

§ 6 おわりに

以上，非常に粗っぽい，いわばデッサンのような話を展開したが，電子プラズマにおける“roton”という正体の知れないものをどういう風に処理したら良いのか，昔“量子流体力学”の理論について色々と経験された先輩の御教示をいただければ幸いである。

引用文献

- 1) Drummond and Pines, Proceedings of the Salzburg Conference (1961)
Vedenov, Velihov and Sagdeev, Proceedings of the Salzburg Conference (1961)
- 2) J.M.Ziman, Proc. Roy. Soc. A. 219 (1953), 257
- 3) Krylov-Bogoliubov, Introduction to Non-linear Mechanics
Kiev, (1937)
- 4) Prigogine, Non-equilibrium Statistical Mechanics
- 5) 金沢・松平，日本物理学会誌

Indirect Exchange Interaction についてのノート

阿部 龍 蔵 (物性研)

(10月10日受理)

Kasuya¹⁾, Yosida²⁾, Kaplan-Lyons³⁾ といった $s-d$ (あるいは $s-f$) 相互作用を勉強しているうちに気づいたことがあるので報告したい。 $s-d$ 相互作用は伝導電子の分極をひきおこしそのため d 電子のスピン間に次のような相互作用が働らく。

$$-\sum_{(ij)} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (1)$$

これは通常 Indirect Exchange Interaction とよばれているが統計力学的な取扱いの際は $\beta = (k_B T)^{-1}$ として次の K_{ij} を定義するのが便利である。

$$K_{ij} = \beta J_{ij} \quad (2)$$

伝導電子の Fermi 面がまん丸である，s - d 相互作用は2次の摂動計算でとり扱える，という二つの仮定下で K_{ij} は

$$K_{ij} = \frac{3n\beta}{4E_F N_L} \frac{1}{q} \sum |J(q)|^2 f(q) e^{iq(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)} \quad (3)$$

で与えられる。ここで

n : 伝導電子の総数，

N_L : 格子点の総数，

$J(q)$: 伝導電子と d (あるいは f) core 電子との間の交換積分，

E_F : 伝導電子の Fermi energy

$$f(q) = 1 + \frac{1-y^2}{2y} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right|, \quad (4)$$

$$y = q/2k_F,$$

k_F : Fermi wave number

である。簡単のために一価金属を考え ($N_L = n$)， $J(q) = J(0) = \text{const.}$

と仮定すると

$$K_{ij} = \alpha \frac{\sin x - x \cos x}{x^4} \quad (5)$$

$$x = 2k_F |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| \quad (6)$$

$$\alpha = (9/4) (4\pi/E_F) J^2(0) \beta \quad (7)$$

という Ruderman-Kittel-Yosida の相互作用がえられる。ところで Kaplan-Lyons³⁾ は，

$$J(q) = J(0) \frac{\sin q r_0}{q r_0} \quad (8)$$

という形を仮定し $x \gg 1$ の $K(x)$ の漸近形を求めている。ここで r_0 は d (あるいは f) core のひろがりを表わすパラメータである。

前書きはこれ位にしてここでは (8) で与えられる $J(q)$ に対しても $K(x)$ が厳密に求まることを示したい。したがって以下に述べることは単なる積分の演習問題であるが、きちんとできるものはきちんとしておいた方がよいように思えるし、Kohn anomaly を与える (4) の函数は物性理論では屢々現われるので以下の計算法がなにかのたしになれば幸いである。

(3), (6), (7), (8) から $K(x)$ は

$$K(x) = (\alpha/\pi) x^{-1} I(x) \quad (9)$$

で与えられる。ここで

$$I(x) = \int_0^\infty y r(y) f(y) \sin xy \, dy \quad (10)$$

$$r(y) = \frac{\sin^2 \lambda y}{\lambda^2 y^2}, \quad \lambda = 2k_F r_0$$

である。(10) の integrand が y について対称であることを使いた

$$f(y) = \frac{1}{y} \int_0^1 t \ln \left| \frac{t+y}{t-y} \right| dt$$

の積分表示を使うと $I(x)$ は、

$$I(x) = \frac{1}{2\lambda^2} \text{Im} \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty dt \frac{\sin^2 \lambda y}{y^2} t e^{ixy} \ln \left| \frac{t+y}{t-y} \right|$$

とかける。ここで

$$P(y) = \int_0^y \frac{\sin^2 \lambda u}{u^2} e^{ixu} du$$

という函数を導入し、部分積分をすると

$$I(x) = -\frac{1}{2\lambda^2} \operatorname{Im} \int_0^1 t dt \int_{-\infty}^{\infty} P(y) \left\{ \frac{1}{y+t} - \frac{1}{y-t} \right\} dy \quad (11)$$

となる。ここで y についての積分は主値をとるべきである。一方、 $P(y)$ を少し変形すると

$$I(x) = \frac{1}{8\lambda^2} \operatorname{Im} \int_0^1 t dt \int_{-\infty}^{\infty} \{ G(x+2\lambda, y) + G(x-2\lambda, y) - 2G(x, y) \} \left(\frac{1}{y+t} - \frac{1}{y-t} \right) dy \quad (12)$$

