

Drift wave turbulence に対する厳密ガウス分布を
する解

関学 理 長沢 潔, 今村 勤
名大 理 谷内 俊弥

概要

プラズマのドリフト波の従う Hasegawa-Mima 方程式の厳密に Gauss 分布をする特解を Wiener-Hermite 展開の手法を用いて求め, 弱い乱れの場合にはその 2 時間相関関数を計算した。その結果, 相関は時間と共に指数的に減衰することがわかった。より精密化されたモデル方程式に対しても同様の Gauss 分布解及び 2 時間相関関数が求まり, これらは拡散を計算する際の基礎となる。

§ 1. 厳密 Gauss 分布解

プラズマのドリフト波を表わすものに Hasegawa-Mima 方程式⁽¹⁾

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\perp}\phi - \phi) + (\nabla_{\perp}\phi \times \hat{z}) \cdot \nabla_{\perp}(\Delta_{\perp}\phi - \ln n) = 0 \quad (1)$$

がある。この方程式は電子及びイオンの運動方程式と連続の方程式から電気伝導率を ∞ ，イオンの温度を0，イオンの磁場方向の速度は小さいとして得られるもので ϕ は静電ポテンシャル， n は粒子分布密度， $\hat{z}$ は磁場方向の単位ベクトル， $\nabla_{\perp} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}$ である。

ただし(1)では時間はイオンの cyclotron frequency $\omega_{ci} = \frac{eB}{CM}$ で，長さは音速 $C_s = \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}}$ を ω_{ci} で割ったもので，静電ポテンシャルは $e/k_B T_e$ で，粒子分布密度は background density で規格化されており，式に現われる量はすべて次元のない量である。

以下では background density が x 軸方向に傾斜 $n_0 = e^{-\kappa x}$ を持つ場合を取扱う。このとき(1)は

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\perp} \phi - \phi) + (\nabla_{\perp} \phi \times \hat{z}) \cdot \nabla_{\perp} \Delta_{\perp} \phi + \kappa \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (1)'$$

となる。(1)' を Fourier 変換すれば

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i \omega(k) \right\} \hat{\phi}(k, t) \\ &= \int \frac{(k' \times k'') \cdot \hat{z}}{2(1+k^2)} (k''^2 - k'^2) \\ & \quad \times \hat{\phi}(k', t) \hat{\phi}(k'', t) \delta(k - k' - k'') dk' dk'' \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる。ここに $\hat{\phi}(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \phi(x, t) e^{-ik_x x - ik_y y} dx dy$,
 $\omega(k) = k_y / (1 + k^2)$ である。

$\hat{\phi}$ を Wiener-Hermite 展開⁽²⁾する事により厳密に Gauss 分布をする特解を求めよう。Wiener-Hermite 展開というのは確率場を理想確率関数の Hermite 汎関数列で展開しその展開係数である通常の間数の間の関係について調べる方法である。

ここで理想確率関数 $a(x, t)$ は結合 Gauss 分布をしていて平均と分散が

$$\langle a(x, t) \rangle = 0, \quad \langle a(x, t) a(x', t) \rangle = \delta(x - x') \quad (3)$$

で与えられるような確率関数として定義される。

この $a(x, t)$ の Hermite 汎関数 $H^{(n)}(x, t)$ の Fourier 変換をとった $\hat{H}^{(n)}(k, t)$ を用いて $\hat{\phi}(k, t)$ の展開は (ϕ は空間的に一様で平均が 0 として)

$$\hat{\phi}(k, t) = K^{(1)}(k, t) \hat{H}^{(1)}(k, t) + \int dk' K^{(2)}(k - k', k', t) \hat{H}^{(2)}(k - k', k', t) + \dots \quad (4)$$

の形で与えられる。ここで $K^{(n)}$ は通常の間数である。

理想確率関数はその確率的性質を充たす範囲で時間依存性を持って良い。 $\hat{H}^{(1)}(k, t) = \hat{a}(k, t)$ の時間微分があまり性質の悪くない確率関数として存在するとして $\partial \hat{H}^{(1)}(k, t) / \partial t$ の Wiener-Hermite 展開が

