

Mordell 予想の高次元化 (Faltings の定理の紹介)

都立大理 辻 元

§1 序論

最近の数論には、代数幾何学的手法が広く取り入れられ、数論的幾何学 (arithmetic geometry) と呼ばれる分野を形成している。ここで紹介する定理も、古典的 Diophantine approximation を数論的幾何学に書き直すことにより、得られる。定理は次の様に述べられる。

定理 1.1 (Faltings) $K: \mathbb{Q}$ の有限次拡大

A : abelian variety / K

X : sub variety of A/K で A の nontrivial abelian subvariety を含まないもの

このとき、 X の K -有理点 $X(K)$ は有限集合である。□

この定理は同じく Faltings による Mordell 予想の解の高次元の場合への一つの拡張を与えている。即ち、次の系が得られる。

系 1.1 (Faltings) $K: \mathbb{Q}$ の有限次拡大.

$C: \text{projective nonsingular curve} / K, g(C) \geq 2$
 このとき $\# C(K) < \infty$ □

§2. Arakelov 交叉理論

$K: \mathbb{Q}$ の有限次拡大

$S := \text{Spec } \mathcal{O}_K$

$\pi: \mathcal{X} \longrightarrow S: \text{regular curve} / S$

S_{inf} : S の無限素点. とおく.

定義 2.1. $\mathcal{X}$ の Arakelov divisor とは. 次のような formal sum のことである:

$$D = D_{\text{fin}} + D_{\text{inf}} = \sum k_i C_i + \sum_{\infty \in S_{\text{inf}}} \lambda_{\infty} F_{\infty}$$

ここで和は有限和で.

$k_i \in \mathbb{Z}$, C_i : $\mathcal{X}$ 上の既約かつ被約な因子

F_{∞} : $\mathcal{X}$ の ∞ での formal な fibre,

$\lambda_{\infty} \in \mathbb{R}$ である. □

$\text{Div}(\mathcal{X})$ で $\mathcal{X}$ の Arakelov divisor の全体を表わす。
 $\text{Div}(\mathcal{X})$ には. 通常の交叉理論と類似の方法で.

linear equivalence が定義される. それを見よう。
 各 $\mathcal{X}_{\infty} := X(K_{\infty})$ ($K_{\infty} \subseteq \mathbb{C}$) は Riemann 面とな

るが. この上に 全体積が 1 となるような hermitian metric ds_∞^2 を定め. その volume form を du_∞ で表す. $\mathcal{X}_\infty$ が 種数 1 以上なら $\omega_1, \dots, \omega_g \in H^0(\mathcal{X}_\infty, \Omega_{\mathcal{X}_\infty}^1)$ を ($g = g(\mathcal{X}_\infty)$)

$$\int_{\mathcal{X}_\infty} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j = \delta_{ij}$$

となる様にとり. $du_\infty = \frac{\sqrt{-1}}{g} \sum_{i=1}^g \omega_i \wedge \bar{\omega}_i$ とおくのが普通のとおり方で. この様にして定まる $\mathcal{X}_\infty$ 上の hermitian metric を Jacobian metric と呼ぶ.

さて $\text{Div}(\mathcal{X})$ に linear equivalence を定義するには. $\mathcal{X}$ 上の有理関数の定める Arakelov divisor を定義すればよい. $f \in K(\mathcal{X})^\times$ の Arakelov divisor を

$$(f) = (f)_{\text{fin}} + \sum_{\infty \in S_{\text{inf}}} n_\infty(f) F_\infty$$

$(f)_{\text{fin}}$: f の定める $\mathcal{X}$ 上の divisor

$$n_\infty(f) = \int_{\mathcal{X}_\infty} -\log |f|_\infty du_\infty$$

で定める. $D_1, D_2 \in \text{Div}(\mathcal{X})$ が linearly equivalent であるとは. $\exists f \in K(\mathcal{X})^\times$ が存在して

$$D_1 - D_2 = (f)$$

となることを言う. さて

$$\text{Div}(\mathcal{X}) = \text{Div}(\mathcal{X})' / \sim \quad (\sim \text{ linear equivalence})$$

とおく。Arakelov は $\text{Div}(\mathcal{X})$ の交叉理論を定義することに成功した。 $\mathcal{X}$ は complete でないから $\mathcal{X}$ の上 (有限素点の上) だけの情報からは交叉理論は作れない。無限素点の上の情報をもうまく取り入れることが必要である。この際の key は次の2つである。

(1) Artin-Whaples' product formula.

