

一般化 Burgers 方程式と平面 Poiseuille 乱流の 数値実験

東大工 桑原 真二

§ 1. 非等方、非一様な乱流の定式化

乱流現象を数学的にみて興味のあるものは、定常な境界条件、ランダムな強制力をもたない基礎方程式にもかかわらず非定常運動を持続することである。カルマンの渦列もこの範疇にはいるが、乱流の前段階とみなすことができよう。こゝでは平面ポアズイユ流の一次元化モデルである一般化バーガス方程式と2次元の攪乱をともなう平面ポアズイユ乱流と非一様、非等方の乱流の例としてとりあつかう。

乱流を基本流とそれに重ね合わされた乱れとして表わすのが普通である。すなわち流速 u を

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + \tilde{u}(x, t) \quad (1.1)$$

とおき、 $\bar{u}(x)$ を層流の定常解ととる。それ故、2のような分解では $\tilde{u}$ の統計平均は0と取らないう：

$$\langle \tilde{u} \rangle = 0 \quad (1.2)$$

こゝで、 $\tilde{u}$ を

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{\mathbf{l}} a_{\mathbf{l}}(t) v_{\mathbf{l}}(x) \quad \mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3) \quad (1.3)$$

と分解し, $v_{\mathbf{l}}$ を正規直交のベクトル関数とせう。

$$(v_{\mathbf{l}}^*, v_{\mathbf{m}}) = \delta_{l_1, m_1} \delta_{l_2, m_2} \delta_{l_3, m_3} \quad *: \text{複素共役} \quad (1.4)$$

$(,)$ はある種の内積とする。 $\mathbf{l}$ は直交関数のモードを表わすものであるが, すべてが必ずしも l_i と l_j の値ではなく, その内のいくつかは連続の値をとりうる。

後に示すように一般の流体力学系は, 上の分解をもちいると $a_{\mathbf{l}}$ に対する時間について 1 階の微分方程式となる。

$a_{\mathbf{l}}$ は各モードの振幅で, 決定論的方程式にしたがい, しかも臨界レイノルズ数を越えた状態では, 非常に複雑なふるまいをすると考えられる。臨界レイノルズ数を越えた状態では, 初期条件として $t=0$ の 2, 3 のモードだけに微小な振幅をあたえたとしても, 時間がたつにつれて多くのモードが励起されて, ある定常な乱流に到達するものと予想される。われわれは基本流として層流の定常流をとったが, 定常な乱流状態では, 平均流はレイノルズ数によって変化する。それ故これらのモードの平均値のすべては, 必ずしも 0 にならない:

$$\langle a_{\mathbf{l}} \rangle_T \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a_{\mathbf{l}}(t) dt = \bar{a}_{\mathbf{l}} \quad (1.5)$$

そこで平均流は

$$\bar{v} = \bar{u} + \sum_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}(x) \quad (1.6)$$

乱れは

$$\tilde{v} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} - \bar{a}_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}}(x) \quad (1.7)$$

で表わされる。

後にわかるように、特殊な初期条件から始めるとすべてのモードは励起されないことがある。しかし、“ある初期条件から上述の方程式を解いて、時間を十分大きくすれば、定常乱流のほとんどすべての状態をへめぐる”ことがほとんどすべての初期条件に対して成立することと考えられる。(エルゴードの仮定)

§2. 一般化バーガース方程式

Burgers は平面ポアズイユ流をモデル化して次の方程式を導いた。

$$\kappa \frac{dU}{dt} = P - \frac{\nu U}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} \int_0^{\kappa} v^2 dy \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\kappa} U v + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2)$$

ここで

$$U(t) = \int_0^{\kappa} u dy \quad (2.3)$$

$(u(y, t), v(y, t))$ は2次元の流れ、 κ はみその中、 P は圧力勾配に対応する定数である。

(2.1), (2.2) の定常解は

$$U = \frac{bP}{v} \equiv U_0 = \text{const.} \quad v=0 \quad (2.4)$$

となる。ここで次のような無次元化を行おう。

$$\left. \begin{aligned} 2v/U_0 &\rightarrow v, & y/b &\rightarrow y \\ U/U_0 &\rightarrow U, & U_0 t/b &\rightarrow t \\ R &= U_0 b/v \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

そこで (2.1), (2.2) は

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{R}(1-U) = -\frac{1}{4} \int_0^1 v^2 dy \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = Uv \quad (2.7)$$

となる。

さて

$$U = 1 + \tilde{u}, \quad v = \tilde{v} \quad (2.8)$$

とおいて, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を 1 次の微小量として, 線形化すれば

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{R} \tilde{u} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} = \tilde{v} \quad (2.10)$$

となる。(2.10) の境界条件:

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (2.11)$$

のもとに解くと

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v} &= V e^{ky - i\omega t} & V: \text{定数} \\ k &= \pm i \sqrt{R(1+i\omega)} \\ \omega &= i(1 - \pi^2 l^2/R) \quad l=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