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{H}^{(1)}(k, t) = & L^{(1)}(k, t) \hat{H}^{(1)}(k, t) \\ & + \int dk' L^{(2)}(k-k', k', t) \hat{H}^{(2)}(k-k', k', t) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられると仮定する。ここで現われた $L^{(n)}$ は任意に取れる訳ではなく $\hat{H}^{(1)}$ 及びそれから定義される $\hat{H}^{(n)}$ の系がその確率的性質を保存するために

$$L^{(1)}(k, t) + L^{(1)}(-k, t) = 0 \quad (6)$$

$$L^{(2)}(k_1, k_2, t) + L^{(2)}(k_2, -k_1 - k_2, t) + L^{(2)}(-k_1 - k_2, k_1, t) = 0 \quad (7)$$

等の制限がつく。 $L^{(1)}$ は一般性を失わず 0 とおけることが証明されるので (5) の右辺は第 2 項から出発して良い。

基礎方程式の非線形項からの寄与を理想確率関数の時間変化によりくりこめば Wiener-Hermite 展開の収束性を良くする事が出来るであろう。

特別な場合として展開 (4) を

$$\hat{\phi}(k, t) = K^{(1)}(k, t) \hat{H}^{(1)}(k, t) \quad (4)'$$

のように第 1 項, すなわち純粹に Gauss 分布をする項だけで打ち切る事が出来るかどうか調べてみよう。

方程式 (2) の非線形項の次数は 2 次であるから, この目的のためには展開 (5) を第 2 項で打ち切り

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{H}^{(1)}(k, t) = \int dk' L^{(2)}(k-k', k', t) \hat{H}^{(2)}(k-k', k', t) \quad (5)'$$

とすれば十分である。

(4)' を (2) に代入し $H^{(n)}$ ($n=1, 2, \dots$) を掛けて統計平均を取れば (5)' を考慮して,

$$n=1 \text{ から } \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i\omega(k) \right\} K^{(1)}(k, t) = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} n=2 \text{ から } & K^{(1)}(k'+k'', t) L^{(2)}(k', k'', t) \\ &= \frac{(k' \times k'') \cdot \hat{z}}{2\{1+(k'+k'')^2\}} (k''^2 - k'^2) K^{(1)}(k', t) K^{(1)}(k'', t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$n \geq 3 \text{ から } 0 = 0 \quad (10)$$

が得られる。ここで同時刻の $H^{(n)}$ の積の統計平均についての関係式

$$\langle H^{(n)} \rangle = 0 \quad (11)$$

$$\langle H^{(1)}(k, t) H^{(1)}(k', t) \rangle = \delta(k + k') \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle H^{(1)}(k, t) H^{(1)}(k', t) H^{(2)}(k'', k''', t) \rangle &= \delta(k + k'') \delta(k' + k''') \\ &+ \delta(k + k''') \delta(k' + k'') \end{aligned} \quad (13)$$

等を使った。

(7), (8), (9) を同時に満たす $K^{(1)}$ 及び $L^{(2)}$ を一般的に求めるのは困難であるが今の場合 a 及び b を任意定数として

$$K^{(1)}(k, t) = \frac{a}{\sqrt{(1+k^2)(k^2+b)}} e^{-i\omega(k)t} \quad (14)$$

$$L^{(2)}(k', k'', t) = \tilde{L}(k', k'') e^{-iF(k', k'')t} \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{L}(k', k'') &\equiv \frac{a(k' \times k'') \cdot \hat{z} (k''^2 - k'^2) \sqrt{(k' + k'')^2 + b}}{2[(1+k'^2)(1+k''^2)\{1+(k' + k'')^2\}(k'^2 + b)(k''^2 + b)]^{1/2}} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$F(k', k'') \equiv \omega(k') + \omega(k'') - \omega(k' + k''), \quad \omega(k) = \frac{ck_y}{1+k^2} \quad (17)$$

