

ある種の作用素半群について

東城大 教養 高野勝男

序. W^p ($p > 1$) はルベーク可測関数で $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^p (u^2+1)^{-p/2} du < \infty$ であるような関数の全体とする。 W^p は $[\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^p (u^2+1)^{-p/2} du]^{1/p} = \|f\|_{W^p}$ を norm とするとき Banach space となる。 t が複素数かつ $\operatorname{Re} t > 0$ のとき $p(t, u) = \frac{t}{\pi(u^2+t^2)}$ とする。このとき $f \in W^p$ に対して $R(0)f = f$, $(R(t)f)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, u-v) f(v) dv$ とする。こゝでの目的は $\{R(t) : 0 \leq t < \infty\}$ が W^p から W^p 上への (C_0) 半群であること、また $t = r - i\alpha$ ($r > 0$) で、 $r \rightarrow +0$ とするとき、 W^p から W^p への (C_0) 群 $\{R(-i\alpha) : -\infty < \alpha < \infty\}$ が存在することと示すことである。以下において $p > 1$ とし $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ とする。

§ 1. W^p 上の (C_0) 半群

Lemma 1.1. $\operatorname{Re} t > 0$ とする。 $R(t)$ は W^p 上の有界線形作用素である。 $\alpha > 0$ かつ $\alpha \neq \operatorname{Re} t$ であるならば

$$\|R(t)\| \leq \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha+it} \right| + \sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha-it} \right| \right)$$

$$\times \frac{1+M_p}{2} + \frac{|t|}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (v^2+1)^{-p/2} dv \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} |v-i\alpha-it|^{-p'} dv \right]^{1/p'} \\ \times \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i\alpha+it} \right| \right), \quad (1.1)$$

ただし M_p は p のみに関係した定数.

Proof $\alpha > 0$ かつ $\alpha \neq \operatorname{Re} t$ のとき

$$P(t, v-u) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ -\frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} + \frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)} \right. \\ \left. + \frac{2it}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)} \right\}. \quad (1.2)$$

これより

$$(P(t)f)(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} + \frac{v-i\alpha}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)} \right. \\ \left. + \frac{2it}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)} \right\} f(u) du. \quad (1.3)$$

簡単のため, $f(u; \alpha, t) = \frac{f(u)}{u-i\alpha+it}$ とおく. [6. Proof of Theorem 101] より

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| -\frac{1}{2\pi i} \frac{v-i\alpha}{v-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} du \right|^p dv \right]^{1/p} \\ \leq \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(u; \alpha, t) \frac{1}{u-v+it} du \right|^p du \right]^{1/p} \\ \leq \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \frac{1+M_p}{2} \|f(\cdot; \alpha, t)\|_p. \quad (1.4)$$

また次のことがいえる.

$$\|f(\cdot; \alpha, t)\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(u)}{u-i} \frac{u-i}{u-i\alpha+it} \right|^p du \right]^{1/p} \\ \leq \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{u-i}{u-i\alpha+it} \right| \right) \|f\|_{w(p)}. \quad (1.5)$$

(1.4), (1.5) から

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| -\frac{1}{2\pi i} \frac{v-i\alpha}{v-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha+it)(u-v+it)} du \right|^p dv \right]^{1/p} \\ \leq \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha+it} \right| \right) \frac{1+M_p}{2} \|f\|_{w(p)}. \quad (1.6)$$

(1.6) を得た方法と同様にして, 次のことがわかる.

$$\begin{aligned} & \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \frac{v-i\alpha}{v-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-v-it)} du \right|^p dv \right]^{1/p} \\ & \leq \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i\alpha}{v-i} \right| \right) \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha-it} \right| \right)^{\frac{1+M_p}{2}} \|f\|_{W^p}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