となる。そこで $\tilde{v}$ は $e^{-i\omega t} = e^{(1 - \pi^2 l^2/R)t}$ の因子をも

つから $R > \pi^2$ では不安定となる。すなわち臨界レイノルズ数は $R_{cr} = \pi^2$ である。(2.9) からわかるように $\tilde{u}$ は $e^{-t/R}$ で減衰する。

v を $T-1$ 級数:

$$\left. \begin{aligned} v(t, y) &= \sum_{l=1}^{\infty} a_l(t) \varphi_l(y) \\ \varphi_l(y) &= \sqrt{2} \sin \pi l y \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

に代入し, $l \in L$ 項までにとり (2.7), (2.6) は

$$\dot{a}_1 + (\pi^2/R - U) a_1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_{m=2}^{L-1} a_m a_{m-1} = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_l + (\pi^2 l^2/R - U) a_l + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\sum_{m=1}^{l-1} m a_{l-m} a_m \right. \\ \left. - l \sum_{m=1}^{L-l} a_{m+l} a_m \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\dot{U} - \frac{1}{R} (1 - U) + \sum_{l=1}^{L-1} a_l^2 = 0 \quad (2.16)$$

となる。

本1図は $R = 20, > R_{cr} = \pi^2 \doteq 9.86, L = 20,$

初期条件: $U = 1, a_1 = \sqrt{2E_0} \cos \alpha,$

$a_2 = \sqrt{2E_0} \sin \alpha, a_3 = \dots = a_{20} = 0,$ とした行々の数値計算の結果である。

この方程式については、他にも研究があるが、次のような性質をもつといえるように思われる。

有界な領域での初期値問題では

1) $t \rightarrow \infty$ で、各 R に対応する定常解におちつく。

$R = 20$ では $t \approx 50$ まで定常解となり, $U(\infty) \approx 0.77$

2) 定常解 $v(y)$ が存在すれば, $-v(-y)$ も定常解であることは方程式によって証明できるが, どちらにおおつから初期条件による。

以上のことから一般化バーガース方程式は乱流的性格とあまりもちあわせているふうに見える。

§3. 平面ポアズイユ乱流

平面ポアズイユ流に対して, §1 でのべた方法を適用するにあたり, 長さ a とみその中で, 速度は層流定常流の最大値 U で時間 a/U , 圧力を ρU^2 で無次元化する (ρ は密度)。そこで y の領域は $[0, 1]$ とし

$$\bar{u} = (4y(1-y), 0) \quad (3.1)$$

となる。乱れに対する方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{R} \Delta \right) \tilde{u} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{d\bar{u}}{dy} e_1 + (\tilde{u} \cdot \text{grad}) \tilde{u} = -\text{grad } \tilde{p} \quad (3.2)$$

となる。

ここで乱れは 2 次元, x について周期 2 の周期性を仮定する。したがって x について $[-1, 1]$ を考えればよい。以上は乱れの数学的表現に対する単純化であり, それによ

て、乱流の物理的特徴が失われたものではな。更に何々の速度のモードがソレノイダルであると仮定する。

以上のことを考慮して v_e に次の条件を課する。

$$1) \quad \operatorname{div} v_e = 0 \quad (3.3)$$

$$2) \quad v_e(-1, y) = v_e(1, y) \quad (3.4)$$

$$3) \quad v_e(x, 0) = v_e(x, 1) \quad (3.5)$$

$$4) \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} dx = 0 \quad y=0, 1 \quad (3.6)$$

4) の条件は $y=0, 1$ における (3.1) の x 成分:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -\frac{R}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (3.7)$$

と x について積分して

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} dx &= -\frac{R}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} dx \\ &= -\frac{R}{2} (\tilde{p}(1, y) - \tilde{p}(-1, y)) = 0 \quad (3.8) \end{aligned}$$

によってえられる。ここで $\tilde{p}$ の周期性 $\tilde{p}(1, y) = \tilde{p}(-1, y)$ を仮定しているが、 v_e の周期性から考えても当然期待されることである。

以下 $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (\ell, m, 0)$ とおく。 $v_{\ell m}$ は次のようにしてつくることができる。まず

$$\begin{aligned} v_{\ell m}(x) &= \varphi_\ell(x) (\psi'_m(y), -\pi i \ell \psi_m(y)) \\ \varphi_\ell(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi \ell x} \end{aligned} \quad (3.9)$$

とおく。この形式によって (3.3), (3.4) の条件は満足される。つぎに (3.5), (3.6) の条件は

$$l=0 : \quad \psi_m = \begin{cases} \sim y^2 + \alpha, & y \doteq 0 \\ \sim (1-y)^2 + \beta, & y \doteq 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$l \neq 0 : \quad \psi_m = \begin{cases} \sim \alpha y + \beta y^3, & y \doteq 0 \\ \sim \alpha(1-y) + \beta(1-y)^3, & y \doteq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

を要求している。そこで

$$\begin{aligned} l=0 & : \quad \hat{\psi}_m = \cos \pi m y \\ l \neq 0 & : \quad \hat{\psi}_m = \cos \pi m y - \cos \pi (m+2) y \end{aligned} \quad (3.12)$$

とおくことにして (3.10), (3.12) は満足される。このようにしてつくった $\hat{v}_{lm}$ を Schmidt の方法によって直交化して

$$(\hat{v}_{lm}^*, \hat{v}_{lpq}) = \delta_{lp} \delta_{mq} \quad (3.13)$$

を満足する v_{lm} をつくり上げるこができる。そこで

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \bar{u}(y) e_i + \tilde{u}(x, t) \\ \tilde{u}(x, t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{lm}(t) v_{lm}(x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