は一つの解となっている事を示すことができる。

このようにして Gauss 分布をする特解が見い出された。

§ 2. 2時間相関関数

時間に依存する理想確率関数を用いた Wiener-Hermite 展開⁽³⁾を使つて2時間相関関数を計算することが出来る。

今の場合,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}(k,0) \hat{\phi}(k,t) \rangle &= K^{(1)}(k,0) K^{(1)}(k,t) \\ &\times \langle \hat{H}^{(1)}(k,0) \hat{H}^{(1)}(k,t) \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

であるから2時間相関関数を求めるためには $\langle \hat{H}^{(1)}(k,0) \hat{H}^{(1)}(k,t) \rangle$ がわかれば良い。($\hat{\phi}$ が厳密に Gauss 分布に従わない場合でも, ある程度 Gauss 分布に近ければ (18) の関係が近似的に成立する。)

時刻 $t=0$ での理想確率関数 $\hat{H}^{(1)}(k,0) = \hat{a}(k,0)$ を時刻 t の理想確率関数の Hermite 汎関数列で展開しよう。展開は

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(1)}(k,0) &= C^{(1)}(k,t) \hat{H}^{(1)}(k,t) \\ &+ \int dk' C^{(2)}(k-k',k',t) \hat{H}^{(2)}(k-k',k',t) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

という形で与えられる。(19) から $C^{(n)}$ の初期条件は

$$C^{(n)} = \delta_{n,1} \quad \text{at } t=0 \quad (20)$$

となる。

$$\langle \hat{H}^{(1)}(k,0) \hat{H}^{(1)}(k,t) \rangle = C^{(1)}(k,t) \delta(k+k) \quad (21)$$

であるから 2 時間相関関数を求めることは結局 $C^{(1)}(k,t)$ を求めることに帰着する。

(19) の両辺を t につき微分して $\hat{H}^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n, t)$ を掛けて統計平均を取れば $C^{(n)}$ に対する方程式系

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n, t) \\ = -\frac{2}{n} \sum_{i,j} L^{(2)}(k_i, k_j, t) C^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}_i, \hat{k}_j, k_n, k_i+k_j, t) \\ + (n+1) \sum_i \int dk' L^{(2)*}(k_i-k', k', t) C^{(n+1)}(k_1, \dots, \hat{k}_i, k_n, k_i-k', k', t) \end{aligned} \quad (22)$$

が得られる。

ここで $\sum_{i=1}^n k_i = k$ であり、 $\hat{k}_i$ は変数 k_i が除かれることを意味する。

$C^{(1)}$ を求めるにはこの無限連立方程式を解かねばならないが初期条件を考慮すれば $|L^{(2)}|$ が小さい場合にはある n 以上の $C^{(n)}$ を無視することが許されるだろう。(14)~(17)を見ればこれは弱い乱れの場合に当たることがわかる。

また、 $L^{(2)}$ が (15) のように単振動をしている時は (22) は量子力学における線巾の理論に現われる方程式系と全く同じ形である。この場合、 $C^{(n+1)}$ は n photon state を $C^{(1)}$ は

基底状態を表わしている。線巾の理論では2個以上の光子が存在する状態を無視し、ある程度以上大きな n における基底状態の振幅を求めることを目標としている。以下この線巾の理論に従って話を進めよう。

$n \geq 3$ の $C^{(n)}$ を無視すれば (22) は

$$\frac{\partial}{\partial t} C^{(1)}(k, t) = 2 \int dk' L^{(2)*}(k-k', k', t) C^{(2)}(k-k', k', t) \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C^{(2)}(k_1, k_2, t) = -L^{(2)}(k_1, k_2, t) C^{(1)}(k_1+k_2, t) \quad (24)$$

となる。(24) を初期条件 (20) の下で積分すれば、

$$C^{(2)}(k_1, k_2, t) = -\tilde{L}(k_1, k_2) \int_0^t dt' e^{-iF(k_1, k_2)t'} C^{(1)}(k_1+k_2, t') \quad (25)$$