ヘルダールの不等式と(1.5)によって次がわかる。

$$\begin{aligned} & \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} 2it \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)} du \right|^p (v^2+1)^{-\frac{p}{2}} dv \right]^{1/p} \\ & \leq \frac{|t|}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i\alpha-it)(u-i\alpha+it)} du \right| \left(\int_{-\infty}^{\infty} (v^2+1)^{-p/2} dv \right)^{1/p} \\ & \leq \frac{|t|}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (v^2+1)^{-p/2} dv \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u-i\alpha-it|^{-p'} du \right)^{1/p'} \left(\sup_{v \in \mathbb{R}} \left| \frac{v-i}{v-i\alpha+it} \right| \right) \\ & \quad \times \|f\|_{W^p}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

(1.6), (1.7), (1.8) より, $E(t)f \in W^p$ であり, $E(t)$ は W^p より W^p への有界線形作用素であることがわかった。更に, (1.1) も得られた。

<終>

以下において

$$(Uf)(u) = \lim_{a \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^a \exp(-i\omega u) f(\omega) d\omega$$

ただし, $f \in L^2(\mathbb{R})$ とし, $\lim$ は二乗平均収束の意味とする。このとき, [1, Theorem 2], p. 974] より次の結果を得る。

Lemma 1.2. $\operatorname{Re} t > 0$ とする。 $f \in L^2(\mathbb{R})$ とし,

$$(E(t)f)(v) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iuv - t|u|) (Uf)(u) du.$$

$f \in L^p(\mathbb{R})$ のとき, f の Hilbert transform を Cf で表す。すなわち

$$(Cf)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} du. \quad (1.9)$$

また、 $D = \frac{d}{dx}$ とおく。 $\lambda = r - i\eta$ ($r > 0$) かつ $t > 0$ のとき、 $(T(\lambda t)f)(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda t, v-u) f(u) du$, $(T(0)f)(v) = f(v)$ ただし $f \in L^p(\mathbb{R})$ とすると、[3] の結果より次のことがわかる。

Lemma 1.3, $\{T(\lambda t) : 0 \leq t < \infty\}$ は $L^p(\mathbb{R})$ 上の (C_0) 半群である。その infinitesimal generator A_λ と domain $D(A_\lambda)$ は次のようなものである。

$D(A_\lambda) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : (Cf)(x) \text{ is absolutely continuous and } DCf \in L^p(\mathbb{R})\}$,

$$f \in D(A_\lambda) \text{ のとき, } (A_\lambda f)(x) = \lambda (DCf)(x). \quad (1.10)$$

以下において簡単のために、 $f \in W^p$ のとき $n(u) = \frac{f(u)}{u-i}$, $g(u) = \frac{f(u)}{(u-i)^2}$ とおくことにする。

Theorem 1, $\lambda = r - i\eta$ ($r > 0$) とする。 $\{P(\lambda t) : 0 \leq t < \infty\}$ は W^p 上の (C_0) 半群である。その infinitesimal generator G_λ と domain $D(G_\lambda)$ は次のようなものである。

$D(G_\lambda) = \{f \in W^p : (Cn)(x) \text{ is absolutely continuous and } DCn \in L^p(\mathbb{R})\}$,

$f \in D(G_\lambda)$ とし,

$$(G_\lambda f)(x) = \lambda(x-i)(DCn)(x) + \lambda(x-i)(Cg)(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du.$$

Proof I. $P(u)t)P(\lambda s) = P(u(t+s)) : 0 < t, s < \infty$ とする。無限回微分可能, 急減少関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする。

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ のとき, $P(\lambda s)f \in L^2(\mathbb{R})$ であり

$$\begin{aligned} P(u)t)P(\lambda s)f &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iuv - \lambda t|u|) U(P(\lambda s)f)(u) du \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iuv - \lambda t|u|) \exp(-\lambda s|u|) (Uf)(u) du \\ &= (P(\lambda(t+s))f)(v). \end{aligned}$$

$f \in W^p$ ときは, $f_n \mapsto f$ as $n \mapsto \infty$ であるような $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ をとることによって

$$\begin{aligned} &\|P(u)t)P(\lambda s)f - P(\lambda(t+s))f\|_{W(p)} \\ &\leq \|P(u)t)P(\lambda s)f - P(u)t)P(\lambda s)f_n\|_{W(p)} + \|P(\lambda(t+s))f_n - P(\lambda(t+s))f\|_{W(p)} \\ &\mapsto 0 \text{ as } n \mapsto \infty. \end{aligned}$$