とおくことができる。

こゝで内積は

$$(f, g) = \int_0^1 \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx dy \quad (3.15)$$

で定義されている。(3.14) を (3.2) に代入し、更に $\hat{v}_{lm}^*$

との内積をとると a_{lm} に対する微分方程式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{da_{lm}}{dt} + \frac{2}{R} \sum_p A_p^{lm} a_{lp} + \sum_{np2} A_{np2}^{lm} a_{np} a_{l-n2} \\ = \sum_p S_p^{lm} a_{lp} \end{aligned} \quad (3.16)$$

→ て

$$\left. \begin{aligned} A_p^{lm} &= -(V_{lm}^*, \Delta V_{lp}) \\ A_{np2}^{lm} &= (V_{lm}^*, (u_{l-n2} \frac{\partial}{\partial x} + v_{l-n2} \frac{\partial}{\partial y}) V_{np}) \\ S_p^{lm} &= -(V_{lm}^*, \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} V_{lp}) - (u_{lm}^*, v_{lp} \frac{d\bar{u}}{dy}) \end{aligned} \right\} (3.17)$$

である。→ て (3.16) の左辺第2項は粘性項、第3項は2次の慣性項 (非線形相互作用)、右辺は慣性項から出る基本流と乱れの相互作用と考へようものである。この右辺は等方性乱流では存在しない、いわば基本流から乱れをつくり出すソースの役割をはたす。 A_{np2}^{lm} と S_p^{lm} は純虚数である。

この論文では、物理的現実そのまゝを表わすことは主眼があるのではなく、物理的乱流の機構に興味をもつ。そこでこれらの機構をそのうち最も簡単なモデルを考へる。それは V_{lm} において $l=0, \pm 1, \pm 2, m=0, 1$ のこととする。ここで $V_{00} \equiv 0$ であるから5つのモードのことになる。

第2図は $R=20,000$ 、初期条件 $a_{10}=a_{11}=2^{-\frac{1}{2}}$ 、 10^{-2} (第2図上より1, 3番目のモード) について行った

数値実験の結果で、 a_{lm} (モードの振幅) の時間的发展を示したものである。平面ポアズイユ法の線形安定理論による臨界レイノルズ数は約 10,000 である。図の左側に示した流れの図は各モードのスケッチであるが、基本ベクトル関数 v_{0m} ($=v_{lm}$) が一般に虚数数 ($l=0$ のとき) であるので、その実数部に対する流れを示したもので、虚数部は別の模様を半周期ずらせたものに相当する。それ故、 a_{lm} も、一般に虚数数 ($a_{-lm} = a_{lm}^*$) で、図の実線が実数部を、破線が虚数部をあらわしている。このはあい、上に述べたように 9 個のモードをとったものであるが、 v_{01} の基本流は励起されていない。時間のメッシュは $\Delta t = 0.001$ 、直線でみ插する手法で計算した。これは $t = 100$ までの計算結果であるが、十分に定常流流に達しているかどうか、よくわからない。

§4. おさらい

非一様、非等方な乱流を理論的に研究する方法として、乱流場を基本流と乱れに分け、更に乱れを適当な正理直交関数 (モード) で表わして、一般化バーガース方程式およびエ・ストークス方程式に適して、モードの振幅に対する方程式をえら。