を得る。次に積分

$$I(\lambda) \equiv \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \frac{\partial C^{(1)}(k, t)}{\partial t} \quad (\lambda > 0) \quad (26)$$

を2通りの方法で計算しよう。①部分積分により、

$$I(\lambda) = \lambda \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} C^{(1)}(k, t) - 1 \quad (27)$$

② (23), (25) を使えば

$$I(\lambda) = -2 \int_0^\infty dt' e^{-\lambda t'} C^{(1)}(k, t') \\ \times \int dk' |\tilde{L}(k-k', k')|^2 \frac{1}{\lambda - iF(k-k', k')} \quad (28)$$

が得られる。(27), (28) を比べれば

$$\int_0^\infty dt e^{-\lambda t} C^{(1)}(k, t) \\ = \left[\lambda + 2 \int dk' |\tilde{L}(k-k', k')|^2 \frac{1}{\lambda - iF(k-k', k')} \right]^{-1} \quad (29)$$

となる。最終的に $\lambda \rightarrow +0$ とするので t がある程度以上大きい所での $C^{(1)}$ の関数形が問題となる。 $C^{(1)}$ として指数的に減少する解

$$C^{(1)}(k, t) = e^{-\Gamma(k)t} \quad (30)$$

を仮定して (29) の左辺に代入し, $\lambda \rightarrow +0$ の極限を取れば

$$\Gamma(k) = 2\pi \int dk' |\tilde{L}(k-k', k')|^2 \delta(F(k-k', k')) \\ + 2i \mathcal{P} \int dk' |\tilde{L}(k-k', k')|^2 \frac{1}{F(k-k', k')} \quad (31)$$

が得られる。

$\tilde{L}$ は a に, F は κ に比例するので Γ は a^2/κ に比例する。

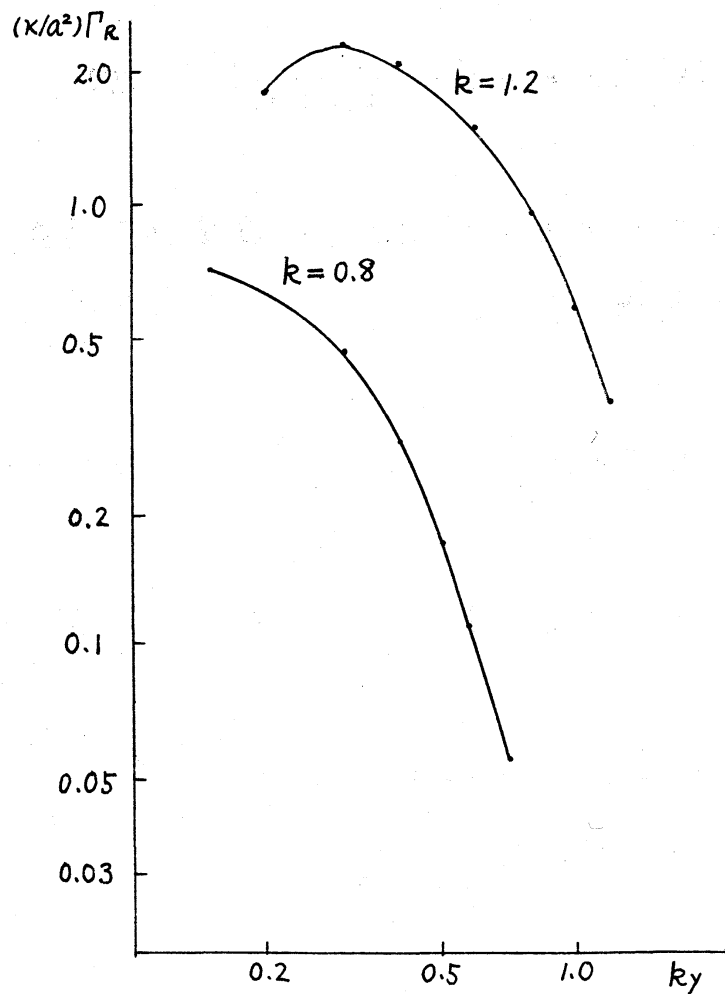
$(\kappa/a^2)\Gamma$ の実部を数値計算することにより相関の減衰の異方性を調べた。その結果,