従って, すべての $f \in W^p$ について $P(u)t)P(\lambda s)f = P(\lambda(t+s))f$ である。

II. $P(\lambda s) \mapsto P(u)t) (\lambda \mapsto t) : [5, \text{Lemma 1.3}]$ によって, $f \in L^p(\mathbb{R})$ のとき L^p -norm の意味で $P(u)t)f \mapsto f$ as $t \mapsto +0$ がいえる。Lemma 1.1 から, $\|P(t)\|$ は $t = 0$ の近傍で一様に有界である。従ってすべての $f \in W^p$ について, $\|P(u)t)f - f\|_{W(p)} \mapsto 0$ as $t \mapsto +0$ がいえる。

III. Infinitesimal generator G_λ and its domain $D(G_\lambda)$: (1.3) より次のことがわかる。

$$t^{-1}(P(u)t)f - f(v) = (v-i)t^{-1} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i+it\lambda)(u-v+it\lambda)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-i\lambda)(u-v-i\lambda)} - \frac{f(v)}{v-i} \Big\} + \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-i\lambda)(u-i+i\lambda)} \\
& = (v-i)t^{-1} \Big\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(u)}{u-v+i\lambda} du + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(u)}{u-v+i\lambda} du - n(v) \Big\} \\
& + (v-i)t^{-1} \Big\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{1}{u-i} - \frac{1}{u-i+i\lambda} \right) \frac{du}{u-v+i\lambda} \\
& \quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{1}{u-i-i\lambda} - \frac{1}{u-i} \right) \frac{du}{u-v-i\lambda} \Big\} \\
& + \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-i\lambda)(u-i+i\lambda)} \\
& = (v-i)t^{-1} \Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda t, v-u) n(u) du - n(v) \Big\} \\
& + (v-i) \frac{i\lambda}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(u)}{u-i+i\lambda} \frac{du}{u-v+i\lambda} + (v-i) \frac{i\lambda}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(u)}{u-i-i\lambda} \frac{du}{u-v-i\lambda} \\
& + \frac{\Delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-i\lambda)(u-i+i\lambda)}, \tag{1.11}
\end{aligned}$$

次のように示す。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i-i\lambda)(u-i+i\lambda)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \text{ as } t \rightarrow +0, \tag{1.12}$$

$$g(t, u) = \frac{n(u)}{u-i+i\lambda} \text{ とおく。 [6. Proof of Theorem 101]}$$

より次のように示す。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, u) \frac{du}{u-v+i\lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(-t, u) \frac{du}{u-v-i\lambda} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{du}{u-v+i\lambda} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{du}{u-v-i\lambda} \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
& \leq \frac{1+M_p}{2} \{ \|g(t, \cdot) - g\|_p + \|g(-t, \cdot) - g\|_p \} \rightarrow 0 \text{ as } t \\
& \rightarrow +0. \tag{1.13}
\end{aligned}$$

一方、次のように示す。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{du}{u-v+i\lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{du}{u-v-i\lambda} + i(Cg)(v) \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
& = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(y-t) \frac{dy}{y-v+i\lambda} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(y+t) \frac{dy}{y-v-i\lambda} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + i(Cg)(v) \right|^p dv \right\}^{1/p} \\
& \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{y-v}{(y-v)^2 + (tr)^2} dy + i(Cg)(v) \right|^p dv \right\}^{1/p}
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (g(y-tq) - g(y)) \frac{dy}{y-v+i\tau} \right|^p dv \right\}^{1/p} \\ + \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (g(y+ tq) - g(y)) \frac{dy}{y-v-i\tau} \right|^p dv \right\}^{1/p}. \quad (1.14)$$

[6. Proof of Theorem 101] および [7. Example 19, p. 397]

