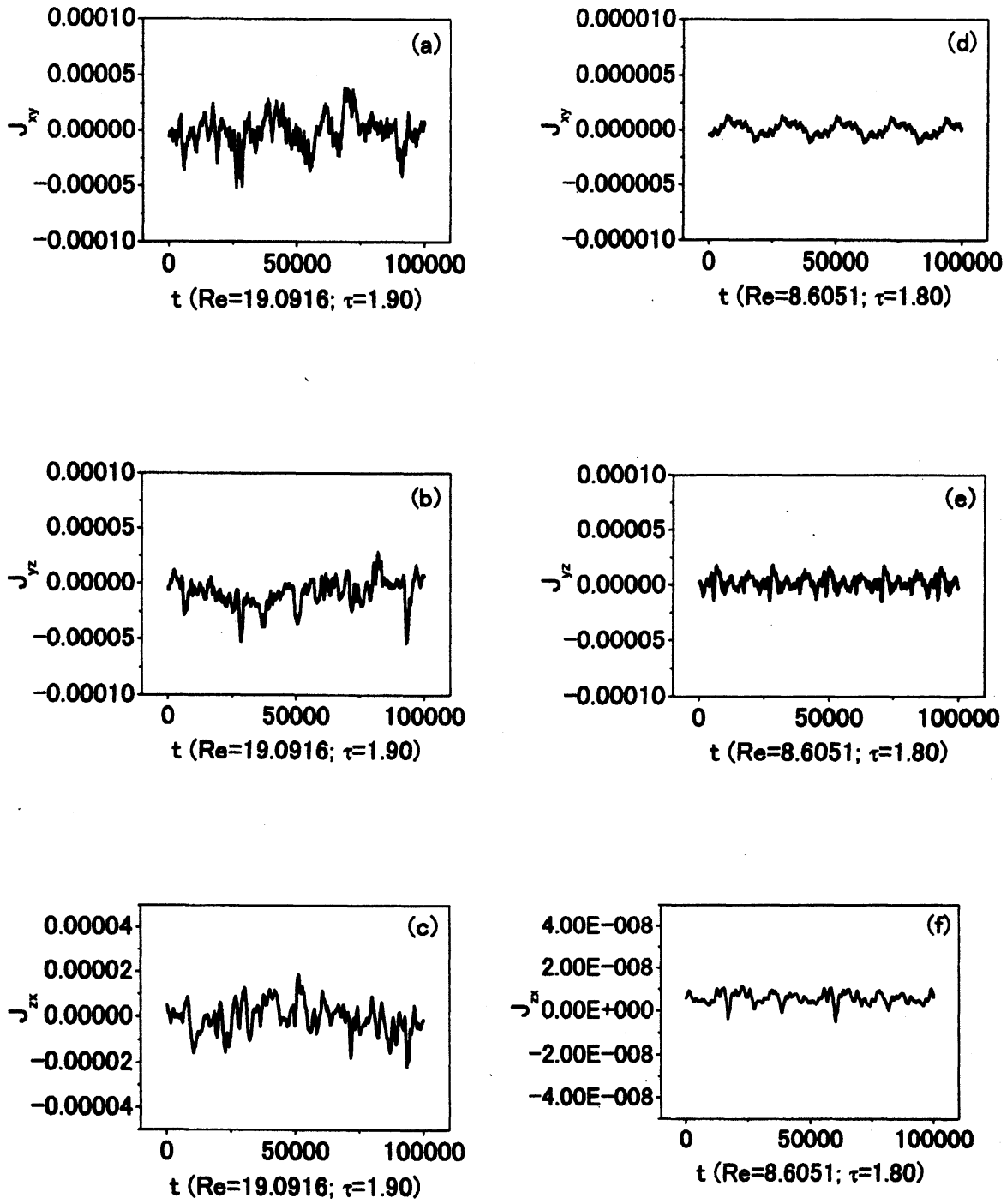


Fig.3

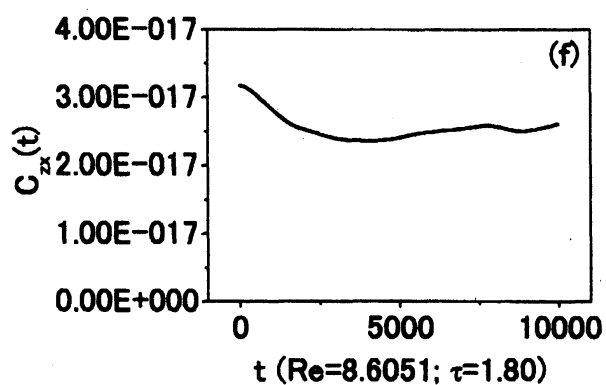
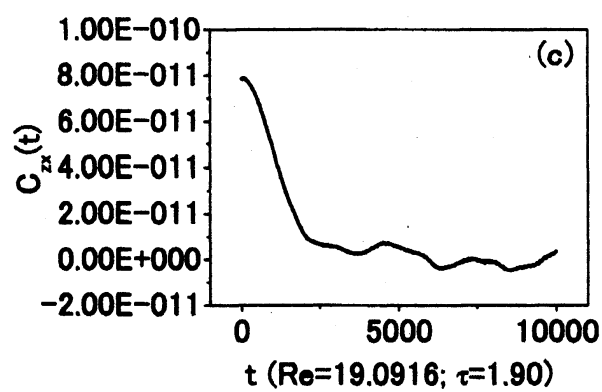