一般化バーガース方程式では、層流解が、臨界レイノルズ

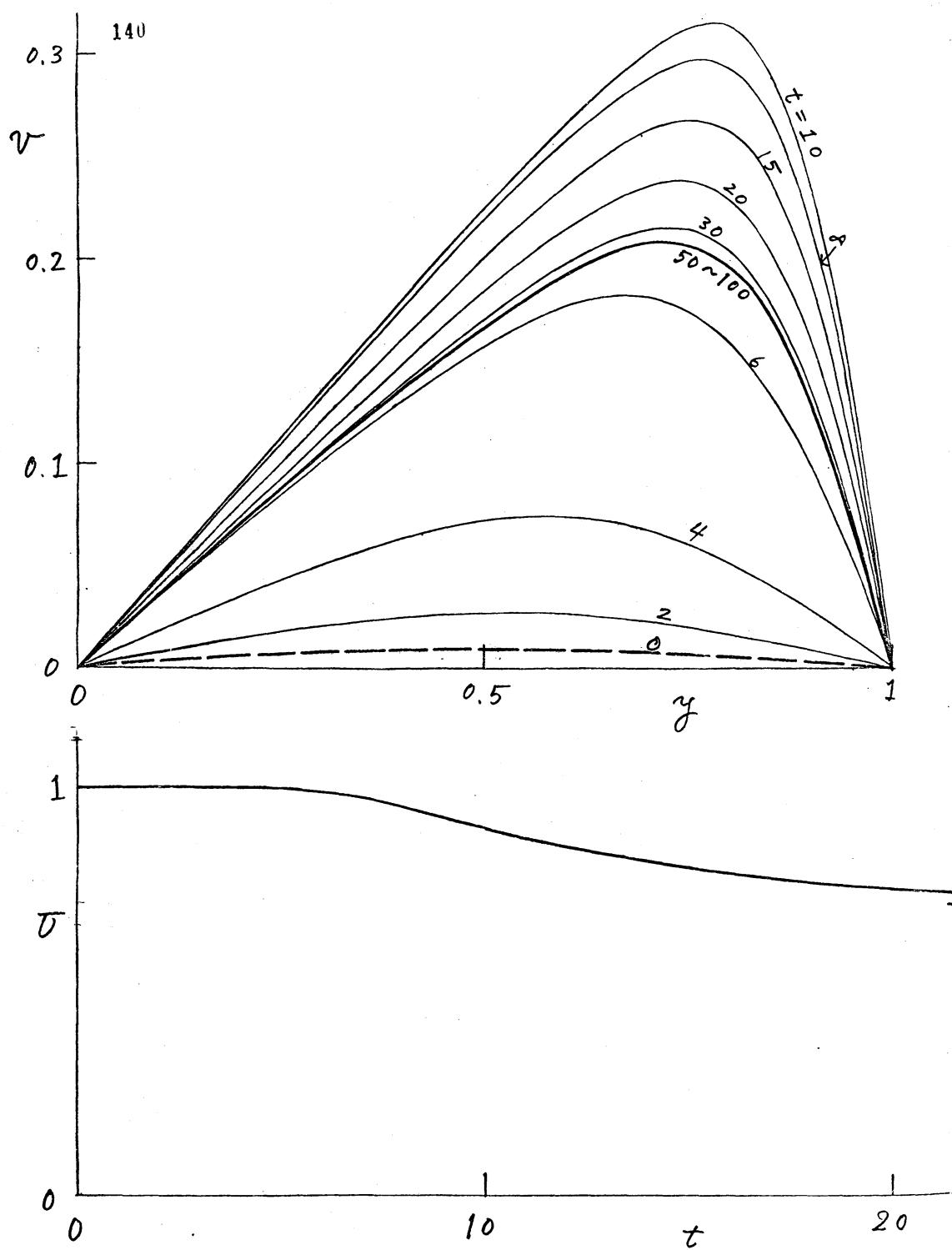
$R_{cr} = \pi^2$ 以上で不安定となり、乱流の特徴はえられず、他の層流解に移る ことが示された。

平面ポアズイユ流について、乱流の特徴である非線形相互作用、すなわち基本流から乱れのモードへのエネルギーの変換、モード間の相互作用、乱れによる基本流の変形を上の方程式によってしうべし。9個のモードをとり計算を行なったのであるが、基本流から乱れのモードへ移り、モード間の相互作用によって各モードへエネルギーが更に分配する機構はわかったが、基本流の変形はみられなかった。

