

4つの放物元に関するトレース恒等式について(その2)

島根大学総合理工学部 中西敏浩 (Toshihiro Nakanishi)
Shimane University

1. **トレース恒等式** $A, B, C \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して次式が成り立つ。

$$(1) \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^{-1}$$

$$(2) \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} AB + \operatorname{tr} AB^{-1}$$

この2つからさまざまなトレース恒等式が得られる ([1] の §3.4 を参照). 次の補題はその一例である。

Lemma 1. $A, B, P \in SL(2, \mathbb{C})$, $\operatorname{tr} P = -2$ であるとする。 $a = \operatorname{tr} A$, $b = \operatorname{tr} B$, $c = \operatorname{tr} AB$, $x = -a - \operatorname{tr} AP$, $y = -c - \operatorname{tr} ABP$, $z = -b - \operatorname{tr} BP$ とおくと

$$x^2 + y^2 + z^2 - ayz - bxy + czx = 0 \quad (1)$$

2つの放物元 $P_1, P_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ が固定点を共有しないとき

$$P_1 P_2 = -Q^2 \quad (2)$$

をみたす $Q \in SL(2, \mathbb{C})$ が符号を除いて一意的に存在する (Q が (2) をみたせば, $-Q$ もそうである)。この Q は同時に

$$P_2 = Q^{-1} P_1 Q \quad (3)$$

をみたす。放物元の列 $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1} = P_1$ の隣り合うどの2つも固定点を共有しないとき $Q_1, \dots, Q_n$ を $P_i P_{i+1} = -Q_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) をみたすように選ぶ。ただしこれらは符号を除いて定まるから 2^n 通りの選び方があることに注意。このとき

$$\operatorname{tr} Q_1 Q_2 \cdots Q_n = -2 \text{ または } \operatorname{tr} Q_1 Q_2 \cdots Q_n = +2$$

である。($Q_1, Q_2, \dots, Q_n$) は前者であれば (-) 系、後者であれば (+) 系と呼ぶ。

Theorem 1. ([3]) P_1, P_2, P_3, P_4 は放物元であり、相異なる固定点を持つものとする。 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ を

$$\begin{aligned} P_1 P_2 &= -Q_1^2, & P_2 P_3 &= -Q_2^2, & P_3 P_4 &= -Q_3^2, \\ P_4 P_1 &= -Q_4^2, & P_3 P_1 &= -Q_5^2, & P_2 P_4 &= -Q_6^2 \end{aligned}$$

となるように選ぶ。 $Q'_5 = P_1 Q_5 P_1^{-1}$, $Q'_6 = P_4 Q_6 P_4^{-1}$ とおく。もし

$(Q_1, Q_2, Q_5), (Q'_5, Q_3, Q_4), (Q_1, Q_6, Q_4), (Q'_6, Q_2, Q_3)$ がすべて $(-)$ 系
あるいは、これと同値な条件

$(Q_1, Q_2, Q_5), (Q_1, Q_6, Q_4)$ および (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) がすべて $(-)$ 系
がみたされれば

$$\operatorname{tr} Q_1 \operatorname{tr} Q_3 + \operatorname{tr} Q_2 \operatorname{tr} Q_4 = \operatorname{tr} Q_5 \operatorname{tr} Q_6 \quad (4)$$

Lemma 2. $A, B, P \in SL(2, \mathbb{C})$, $\operatorname{tr} P = -2$ であるとする。

$$PA^{-1}PA = -Q_1^2, \quad A^{-1}PABPB^{-1} = -Q_2^2, \quad BPB^{-1}P = -Q_3^2$$

をみたす Q_1, Q_2, Q_3 を

$$\operatorname{tr} Q_1 = -\operatorname{tr} A - \operatorname{tr} AP, \quad \operatorname{tr} Q_2 = -\operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} ABP, \quad \operatorname{tr} Q_3 = -\operatorname{tr} B - \operatorname{tr} BP$$

となるように選ぶと (Q_1, Q_2, Q_3) は $(-)$ 系

証明. $x = \operatorname{tr} Q_1, y = \operatorname{tr} Q_2, z = \operatorname{tr} Q_3, a = \operatorname{tr} A, b = \operatorname{tr} B, c = \operatorname{tr} AB$ とおく。

$$xyz \operatorname{tr} Q_1 Q_2 Q_3$$

$$= \operatorname{tr} Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 + \operatorname{tr} Q_1^2 Q_2^2 + \operatorname{tr} Q_2^2 Q_3^2 + \operatorname{tr} Q_3^2 Q_1^2 + \operatorname{tr} Q_1^2 + \operatorname{tr} Q_2^2 + \operatorname{tr} Q_3^2 + 2$$