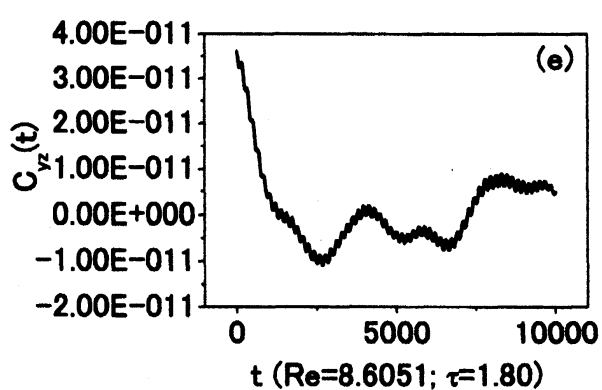
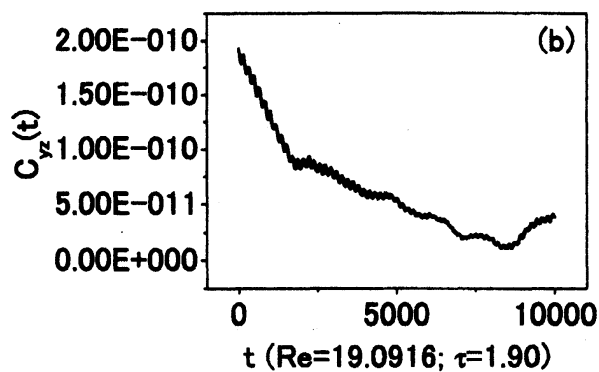
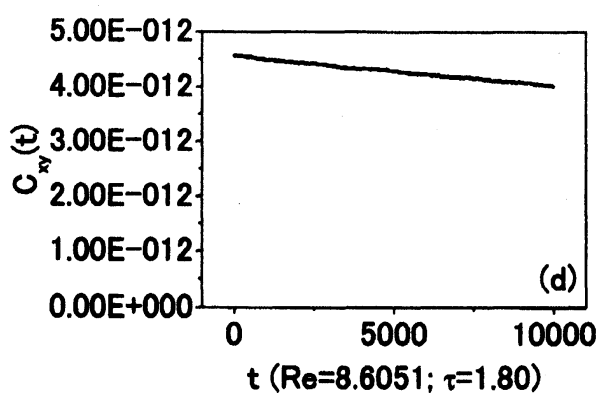
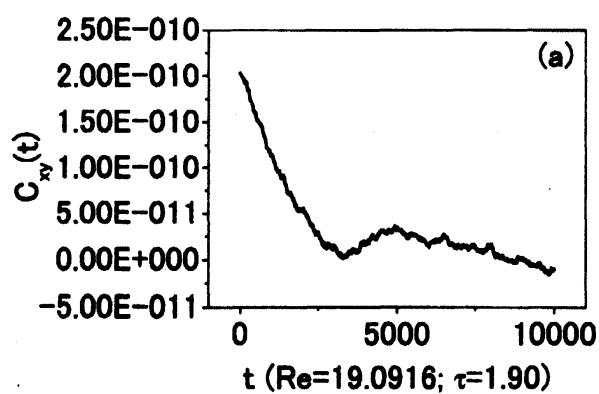


Fig.4