モードの数をふやすことによって基本流の変形、乱流の特徴である偶然性の様相がましく行くことが想像される。

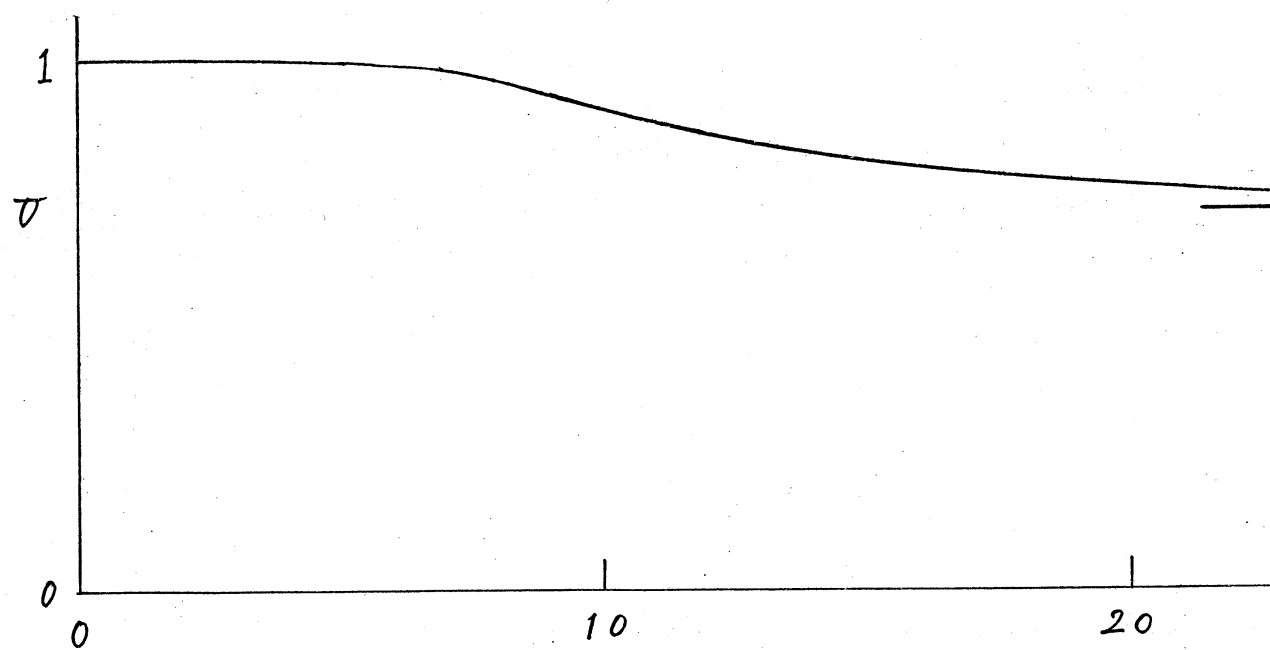
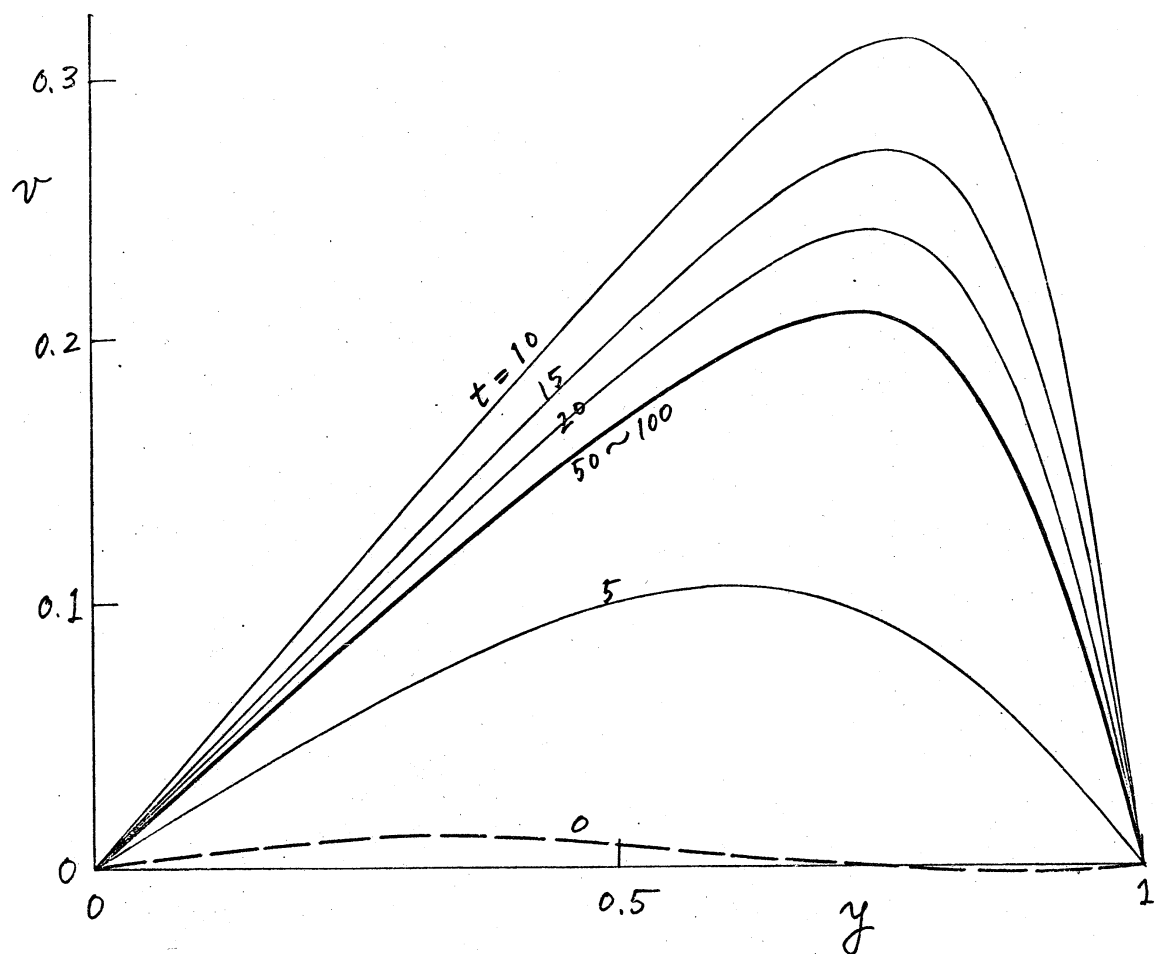
参考文献:

- 1) Burgers, M. J.: *Advances in Appl. Mech.*
(Acad. Press Inc., 1948) vol. 1, p171
- 2) Case, K. M. & S. C. Chiu: *Phys. Fl.* 12 (1969) 1799.
- 3) Lee, J.: ~~IFT~~ *Phys. Fl.* 15 (1972) 540.



