

反転を意識した授業例

動的幾何学ソフトウェアを用いたアクティブラーニング

東海大学・理学部数学科 前田 陽一 (Yoichi Maeda)

Department of Mathematics,
Tokai University

Abstract. この論文では、東海大学で行っている動的幾何学ソフトによる授業内容を紹介する。反転は一次分変換の中でも非常に重要な変換であるが、動的幾何学ソフトを用いるとその重要性が作図を通して容易にわかる。また、アニメーションを用いると直線を円の極限として捉えることができ、反転の極限として線対称が得られることがわかる。これにより、ユークリッド幾何における線対称、平行移動、回転、相似変換と反転との関係が明確になる。さらに、モンジュの定理の3次元的な証明から、ある仰角の問題を提示し、その問題の解に反転が関わることを示す。最後に、仰角の問題が双曲幾何と関係があることも紹介する。本研究で用いる動的幾何学ソフトウェアはCabriIIplusとCabri 3Dである。

1 DGSを授業で取り入れるメリット

動的幾何学ソフト (Dynamic Geometry Software) を用いる最大の利点の一つが作図したものを自由に動かせることである。特に本論文で強調したいことは、次の2点である。

- 1) 動かすことによって、動かないものが見えてくる。
- 2) 極限をとることによって、異なる変換の関係が見えてくる。

図 1.1 は、2つの円の相似の中心を発見する教材である。2つの円の相似の中心を見つけるためには、まず円の中心を通る一組の平行線を引く。次に、円と平行線の2交点を直線で結び、アニメーションコマンドで交点Pを円上で動かしてみる。すると、直線が動的に変化するが、動かない不動点Cを発見することができる。これが、「動かすことによって、動かないものが見えてくる」という典型的な例である。図 1.1 では、外側の相似の中心を求めているが、円と平行線の交点の結び方によって、内側の相似の中心を発見する学生もいる。

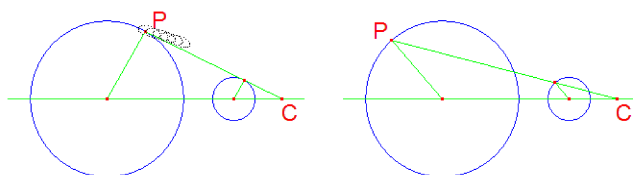


図 1.1: 相似の中心を発見するためのアニメーションコマンドの利用

図 1.2 は、反転の極限として線対称が得られることを直観的に理解する教材である。円の中心を左方向の無限遠点にアニメーションで動かすと、三角形の反転の像が、直線に関する線対称の像に変化していることが容易に理解できる。これが、「極限をとることによって、異なる変換の関係が見えてくる」という例である。またこの事実から、反転が等角変換であること、反転の基準となる円の近傍では近似的に等長変換であることも予想できる。このように、アニメーション機能をうまく使うことによって、授業内容を飛躍的に充実させたものにできるところが動的幾何学ソフトの優れた点である。今回は、Cabri を用いているが、全く同様のことが geogebra でも実現できる。

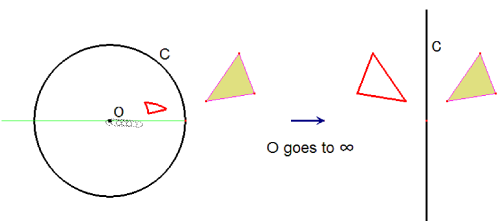


図 1.2: 反転の極限としての線対称

2 反転から見たユークリッド幾何と立体射影との関係

反転を通してユークリッド幾何学を見直すことによって、基本的な変換である線対称、平行移動、回転、相似変換は、ある意味で反転を基礎にしていることが再認識される。まず、平行移動と回転が共に 2 回の線対称変換で得られることを確認しておく ([2] pp.8-10, [3] pp.15-16). 実際、すべての平行移動は一組の平行線に関する線対称変換の合成で得られる。同様に、すべての回転は一組の交わる直線に関する線対称変換の合成で得られる (図 2.1 参照)。相似変換はどうであろうか？ 相似変換は等長写像ではないが等角写像である。図 2.2 のように、相似変換は一組の同心円に関する反転の合成で得られる ([3] p.19).