(2) Riemann 面上の Green 関数の存在とその性質。

D_1, D_2 を既約かつ被約な Arakelov divisor で相異なるものとして、 D_1 と D_2 の交叉数 $[D_1, D_2]$ を定義しよう。

次の4つの場合に分けて定義する。

Case 1. D_1, D_2 : 共に vertical i.e. $\pi(D_i) \subsetneq S$ (or $\pi(D_i) = \emptyset$) ($i=1, 2$) の場合。

$$[D_1, D_2] := 0$$

Case 2. D_1 : horizontal (i.e. $\pi(D_1) = S$)

D_2 : vertical finite (i.e. $\emptyset = \pi(D_2) \subsetneq S$)

の場合。

$$[D_1, D_2] := m \quad (m = \deg(\pi|_{D_1}: D_1 \rightarrow S))$$

Case 3. D_1 : horizontal

D_2 : vertical infinite (i.e. $\pi(D_2) = \emptyset$)

の場合。 $D_2 = F_\infty$ として

$$[D_1, D_2] := e_\infty m$$

$$e_\infty := [K_\infty, \mathbb{R}] (= 1 \text{ or } 2)$$

$$m = \deg(\pi|D_i: D_i \rightarrow S).$$

Case 4. D_1, D_2 : 共に horizontal の場合.

$$[D_1, D_2] := [D_1, D_2]_{\#in} + [D_1, D_2]_{inf}$$

$$[D_1, D_2] = \sum \log \#(\mathcal{O}_{\mathcal{X}, P} / (\#_{1,P}, \#_{2,P}))$$

$\#_{1,P}, \#_{2,P}$: local defining eq. of D_1, D_2 around P

ここで和は $D_1 \cap D_2$ に含まれる closed point P 全てにわたる.

$$[D_1, D_2]_{inf} := \sum_{\infty \in S_{inf}} e_\infty \sum_{j \in \mathbb{R}} -G_\infty(P_{1,j}^\infty, P_{2,j}^\infty)$$

G_∞ : $\mathcal{X}_\infty$ 上の metric ds_∞^2 に関する Green 関数

$\{P_{1,j}^\infty\} \{P_{2,j}^\infty\}$: D_1, D_2 が各々定める $\mathcal{X}_\infty$ 上の点.

G_∞ は次の性質を持つ。(0) $\exp G_\infty \in C^\infty(\mathcal{X}_\infty \times \mathcal{X}_\infty)$,

$$(1) \quad G_\infty(P, Q) = G_\infty(Q, P),$$

$$(2) \quad \frac{1}{\pi \sqrt{-1}} \partial \bar{\partial} G_\infty(P, z) = du_\infty \quad (z \neq P),$$

$$(3) \quad \int_{\mathcal{X}_\infty} G_\infty(P, z) du_\infty(z) = 0.$$

以上のように定義した $[,]$ は Green 関数の対称性から $[D_1, D_2] = [D_2, D_1]$ を満たす.

定理 2.4 (Arakelov) $[,]$ は $\text{Div}(\mathcal{X})$ 上に symmetric-

bilinear form を定める。□

定理 2.1 は Artin-Whaples product formula:

$$\prod_v \|x\|_v = 1 \quad (x \in K^\times)$$

(ここで積は全ての K の valuation (places) をわたり.

$$\|x\|_v = |x|_v^{[K_v, \mathbb{Q}]}, \quad v|p \Rightarrow |p|_v = 1/p)$$

と Stokes の定理から容易に導くことができる。

最近 Gillet-Soule により, Arakelov 交叉理論は高次元の regular Arithmetic variety に拡張された。この際、通常の Chow 環の代りに Chow 環に Green's current という無限素点での情報を付け加えた環 $\hat{CH}$ を定義して理論が展開されている。定理 1.1 の証明には、この一般化された Arakelov 交叉理論が使われる。しかし証明には、一般化された交叉理論の深い性質は必要ないので解説は省略する。

§3. Height theory, Neron-Tate Height pairing

定理 1.1 で何故 X が Abelian variety の subvariety でなければならないかというのは、abelian variety 上の Neron-Tate Height pairing の性質が証明の上で極めて本質的に使われているからである。

$K: \mathbb{Q}$ の有限次代数拡大

$P \in \mathbb{P}^n(K)$, $P = [x_0 : \dots : x_n]$ ($x_i \in K$)
とする時. P の height を

$$H_K(P) = \prod_v \max \{ \|x_0\|_v, \dots, \|x_n\|_v \}$$

で定義する. ここで積は K の全ての素点をわたる. 前述の Artin-Whaple の積公式から H_K は well-defined である.

$$h_K(P) = \log H_K(P)$$

を logarithmic height という.