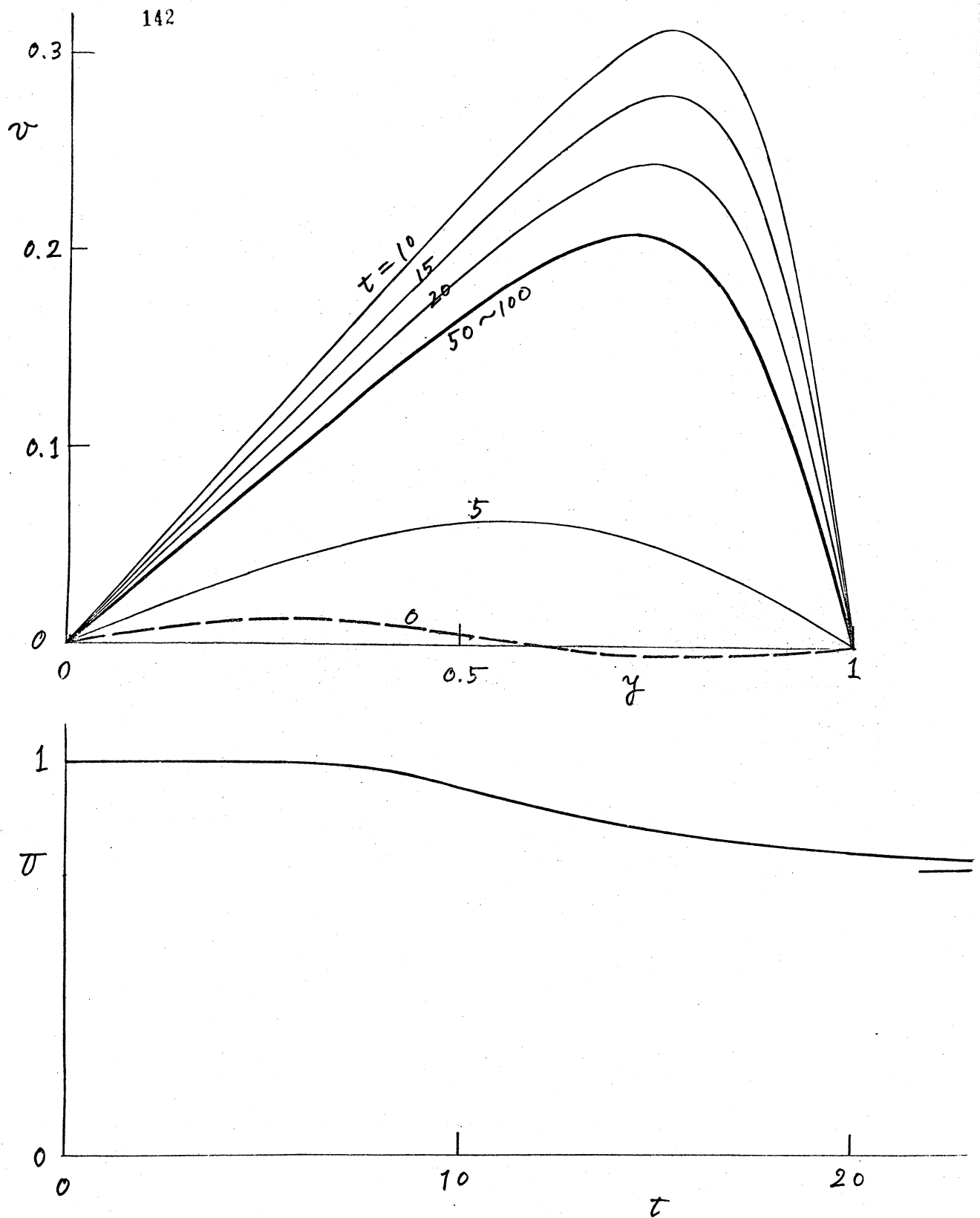
(a) $R = 20$, $V = 1$, $E_{ini} = 10^{-4}$, $\alpha = 0$