(1) k が大きいほど Γ も大, すなわち相関は早く落ちる。

(2) k が一定であれば k_x が大きいほど Γ は大きい。

(3) k が大きいほど異方性は小さい。

事がわかった。例として $k=0.8$ と $k=1.2$ の場合のグラフをあげておく。($\epsilon=1$ とした。)



§ 3. 拡散への応用⁽⁴⁾

Hasegawa-Mima方程式を電気伝導率 σ が有限として精密化すれば方程式は $|k_z| \geq \sigma^{-1/2}$ の場合 (drift mode) と $k_z \sim 0$ の場合 (convective-cell mode) とで大きく異なる。

以下簡単のために $k_z \neq 0$ と $k_z = 0$ の二つとすれば

$k_z \neq 0$... 通常の Hasegawa-Mima 方程式

$$k_z = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \ln n - (\nabla_\perp \phi \times \hat{z}) \cdot \nabla_\perp \ln n = 0 \quad (32)$$

となる。もち論 $k_z \neq 0$ の場合には § 1 と全く同様の Gauss 分布解が存在する。

方程式の非線形性のため drift mode と convective-cell mode は互いに couple する。drift mode では拡散が起こらないことは容易に示される。そこで, mode-mode coupling $\hat{\phi}(k_\perp, +k_z, t) \hat{\phi}(k_\perp, -k_z, t)$ によって作られる convective-cell mode $\hat{\phi}(k_\perp, k_z=0, t)$ によって拡散が生ずるというモデルを使って drift velocity $\mathbf{v} = -\nabla_\perp \phi \times \hat{z}$ で単位時間に x 軸の正の向きに運ばれる粒子数 (particle flux)

$\langle \Phi \rangle = \langle \int dx dy v_x n \rangle$ を計算する。

この時 v_x も n も共に $\hat{\phi}(k_\perp, k_z \neq 0, t)$ の 2 次 に比例するから統計平均には

$$\langle H^{(1)}(k, t) H^{(1)}(k', t) H^{(1)}(l, t) H^{(1)}(l', t) \rangle \quad (33)$$

が現われる。

しかしながら，係数の対称性のため最終的に残るのは主に

$$\langle H^{(1)}(k, t) H^{(1)}(k', t') \rangle \langle H^{(1)}(k', t) H^{(1)}(k, t') \rangle \quad (34)$$

からの寄与であることがわかる。従って §2 で得られた 2 時間相関関数を用いて計算を進めれば良い。

その結果，弱いゆらぎの時

$$\begin{aligned} \langle \Phi \rangle \simeq & 6\pi n_0 \int dy dz \int dk_L dk'_L \sum_{k_z} \\ & \times \left\{ k_y \frac{(k_L - k'_L) \times k'_L \cdot \hat{z}}{2k_L^2} \tilde{K}(k_L - k'_L) \tilde{K}(k'_L) \right\}^2 \\ & \times \left\{ \Gamma_R(k_L - k'_L) + \Gamma_R(k'_L) \right\} / \left\{ \omega(k_L - k'_L) + \omega(k'_L) \right\}^4 \end{aligned} \quad (35)$$

が得られた。

文献

- (1) A. Hasegawa & K. Mima : Phys. Fluids 21 (1978) 87
- (2) 今村勲 : 確率場の数学 , 岩波書店
- (3) M. Doi , R. Kambe , T. Imamura and T. Taniuti : J. Phys. Soc. Japan 46 (1979) 1016 & び 数理研講究録 354 (1979年6月)
- (4) K. Nagasawa , T. Imamura , T. Taniuti : to be published