さて, 一般の K 上の projective variety X と X 上の invertible sheaf $\mathcal{L}$ に対して $X(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の log-height $h_{\mathcal{L}}$ を定義しよう. まず L を K の有限次拡大とすると

$$h_L = [L:K] h_K$$

となることはすぐにわかるので

$$h(P) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} h_K(P)$$

とおくと $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の関数が得られる. これを absolute log-height という. $h_{\mathcal{L}}$ を定義するには, 次のようにすればよい.

Case 1 $\mathcal{L}$ が very ample の場合

linear system $|\mathcal{L}|$ の定める X の K 上の埋め込み $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ を与える.

$$h_g := \varphi^* h$$

とおく。この定義は φ のとり方に依存しているので well-defined ではない。そこで次の様にする。

Def. $\mathcal{H}(X) = \{\text{functions} : X(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{R}\} / \sim$

ここで $f, g : X(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{R}$ について

$$f \sim g \stackrel{\text{def}}{\iff} f - g = O(1) \quad \square$$

この定義を求むると (nontrivial な議論により) h_g は $\mathcal{H}(X)$ の中に一意的に定まることがわかる。即ち 2つの $\mathbb{A}^1$ に付随する埋め込み $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$, $\psi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ について

$$\varphi^* h = \psi^* h + O(1)$$

となる。

Case 2. 一般の $\mathbb{A}^1$ について。

$\mathcal{L}, \mathcal{M}$ を X 上の 2つの very ample invertible sheaf とすると

$$h_{\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}} = h_{\mathcal{L}} + h_{\mathcal{M}} \quad (\text{in } \mathcal{H}(X))$$

が成り立つ。

$\mathcal{L}$ を X の任意の invertible sheaf とすると

2つの very ample invertible sheaf $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ を

~~利用~~ いて $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$ と書けるので

$$h_{\mathcal{L}} := h_{\mathcal{L}_1} - h_{\mathcal{L}_2} \quad (\text{in } \mathcal{H}(X))$$

とあけがよい。次の事実は古典的である。

Fact. $C \in \mathbb{R}$ を 与えると $\mathcal{L}$ が ample なら

$\{P \in X(K) \mid h_{\mathcal{L}}(P) \leq C\}$ は有限集合 $\square$

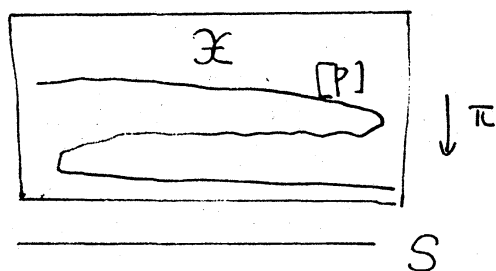
証明は容易である。

さて、前節の Arakelov 交叉理論との関係を述べよう。

今 $\pi: \mathcal{X} \longrightarrow S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ を regular arithmetic variety. $\mathcal{L}$ を $\mathcal{X}$ 上の invertible sheaf とする。各 $\infty \in S_{\text{inf}}$ について $\mathcal{X}_{\infty} = \mathcal{X}(K_{\infty})$ 上の $\mathcal{L}$ の hermitian metric を定める。metric の定め方は、必ずしも canonical でないが、一つ定めると。

Gillet-Soule の $\hat{C}H$ の元として Arakelov-divisor D が定まる。今 $P \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ とすると P は

$\pi: \mathcal{X} \longrightarrow S$ の multi-section を定める。その image を $[P]$ で表わす。



この時、次が成り立つ。

定理 3.4. $h_{\mathcal{L}}(P) = \mathcal{L} \cdot [P] = D \cdot [P]$

in $\mathcal{H}(X)$ $\square$

次に Abelian variety 上の height function の性質を見よう。次の定理はよく知られている。

定理 3.2 (Neron-Tate)