だから、右辺が $-2xyz$ に等しいことを示せばよい。 $P_1 = P, P_2 = A^{-1}PA, P_3 = BPB^{-1}$ とおく。

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr} Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 + \operatorname{tr} Q_1^2 Q_2^2 + \operatorname{tr} Q_2^2 Q_3^2 + \operatorname{tr} Q_3^2 Q_1^2 + \operatorname{tr} Q_1^2 + \operatorname{tr} Q_2^2 + \operatorname{tr} Q_3^2 + 2 \\ &= -\operatorname{tr} P_1^2 P_2^2 P_3^2 + \operatorname{tr} P_1 P_2^2 P_3 + \operatorname{tr} P_2 P_3^2 P_1 + \operatorname{tr} P_3 P_1^2 P_2 - \operatorname{tr} P_1 P_2 - \operatorname{tr} P_2 P_3 \\ & \quad - \operatorname{tr} P_3 P_1 + 2 \\ &= 2\operatorname{tr} P_1 P_2 P_3 + 2\operatorname{tr} P_1 P_2 + 2\operatorname{tr} P_2 P_3 + 2\operatorname{tr} P_3 P_1 - 4 \\ &= 2(\operatorname{tr} PA^{-1}PABPB^{-1} - x^2 - y^2 - z^2 + 2) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr} PA^{-1}PABPB^{-1} \\ &= \operatorname{tr} PA^{-1}PAB \operatorname{tr} PB^{-1} - \operatorname{tr} A^{-1}PAB^2 \\ &= (\operatorname{tr} PA^{-1} \operatorname{tr} PAB - \operatorname{tr} A^2 B) \operatorname{tr} PB^{-1} - b \operatorname{tr} A^{-1}PAB - 2 \\ &= (\operatorname{tr} PA^{-1} \operatorname{tr} PAB - ac + b) \operatorname{tr} PB^{-1} \\ & \quad - b[a(\operatorname{tr} ABP) - 2b + c(\operatorname{tr} A^{-1}P) + 2ab - \operatorname{tr} PB] - 2 \\ &= [(x-a)(-c-y) - ac + b](z-b) \\ & \quad - b[a(-c-y) - 2b + (x-a)c + 2ab + z + b] - 2 \\ &= -xyz - cxy + ayz + bxy - 2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 & 2(\operatorname{tr} PA^{-1}PABPB^{-1} - x^2 - y^2 - z^2 + 2) \\
 &= 2(-xyz - x^2 - y^2 - z^2 + ayz + bxy - cxy) \\
 &= -2xyz
 \end{aligned}$$

よって (Q_1, Q_2, Q_3) は $(-)$ 系である。 □

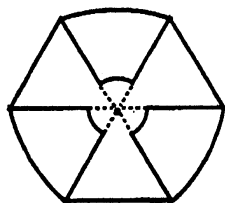
2. 振れのある三角形と振れない三角形

F を向き付け可能な種数 g の閉曲面とし、 p を F の 1 点とする。 $F' = F - \{p\}$ とおくと F' の基本群 G は表示

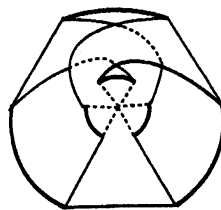
$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c : (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) \cdots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) c = 1 \rangle \quad (5)$$

をもつ。 ρ は G の忠実な $SL(2, \mathbb{C})$ 表現で $\rho(c)$ は放物型かつ $\operatorname{tr} \rho(c) = -2$ をみたすものとする。 T を F に埋め込まれた ideal triangle とすると、 ρ は T の 3 つのエンド (頂点の近傍) に 3 つの放物元 P_1, P_2, P_3 を対応させる。 $Q_1^2 = -P_1 P_2, Q_2^2 = -P_2 P_3, Q_3^2 = -P_3 P_1$ をみたす Q_1, Q_2, Q_3 が符号の差を除き一意に定まる。ここではどのように (Q_1, Q_2, Q_3) を選べば $(-)$ 系 (あるいは $(+)$ 系) になるかについて論じる。