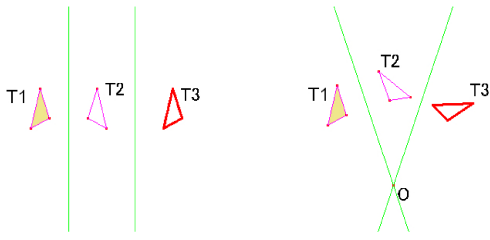


図 2.1: 線対称変換の合成としての平行移動と回転

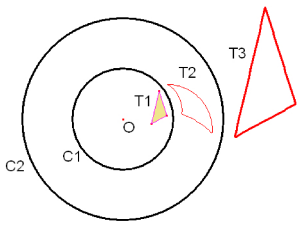


図 2.2: 反転の合成としての相似変換

このように、高校までで習った幾何学を反転で再構成することができる。ここで、今まで出てきた変換の関係をまとめておこう。6つの記号を用意する。“○”（反転），“|”（線対称），“||”（平行移動），“×”（回転），“⊙”（相似変換），そして，“!”（立体射影）である。

立体射影と反転の関係については、図 2.3 のように、平面上の図形をまず南極 S から球面に射影（正確には立体射影の逆写像）し、次に北極 N から平面に立体射影することによって反転が得られる。

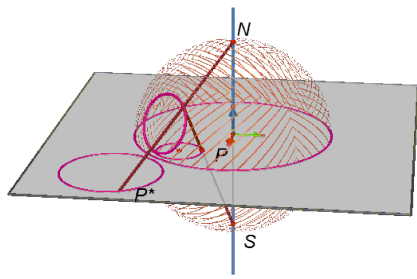
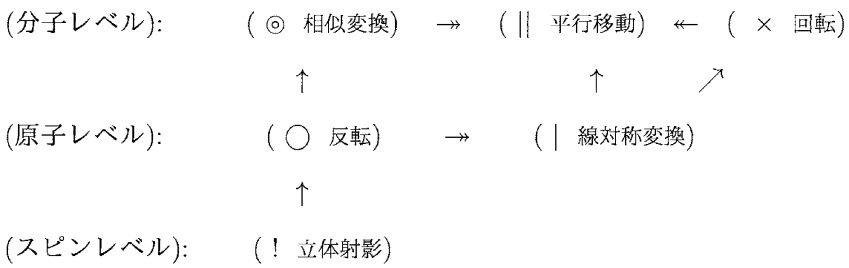


図 2.3: 立体射影の合成としての反転

これら 6 つの変換は、次のような図式で関連付けられる。



ここで、矢印 “→” は、円の中心または回転の中心を無限遠点に持っていく極限操作を意味する。また、矢印 “↑” は、変換の 2 回の合成を意味する。原子レベルでは、向きは反対になる。一方、分子レベルでは、向きは偶数回の変換の合成により保たれる。この図式から、反転がユークリッド幾何の変換の根源的な位置を占めることがわかり、さらに、反転が立体射影から得られることがわかる。

3 Monge の定理からの応用問題

図 3.1 は、「3 つの円の外側の相似の中心は同一直線上にある」という Monge の定理（右図）の三次元的証明である（左図）。

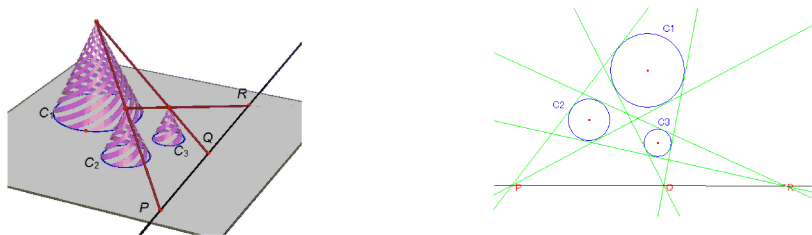


図 3.1: Monge の定理 (右) とその三次元的証明 (左)

ここで、次の問題を考えてみる。「左図の P, Q, R 地点から 3 つの塔を見ると 2 つの塔が重なって見える。では、 P, Q, R を通る直線上に立っている人から見ると 3 つの塔の先端はどのように見えるであろうか？」答えは、「3 つの塔の先端は一直線上に見える」である。では、次の問題はどうか？「3 つの塔の先端の仰角が等しい地点は存在するか？ 存在するとそれはどこか？」この答えは、「存在するとしたら高々 2 点である」となる。

図 3.2 は、2 つの塔において、仰角が等しくなる地点の軌跡が円であることを示している。点 E は外側の相似の中心であり、点 I は内側の相似の中心である。この 2 点において仰角が等しくなることは明らかである。線分 EI を直径とする円上では仰角が等しくなることが作図実験を通してわかり、実際の証明は、Apollonius の円と同様の考察を行うことによって明らかとなる。