A : Abelian variety / $\overline{\mathbb{Q}}$

$\mathcal{L}$: invertible sheaf on A

$\Rightarrow$ (a) $\exists_1 \hat{h}_{\mathcal{L}}: A(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ s.t.

$$(i) \langle P, Q \rangle := \hat{h}_{\mathcal{L}}(P+Q) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(P) - \hat{h}_{\mathcal{L}}(Q)$$

symmetric bilinear

$$(ii) \hat{h}_{\mathcal{L}} = h_{\mathcal{L}} \text{ in } \mathcal{H}(A)$$

(b) $\mathcal{L}$: ample symmetric

$$\Rightarrow (i) \hat{h}_{\mathcal{L}} \geq 0$$

$$(ii) \hat{h}_{\mathcal{L}}(P) = 0 \iff P: \text{torsion point}$$

(iii) $\hat{h}_{\mathcal{L}}$: positive definite on

$$A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$$

□

$\langle, \rangle$ を Neron-Tate height pairing とする。

さて、この Neron-Tate height pairing と Arakelov intersection theory との関係を述べよう。

これは簡単で A も $\mathcal{L}$ も代数体 K 上定義されているとし

$$s_0: A \times A \longrightarrow A$$

を $s_0(P, Q) = P + Q$ で定め

$$\delta = s_0^* \mathcal{L} - pr_1^* \mathcal{L} - pr_2^* \mathcal{L} \in Pic(A \times A)$$

とおくと $P, Q \in A(K)$ に対し

$$\langle P, Q \rangle = \delta \cdot [(P, Q)] \quad \text{in } \mathcal{M}(A \times A)$$

となる。ここで $[(P, Q)]$ は $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ 上の A の Neron model $\mathcal{A}$ の適当なコンパクト化の section である。

§4. Faltings の定理の証明の概略

定理 1.1 は方法論的には、古典的 Diophantine approximation の定理。例えば Roth の定理や、整数点に関する Siegel の定理等と殆んど変わらない。Auxiliary polynomial の方法を使い、証明される。しかし、P. Vojta による Diophantine approximation の Arakelov 交差理論による幾何 $\wedge$ の翻訳 $\wedge$ の idea が随所で使われ、特に後述する “vanishing part” では、P. Vojta の観察が本質的に使われている。

証明は 3つの Step に分解される。

Step 1. Ample divisor の構成

A, X を定理 1.1 のものとする。

m を正整数 ≥ 2 として

$$\alpha_m: X^m \longrightarrow A^{m-1} \text{ を}$$

$\alpha_m(X_1, \dots, X_m) = (2X_1 - X_2, 2X_2 - X_3, \dots, 2X_{m-1} - X_m)$
 で定まる. このとき X が A の nontrivial abelian
 subvariety を含まないという仮定から簡単に十分大き
 な m に $\bar{X}$ 対し α_m はその image $\wedge$ の finite morphism
 となることがわかる. m をそのように fix しよう.

さて A^m 上の $\mathbb{Q}$ -line bundle を次のように
 定義する.

$$\mathcal{L}(-\varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = -\varepsilon \sum \lambda_i^2 \text{pr}_i^*(\mathcal{L}) + \sum (\lambda_i X_i - \lambda_{i+m} X_{i+m})^*(\mathcal{L})$$

ここで

$\mathcal{L}: A$ 上の ample symmetric line bdle

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Q}^+$$

$$\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$$

である. $\varepsilon = 0$ $\lambda_i = 2^{m-i}$ とおくと α_m の

有限性から $\mathcal{L}(0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ は ample on X^m

であることに注意する. 従って $\exists \varepsilon_0 > 0$ を適当にとり

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ なる限り

$$\mathcal{L}(-\varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^{\dim X^m} \cdot X^m > 0$$

となることがわかる. ところが. 次の定理が成り立つ.