2.1. 平面三角形の 3 頂点を同一視した図形 T を含む曲面 S を考える。 T の S における正則近傍は three-holed sphere であるか、あるいは one-holed torus である。前者の場合には (T, S) を T の untwisted triangle としての実現、後者の場合には (T, S) を T の twisted triangle としての実現という。 S が予めわかっている場合は T を前者の場合は untwisted triangle, 後者の場合は twisted triangle と呼ぶことにする。



untwisted triangle



twisted triangle

同一視された T の頂点を p とする。 S' を S から p を除いた曲面とする。 T の 3 辺は S' の 3 つの ideal arc c_1, c_2, c_3 を定める。 c をこれらのうちのひとつとし、 c をまた単位開区間からの連続写像

$$c: I^\circ = (0, 1) \rightarrow S'$$

と同一視する。 c は $c(0) = c(1) = p$ とおいて曲線 $c: I = [0, 1] \rightarrow F$ に拡張できる。

区間 $I = [0, 1]$ を閉円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1\}$ 内の区間 $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ と同一視する。はめ込み写像

$$\varphi: D \rightarrow S$$

を φ の I への制限が c と一致するように選ぶ。このとき $\hat{c} = \varphi(\partial D)$ は S' 上の閉曲線である。 $c = c_i$ ($i = 1, 2, 3$) のときの $\hat{c}$ を $\hat{c}_i$ とおく。

S' の基本群 $\pi_1(S')$ の忠実な $SL(2, \mathbb{C})$ 表現 ρ で S' の puncture の回りのループのホモトピー類を -2 をトレースにもつ放物元に写すものを一つ選ぶ。 $\hat{c}_i$ のホモトピー類もまた $\hat{c}_i$ と記す。(こうした abuse of notation は以下でもよく用いる。) このとき $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ が存在して次をみたす。

$$\rho(\hat{c}_1) = PA^{-1}PA, \rho(\hat{c}_2) = A^{-1}PABPB^{-1}, \rho(\hat{c}_3) = BPB^{-1}P \quad (6)$$

$Q_1, Q_2, Q_3 \in SL(2, \mathbb{C})$ を次のように選ぶ。

$$Q_1^2 = -PA^{-1}PA, Q_2^2 = -A^{-1}PABPB^{-1}, Q_3^2 = -BPB^{-1}P. \quad (7)$$

ただし Q_1, Q_2, Q_3 は一意的には定まらない。

S 上の単純閉曲線 $c_i \cup \{p\}$ ($i = 1, 2, 3$) の正則近傍 N を選ぶ。その境界は S' 内の2つの単純閉曲線 c'_i, c''_i からなる。 $\rho(c'_i) = C'_i, \rho(c''_i) = C''_i$ とおくと

$$\text{tr}^2 Q_i = (\text{tr} C'_i + \text{tr} C''_i)^2$$

が成立する。 $\text{tr} C'_i + \text{tr} C''_i$ は表現 ρ にのみによって決まる量であることに注意する。もし

$$\text{tr} Q_i = -\text{tr} C'_i - \text{tr} C''_i$$

をみたすように選ぶならば次が成り立つ。

Proposition. Q_1, Q_2, Q_3 を上のように選ぶ。もし T が untwisted であれば (Q_1, Q_2, Q_3) は $(-)$ 系である。 T が twisted であれば (Q_1, Q_2, Q_3) は $(+)$ 系である。

証明は Lemma 2 の応用である。 T が untwisted である場合と twisted である場合との結果の違いは次のような理由から生じる。(6)における A, B は $\rho(\pi_1(S'))$ の標準生成系

$$\rho(\pi_1(S')) = \begin{cases} (A, B, C, P : ABCP = 1) & (T \text{ が untwisted}) \\ (A, B, P : ABA^{-1}B^{-1}P = 1) & (T \text{ が twisted}) \end{cases}$$

の一部になる。\$T\$ が untwisted ならば、例えば

$$\mathrm{tr}C'_1 + \mathrm{tr}C''_1 = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}AP, \quad \mathrm{tr}C'_2 + \mathrm{tr}C''_2 = \mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}ABP \quad (8)$$

であれば、

$$\mathrm{tr}C'_3 + \mathrm{tr}C''_3 = \mathrm{tr}B + \mathrm{tr}BP$$

となるが、\$T\$ が twisted ならば (8) のようになったときは

$$\mathrm{tr}C'_3 + \mathrm{tr}C''_3 = \mathrm{tr}B^{-1} + \mathrm{tr}B^{-1}P = -\mathrm{tr}B - \mathrm{tr}BP$$