によつて次のことがわかる。

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{y-v}{(y-v)^2 + (\tau)^2} + i(\mathcal{C}g)(v) \right|^p dv \right\}^{1/p} \rightarrow 0 \\ \text{as } \tau \rightarrow +0, \quad (1.15)$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (g(y-tq) - g(y)) \frac{dy}{y-v+i\tau} \right|^p dv \right\}^{1/p} \\ \leq \frac{1+M_p}{2} \|g(\cdot - tq) - g\|_p \rightarrow 0 \text{ as } \tau \rightarrow +0. \quad (1.16)$$

そして

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (g(y+ tq) - g(y)) \frac{dy}{y-v-i\tau} \right|^p dv \right\}^{1/p} \\ \leq \frac{1+M_p}{2} \|g(\cdot + tq) - g\|_p \rightarrow 0 \text{ as } \tau \rightarrow +0. \quad (1.17)$$

故に、(1.13) - (1.17) より次がえられる。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, u) \frac{du}{u-v+i\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} g(-t, u) \frac{du}{u-v-i\tau} \rightarrow -i(\mathcal{C}g)(v) \\ \text{as } \tau \rightarrow +0. \quad (1.18)$$

従つて、(1.11), (1.12), (1.18) として Lemma 1.3 より、

定理の主張がえられる。 <終>

§ 2. W^p 上の (C_0) 群

Lemma 1.1 より次の Lemma がえられる。

Lemma 2.1. $P(t)$ は複素右半平面上で、強連続かつ正則な作用素関数である。 $t = \xi + i\lambda$, $(-\infty < \lambda < \infty, \xi > 0)$ とおくとき、 $0 < \xi \leq 1$ かつ $|\lambda| \leq 1$ であれば $\|P(t)\| \leq M$

がいえる。ただし M は定数。

※ F において、(1.2) における α の値を 1 とする = とくする。次の Lemma が得られる。

Lemma 2.2. $-\infty < \lambda < \infty$ とするとき

$$(P(\lambda)f)(v) = \left\{ f(v-\lambda) + i(v-i)\left(\mathcal{C} \frac{f}{\cdot - i + \lambda}\right)(v-\lambda) \right\} \frac{1}{2}$$

$$+ \left\{ f(v+\lambda) - i(v-i)\left(\mathcal{C} \frac{f}{\cdot - i - \lambda}\right)(v+\lambda) \right\} \frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{(u-i+\lambda)(u-i-\lambda)}$$
 なる W^p 上から W^p への作用素 $P(\lambda)$ を定義する。このとき
 すべて $f \in W^p$ について、norm 収束の意味で

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} P(\lambda + i\lambda)f = P(\lambda)f$$
 が成立する。

Theorem 1, Lemma 2.1, Lemma 2.2 を用いて
 [2, Theorem 17.9.2] によって次の定理がえられる。

Theorem 2. $\{P(\lambda t) : -\infty < t < \infty\}$ は W^p 上の (C_0) 群である。その infinitesimal generator G_i と domain $D(G_i)$ は次のようなものである。

$$D(G_i) = \{ f \in W^p : (Cn)(x) \text{ is absolutely continuous and } DCn \in L^p(\mathbb{R}) \},$$

$f \in D(G_i)$ のとき

$$(G_i f)(x) = i(x-i)(DCn)(x) + i(x-i)(Cg)(x) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du.$$

References

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators, Part II: Spectral theory*, Interscience, New York 1963.
2. E. Hille and E. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, A. M. S. Colloq. Publ, vol. 31 (1957).
3. ———, *On the generation of semigroups and the theory of conjugate functions*, Proc. R. Physogr. Soc. Lund, 21:14 (1951), 130-142.
4. S. Koizumi, *On the singular integrals. V*, Proc. Japan Acad., 35 (1959), 1-6.
5. K. Takano, *An analogous method to Cameron and Storvick's function space integral and evolution systems*, J. London Math. Soc. 16 (1977), 83-95.
6. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of the Fourier integrals*, Oxford Univ. Press, Second Edition, 1948.
7. ———, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, Second Edition, 1939.