定理 4.1 (Faltings) $\exists \lambda > 0$ s.t.

$$\varepsilon < \varepsilon_0 \quad \lambda_1 / \lambda_2 \geq \lambda, \dots, \lambda_{m-1} / \lambda_m \geq \lambda$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(-\varepsilon, \Delta_1, \dots, \Delta_m)$ ample on X^m □

この定理の証明は Faltings の独創的 idea が用いられ大変興味深い。しかし、それは主に技術的なものであって定理 1.1 の証明の本質ではないと思われるので解説は省略する。 $\mathcal{L}(-\varepsilon, \Delta_1, \dots, \Delta_m)$ がなぜこのように定義されるのかは、Step で明らかになる。

Step 2. nonvanishing

今 $d > 0$ とし $\neq \in \Gamma(X^m, \mathcal{L}(-\varepsilon, \Delta_1, \dots, \Delta_m)^{\otimes d})$ をとる。 $d_i = 4s_i^2 d$ として $X \in X^m$ での $\neq$ の index $i(X, \neq)$ を

$$i(X, \neq) = \max \{ \sigma \in \mathbb{Q} \mid D_1 \dots D_m (\neq)(X) = 0 \}$$

$$\neq \quad j_i/d_i + \dots + j_m/d_m < \sigma$$

D_i : local diff. operator of order j_i on i -th factor around X_i }

を定義する。index は $\neq \neq 0$ なら有限で、 $\neq$ の X での重み付きの vanishing order である。

A^m の $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ 上の Neron model A^m の適当なコンパクト化 B をとり $\mathcal{L}(-\varepsilon, \Delta_1, \dots, \Delta_m)$ が B 上の line bundle に拡張しているものとする。 X^m の B での closure を $\mathcal{X}$ とおく。このとき、次が

成り立つ。

定理 4.2 (Faltings)

$$X = (X_1, \dots, X_m) \in X_{\text{reg}}^m$$

$$0 < \sigma < \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \lambda_i / \lambda_{i+1} \gg 0$$

$\Rightarrow$ 十分大きな $d > 0$ に対して

$\exists \# \in \Gamma(X, \mathcal{L}(\sigma - \varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^{\otimes d}), c = c(\sigma, \varepsilon)$
が存在し

$$\text{ind}(\#, X) < \sigma$$

$$\|\# \|_{\infty} < \exp(c \cdot \sum d_i) \quad (\forall \infty; K \text{ の infinite place})$$

が成り立つ。但しここで $\|\cdot\|_{\infty}$ は $\mathcal{L}$ の hermitian metric が誘導される $\mathcal{L}(\sigma - \varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^{\otimes d}$ の hermitian metric に関する L^2 -ノルムである。□

この定理の証明は、次の2つの事実から従う

(1) $\Gamma(X^m, \mathcal{L}(\sigma - \varepsilon, s_1, \dots, s_m)^{\otimes d})$ の subspace $V = \{\# \in \Gamma(X^m, \mathcal{L}(\sigma - \varepsilon, s_1, \dots, s_m)^{\otimes d}) \mid \text{ind}(\#, X) \geq \sigma\}$ が $\text{codim } V \geq \text{const}(\prod d_i \cdot \dim_k X_k)$ を満たす

(2) $\Gamma(X^m, \mathcal{L}(\sigma - \varepsilon, s_1, \dots, s_m)^{\otimes d})$ の lattice

$\Gamma(X, \mathcal{L}(\sigma - \varepsilon, s_1, \dots, s_m)^{\otimes d})$ の基本領域の $\|\cdot\|_{\infty}$ に対する体積が $< \exp(c \sum d_i)$ を満たすこと。

この2つの事実と Siegel の補題 (Dirichlet の box principle) から定理 4.2 が従う。

Step. 3. vanishing (主に P. Vojta の idea による).

この部分が証明の核心である.

$\# X(K) = \infty$ と仮定する. $X \subset \mathbb{P}^n$ とし (すでに述べた)

各 i について K 上の projection ($1 \leq i \leq m$)

$$\pi_i: X \longrightarrow P_i = \mathbb{P}^{\dim X}$$

を上手くとって.

$$\deg(Y_i) < (\operatorname{codim} X \cdot \deg(X))$$

なる hypersurface Y_i で I_Y (Y の ideal) が.

Ω_{X/P_i} を annihilate するものが存在するようにできる.

この部分は簡単な代数幾何的考察でできる.

$\dim X$ に関する帰納法から $\bigcup_{i=1}^m Y_i$ の外に $X(K)$ の元が無限個あるとしてよい.

ε, γ を定理 4.1 のようにとる.