图 1 121



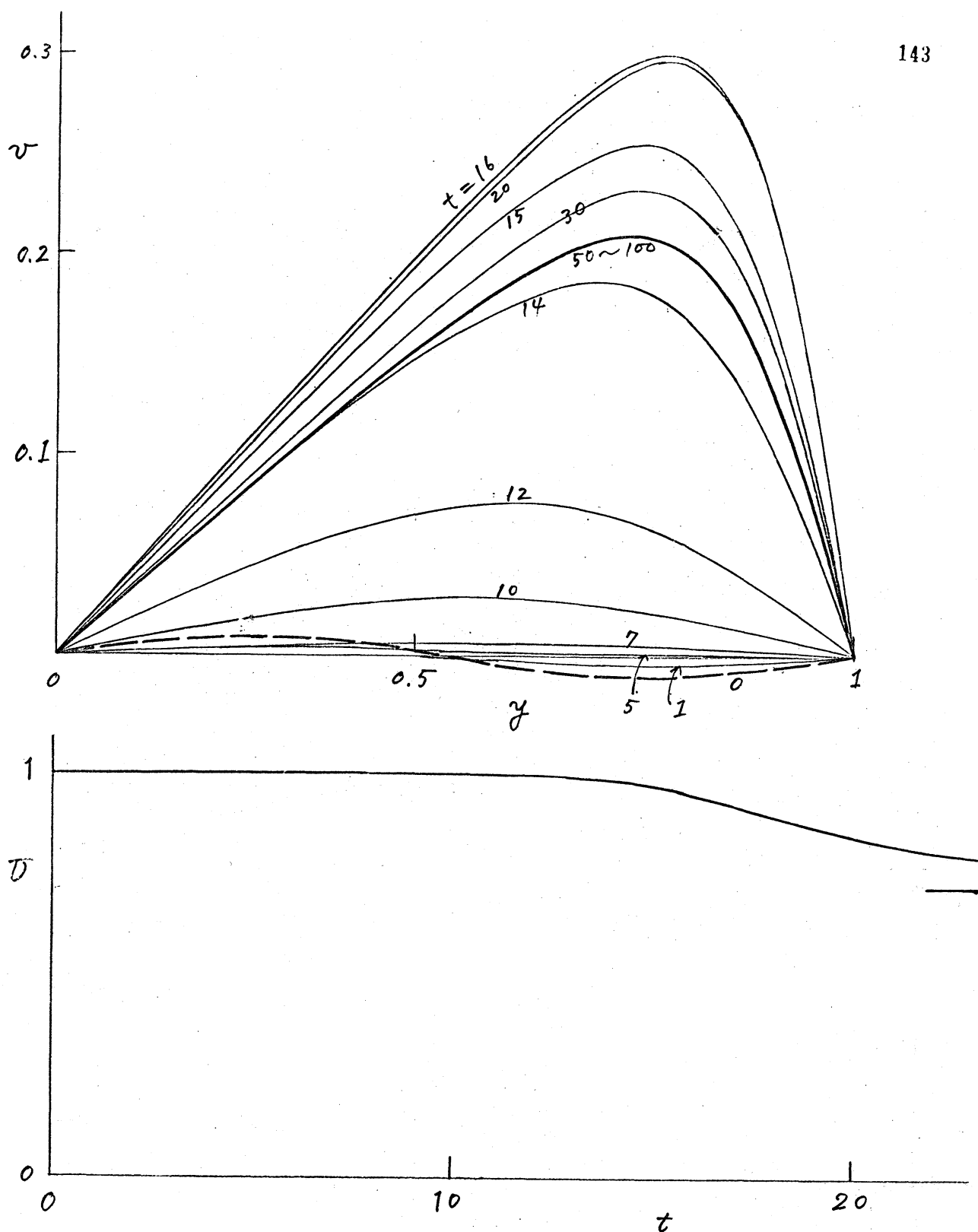
(b) $R=20$, $V=1$, $E_{ini}=10^{-4}$, $\alpha=30$

图 1 21



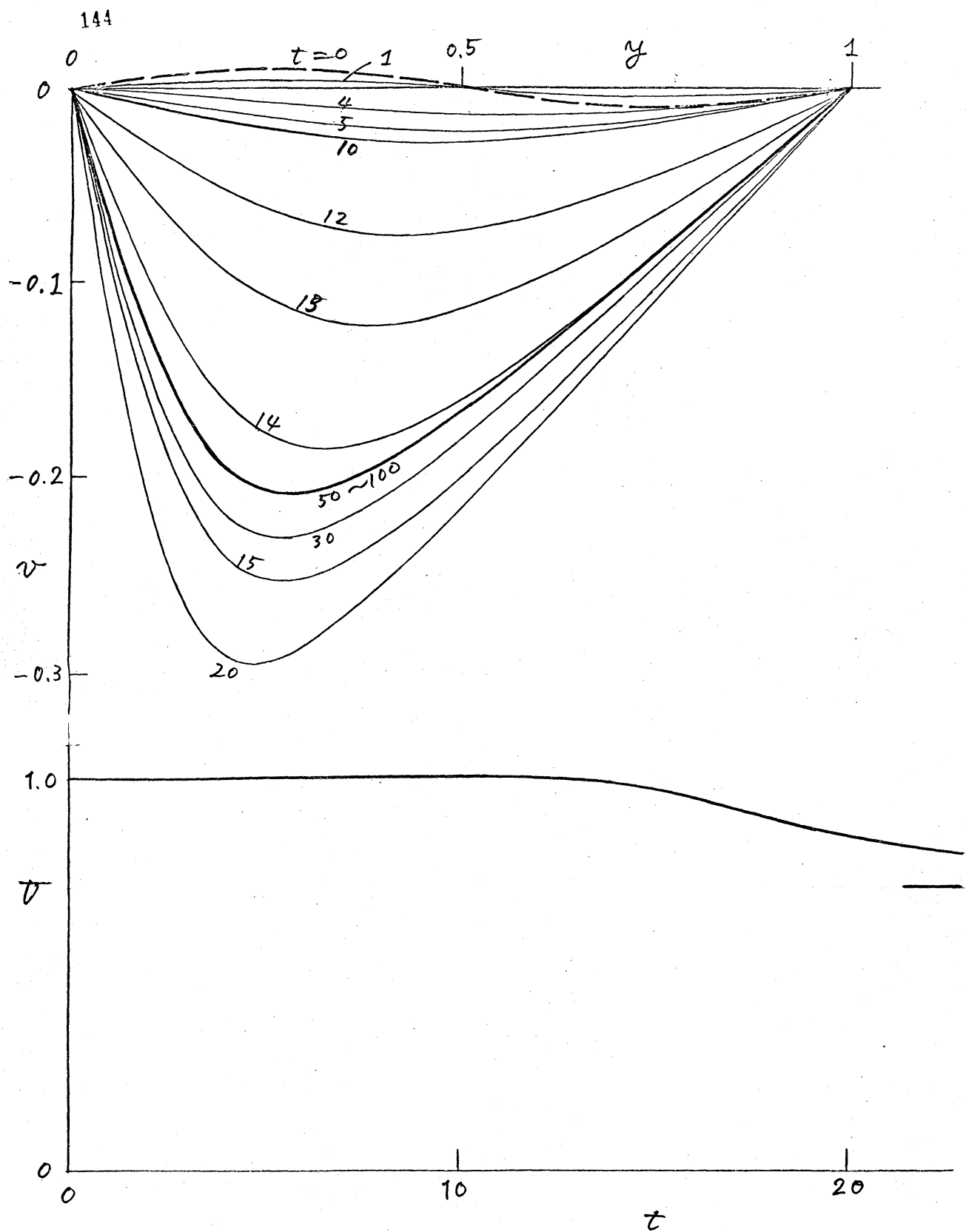
(c) $R = 20$, $U = 1$, $E_{mi} = 10^{-4}$, $\alpha = 60$