で $G(\xi, y)$ は、

$$G(\xi, y) = -\frac{e^{i\xi y}}{y} + \int_0^y \frac{i\xi(e^{i\xi u} - 1)}{u} du$$

で与えられる。 $|y| \rightarrow \infty$ の極限で G は $e^{i\xi y}$ のようにふるまうので (12) の y での積分は $\xi > 0$ なら複素平面の上半部で、また $\xi < 0$ なら下半部でとちさせることができる。かくして

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, y) \left\{ \frac{1}{y+t} - \frac{1}{y-t} \right\} dy = \pm \pi i \left[-\frac{2}{t} + G(\xi, -t) - G(\xi, t) \right]$$

がえられる。ここで右辺の $\pm$ は $\xi \gtrless 0$ に対応する。

$$G(\xi, -t) - G(\xi, t) = 2H(\xi, t)$$

$$H(\xi, t) \equiv \frac{\cos \xi t}{t} + \xi \int_0^t \frac{\sin \xi u}{u} du$$

を使えば $x > 2\lambda$ のとき

$$I(x) = \frac{\pi}{4\lambda^2} \int_0^1 t dt \left[H(x+2\lambda, t) + H(x-2\lambda, t) - 2H(x, t) \right]$$

となり

$$\int_0^1 t H(\xi, t) dt = \frac{1}{2} \left[\cos \xi + \frac{\sin \xi}{\xi} + \xi \int_0^1 \frac{\sin \xi u}{u} du \right]$$

に注意するならば

$$K(x) = \frac{\alpha}{8\lambda^2 x} \left[F(x+2\lambda) + F(x-2\lambda) - 2F(x) \right] \quad (13)$$

がえられる。ただし $F(z)$ は

$$F(z) = \cos z + \frac{\sin z}{z} + z \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt \quad (14)$$

で与えられる。ここで最後の積分は Sine integral とよばれるもので数表ができていたので、(8) に対する $K(x)$ が厳密に求まったと考えてよいであろう。

一方、 $x < 2\lambda$ の場合には同様な方法で

$$I(x) = \frac{\pi}{4\lambda^2} \int_0^1 t dt \left[\frac{2}{t} + H(x+2\lambda, t) - H(x-2\lambda, t) - H(x, t) \right]$$

がえられ、したがって $K(x)$ は

$$K(x) = \frac{\alpha}{8\lambda^2 x} \left[F(x+2\lambda) - F(x-2\lambda) - 2F(x) + 4 \right]$$

で与えられる。

$x \rightarrow 0$ の極限を考えると

$$\int_0^\infty y^2 r(y) f(y) dy = \frac{\pi}{4\lambda^2} \left[\frac{\cos 2\lambda}{2\lambda} - \frac{\sin 2\lambda}{(2\lambda)^2} + \int_0^{2\lambda} \frac{\sin t}{t} dt \right]$$

となる。また (13) で $\lambda \rightarrow 0$ とすれば

$$K(x) = \alpha \frac{\sin x - x \cos x}{x^4}$$

という (5) の Ruderman-Kittel-Yosida の相互作用が導かれる。最後に $z \gg 1$ で $F(z)$ は

$$F(z) = \frac{\pi}{2} z + \frac{2 \cos z}{z^2} + \frac{6 \sin z}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^4}\right)$$

と漸近展開されるがこれを用いると $x \gg 1$ のとき

$$K(x) = \alpha \left\{ -\frac{\sin^2 \lambda}{\lambda^2} \frac{\cos x}{x^3} + \left(\frac{2 \sin 2\lambda}{\lambda} - \frac{3 \sin^2 \lambda}{\lambda^2} \right) \frac{\sin x}{x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right) \right\}$$

がえられる。これは Kaplan-Lyons³⁾ によつて求められた $K(x)$ の漸近展開に他ならない。

文 献

- 1) T. Kasuya, Prog. Theor. Phys. 16 (1956) 45.
- 2) K. Yosida, Phys. Rev. 106 (1957) 893.
- 3) T. A. Kaplan and D. H. Lyons, Phys. Rev. 129 (1963) 2072.
- 4) M. A. Ruderman and C. Kittel, Phys. Rev 96 (1954) 99.

Josephson 効果と Superfluidity

恒 藤 敏 彦 (阪大基工)

(10月19日受理)

§1 Josephson 効果

超伝導における Josephson tunneling は、超伝導現象の本質を示す興味深い効果であり、実験的に殆んど疑う余地なく確かめられている。その理論については、Josephson, Ambegaokar & Baratoff, Anderson らの取扱いがある。¹⁾ 比較的 elementary な方法で非常に面白い物理的な議論を行つているのは Anderson, Green 関数を使つてきれいに導いているのは Ambegaokar & Baratoff の論文であろう。Josephson tunneling は普通の quasi-particle によるものではなく、pair の tunneling であり、その特徴は、0 voltage で電流 (d.c.) が流れること、それが barrier