$X_1, \dots, X_m \in X(K)$ を次のようにとる. ここで

$$h_i = h_{\mathbb{P}}(X_i) \text{ とする}$$

$$\text{i) } h_1 \gg 0$$

$$\text{ii) } h_2/h_1, h_3/h_2, \dots, h_m/h_{m-1} > S^2$$

$$\text{iii) } \langle X_i, X_{i+1} \rangle \geq (1 - \varepsilon/2) \|X_i\| \|X_{i+1}\|$$

$$\text{iv) } X_i \notin Y_i$$

このような $X_1, \dots, X_m$ は仮定から必ず存在する.

このとき $X = \langle X_1, \dots, X_m \rangle$ とおき.

Δ を $h_i^{-1/2}$ に非常に近くとると.

$\sum (\sigma - \varepsilon, \Delta_1, \dots, \Delta_m)^{\otimes d} [X] \leq d(\sigma - \varepsilon/2) \cdot m + \text{const} \sum d_i$
 となることが単純計算でわかる。右辺第2項は Δ , d/h_i
 位の大きさ (この部分は Arakelov intersection と Néron-Tate height pairing の誤差がくる) なので h_i も十分大
 くと、ておけば $\sigma < \varepsilon/2$ でおけば

$$\sum (\sigma - \varepsilon, \Delta_1, \dots, \Delta_m)^{\otimes d} [X] < 0$$

となる。 $\#$ を定理 4.2 のような $\Gamma(\mathcal{O}, \sum (\sigma - \varepsilon, \Delta_1, \dots, \Delta_m)^{\otimes d})$
 の元とする。 $[X]$ と $\#$ の定める Arakelov divisor は

$$(\#) \cdot [X] \leq d(\sigma - \varepsilon/2) m + \text{const} \sum d_i < 0$$

を満たすが $(\#) \cdot [X]$ を有限素点から来る部分と
 無限素点の部分から来る部分に分解して

$$(\#) \cdot [X] = [(\#) \cdot [X]]_{\text{fin}} + [(\#) \cdot [X]]_{\text{inf}}$$

と書くと、 $\#$ の無限素点のノルムの評価から

$$[(\#) \cdot [X]]_{\text{inf}} \geq -c \sum d_i$$

となるので

$$[(\#) \cdot [X]]_{\text{fin}} < 0$$

となり.

$$\#(X) = 0$$

となる.

さて σ を適当にとり

$$\text{ind}(X, \#) \geq \sigma$$

となれば、矛盾（#の選む参照）を得て証明は終る。

この為には D_i を π_i によつて $P_i = \mathbb{P}^{\dim X}$ 上の regular multi-vector field を引き戻して得られる meromorphic differential operator とし

$$D_1 \cdots D_m \#(X) = 0$$

を見て、 $\text{ind}(X, \#)$ を下から評価すればよい。

これも基本的には、 $\#(X) = 0$ を見るのと変わらないが、

D_i が meromorphic なので、 $D_1 \cdots D_m \#$ は

$\Gamma(X, \mathcal{L}(\sigma - \varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^{\otimes d})$ には入らず、

$\mathcal{L} := \text{pr}_i^* \mathcal{L}$ とし

$$D_1 \cdots D_m \# \in \Gamma(X^m, \mathcal{L}(\sigma - \varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^{\otimes d} \otimes \mathcal{L}_i^{a_i})$$

(a_i は $\deg Y_i$ と D_i による正整数)

となる。 $\text{ind}(X, \#) \geq \sigma$ は、 σ を十分小さくとり

$D_1 \cdots D_m \#$ が integral section となるように
整数をかける等して工夫すれば得られる。ここでは
詳細は省略する。

5.5 まとめ.

以上のように Mordell 予想の解だけでなく、その一般化
さえ、Arakelov 交叉理論により、完全に幾何学になり

難しい道具を全く使わずに証明される。 Roth の定理の
 ような難しい Diophantine approximation の古典的大結果
 も Arakelov 交叉理論をもて解釈し直すことにより
 ここで述べた Faltings の定理と全く同じ手続により
 証明されていることがわかる。 このように数論の難しい
 問題も幾何学的に捉え直すと簡単に解ける場合がある。
 今の所、Arakelov 交叉理論がそのような翻訳の主要
 な道具であるが、将来はさらに新たな道具が期待できると
 思われる。

参考文献

G. Faltings, Diophantine Approximation on
 Abelian Varieties preprint