才 1 図



(d) $R = 20$, $U = 1$, $E_{ini} = 10^{-4}$, $\alpha = 89$

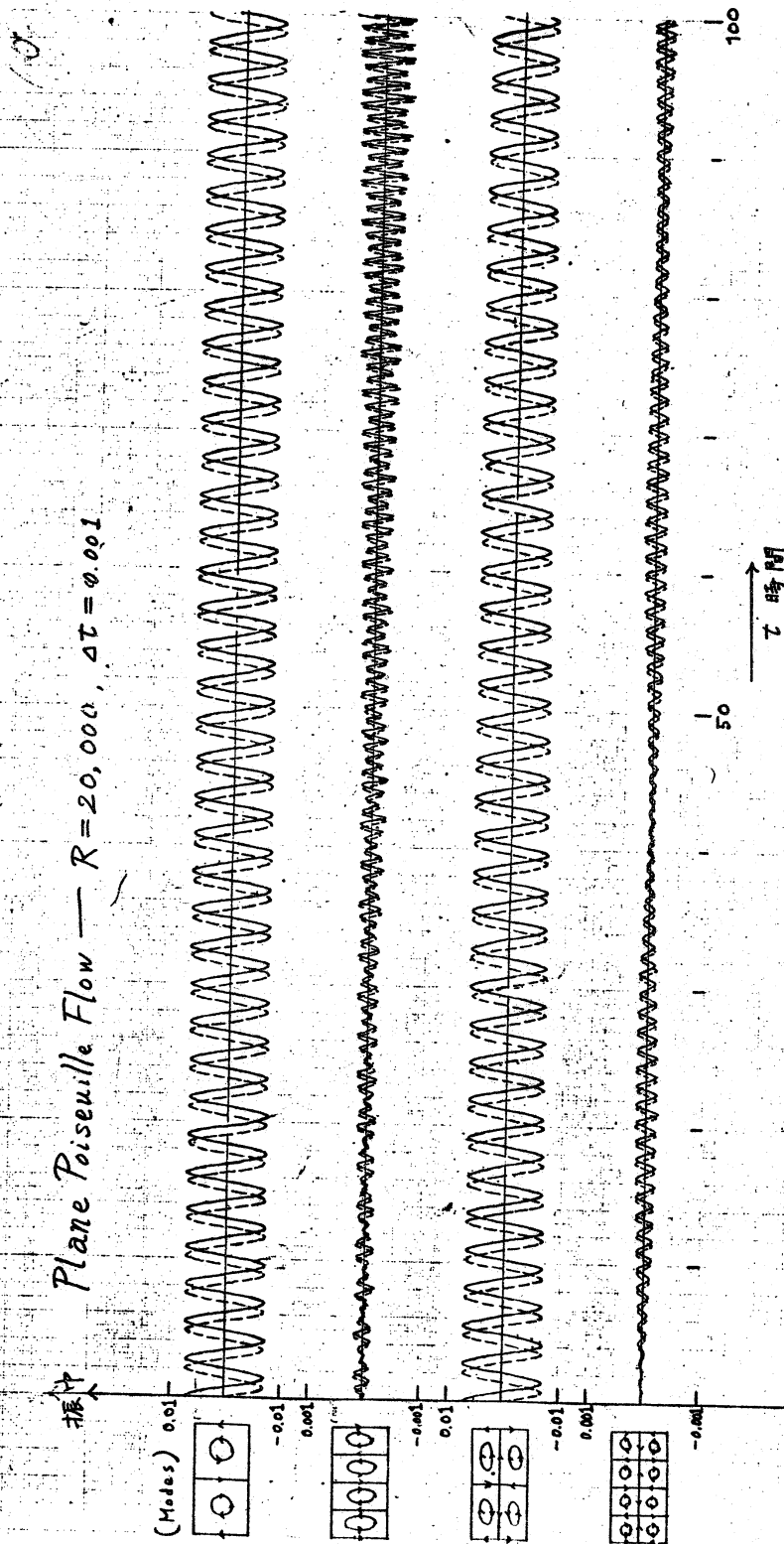
※ 1 図



(e) $R=20$, $V=1$, $E_{ini}=10^{-4}$, $\alpha=9/$

第 1 图

振子
Plane Poiseuille Flow — $R = 20,000$, $\Delta t = 0.001$



2.13