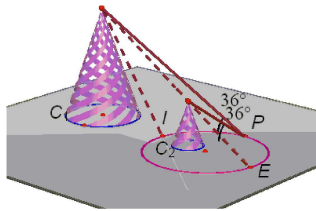


図 3.2: 2 つの塔において仰角が等しい地点としての円

4 仰角問題と反転との関連

3 つの塔の場合の仰角問題は、3 つの円の交点として得られる。塔の位置関係によって、解が 2, 1, 0 個の可能性がある。図 4.1 は、解が 2 つある場合を示している。

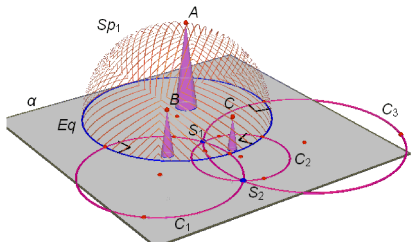


図 4.1: 3 つの塔において仰角が等しい地点

図 4.1 には 3 つの塔の頂点を通り、地面に垂直に交わる半球面が描かれている。この球面に関して 2 つの解 S_1, S_2 が反転の関係にあることが確認できる。実際の証明は、相似の中心を直径とする円 3 つすべてが半球面の赤道と直角に交わることを示すことによって証明される。その証明の中で立体射影が用いられる。一般に球面の緯線と経線が直角に交わるという事実をうまく用いて、平面上の直角性を証明する。

5 双曲幾何への応用

図 5.1 に描かれている逆さまの直円錐は、仰角が等しい地点 S_1 を頂点とし、地面に垂直で点 S_1 を通る直線 L_1 を軸とし、頂点 A を通っている。この逆さまの直円錐は 3 点 A, B, C の仰角が等しいかどうかを確認するために描いたもので、確かに同一円錐上に 3 点に乗っていることが確認できる。

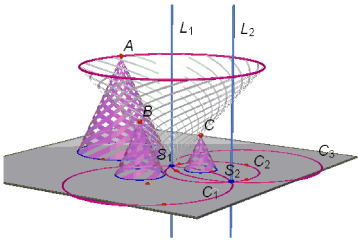


図 5.1: 3 点を通る等距離面

さて、図 5.1 を 3 次元双曲空間の上半空間モデルとみなしてみると、ある事実が見えてくる。上半空間モデルにおいて逆さまの直円錐は、測地線 L_1 からの等距離面である ([1] p.162)。全く同様に、地点 S_2 を通る測地線 L_2 を軸とした逆さまの直円錐を描くことができ、3 点 A, B, C が L_2 からも等距離にあることがわかる。2 つの測地線 L_1, L_2 は、1 つの無限遠点を共有し、他方の無限遠点 S_1, S_2 は、3 点 A, B, C を通る測地平面に関して鏡映の関係にある。以上の考察から、次の命題を得ることができる。

命題 5.1. 3 次元双曲空間 H^3 において、3 点 A, B, C が測地線 L_1 から等距離にあるとする。3 点 A, B, C を通る測地平面を α 、測地線 L_1 の無限遠点を V_0, V_1 とする。無限遠点の任意の 1 点 V_1 を測地面 α に関して鏡映で移した無限遠点を V_2 とすると、3 点 A, B, C は、 V_0 と V_2 を無限遠点にもつ測地線 L_2 から等距離にある。

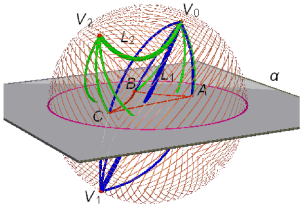


図 5.2: 3 点を通る 2 つの等距離面の存在 (三次元ポアンカレモデル)

6 結論

本稿では、動的幾何学ソフトを用いて、教育にどのように活かせるかを検証した。反転を核として、ユークリッド幾何の変換を関連付けて再構成できるを見た。また、モンジュの定理を題材にして、三次元の仰角問題を提案し、2つの相似の中心が解を求めるのに重要な役割を果たしていることを見た。さらに、解が2つ存在する場合、それら2つの解は反転の関係にあることがわかった。また、その事実を双曲幾何に応用することにより、双曲空間の命題を導くことができた。これら一連の流れから分かることは、動的幾何学ソフトは教育、研究に非常に役に立つツールであるということである。動的幾何学ソフトを用いると、観察、実験、予想、検証、発見が容易にできる。教育現場でのアクティブラーニングのツールとして、また研究をサポートするソフトとして、さまざまな利用が期待できる。

参考文献

- [1] Beardon, A. (1983). *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag New York Inc.
- [2] George Jennings (1994), *Modern geometry with applications*. Springer-Verlag New York, Inc.
- [3] 谷口雅彦・奥村善英 『双曲幾何学への招待－複素数で視る－』 培風館, 1996.