となる。

2.2. 表示 (5) をもつ 1 点穴あき曲面 \$F'\$ の基本群 \$G\$ の忠実な \$SL(2, \mathbb{C})\$ 表現 \$\rho\$ で \$\mathrm{tr}\rho(c) = -2\$ となるものの同値類全体の空間を \$R\$ とする。\$F'\$ は \$d+1\$ (\$d = 6g-4\$) 個の ideal arcs による三角形分割 (ideal triangulation) \$\Delta = (c_1, \dots, c_{d+1})\$ をもつ。\$F\$ 上の単純閉曲線 \$c_i \cup \{p\}\$ (\$i = 1, 2, \dots, d+1\$) の正則近傍の境界曲線を \$c'_i, c''_i\$ とする。\$[\rho] \in R\$ に対して

$$\lambda_{c_i}(\rho) = -\mathrm{tr}\rho(c'_i) - \mathrm{tr}\rho(c''_i)$$

とおく。

Theorem 2 写像

$$\Phi_\Delta : R \rightarrow \mathbb{C}^{d+1} : \Phi_\Delta([\rho]) = (\lambda_{c_1}(\rho), \lambda_{c_2}(\rho), \dots, \lambda_{c_{d+1}}(\rho))$$

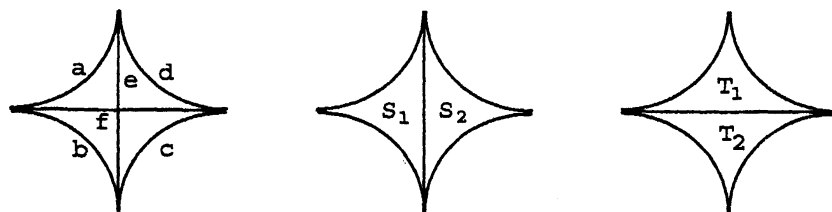
は単射であり、したがって \$R\$ の大域座標系を与える。

像 \$\Phi_\Delta(R)\$ は \$\mathbb{C}^{d+1}\$ で定義されたある多項式の零点集合に含まれることがわかって

いる。
\$\Delta\$ が定める (ideal) triangle (すなわち \$c_1, \dots, c_{d+1}\$ の補空間の成分) は untwisted なものと twisted なものに分類される。今 2 つの triangle \$S_1, S_2\$ が一辺 \$e \in \Delta\$ を共有しているとする。\$S_1\$ の残りの辺を \$a, b\$, \$S_2\$ の残りの辺を \$c, d\$ とする。ただし四辺形 \$Q = S_1 \cup e \cup S_2\$ において \$a\$ と \$c\$ が対辺になっているものとする。\$Q\$ のもう一つの対辺を \$f\$ とするとき \$\Delta\$ から \$e\$ を除き \$f\$ を加えることによって新しい三角形分割 \$\Delta'\$ を得る。\$Q\$ を \$f\$ で分割してできる triangle を \$T_1, T_2\$ とおく (下図参照)。\$\Delta'\$ は \$\Delta\$ から (\$e\$ における) elementary move によって得られるという。\$\Phi_\Delta(R)\$ から \$\Phi_{\Delta'}(R)\$ への座標変換は \$S_1, S_2, T_1, T_2\$ が twisted であるか untwisted であるかによって次のようになる。

$$\lambda_e \lambda_f = \epsilon_1 \lambda_a \lambda_c + \epsilon_2 \lambda_b \lambda_d \quad (9)$$

ここで \$\epsilon_1, \epsilon_2\$ は表の通りである ([2] の §5)。



S_1	S_2	T_1	T_2	(ϵ_1, ϵ_2)
untwisted	untwisted	untwisted	untwisted	$(1, 1)$
twisted	twisted	twisted	twisted	$(1, 1)$
untwisted	twisted	twisted	untwisted	$(1, -1)$
twisted	untwisted	untwisted	twisted	$(1, -1)$
untwisted	twisted	untwisted	twisted	$(-1, 1)$
twisted	untwisted	twisted	untwisted	$(-1, 1)$

2.3. 上の 2.2 節で述べた結果はすでに [2] に与えられているが、 $(-)$ 系・ $(+)$ 系という用語を導入することによって証明をある意味で「代数化」することができた。ここでは once punctured surface の場合を考えたが、一般の punctured surface でも同様に議論ができる。我々の目標は Penner の論文 [4] の結果をできるだけそのままの形で穴あき曲面群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の空間に拡張することであった。我々が定義した λ -length が多価 (2 価) 関数なので、いろいろと困難を引き起こしていたが、特別な三角形分割から始めて elementary move を行うごとに λ -lengths を与える $SL(2, \mathbb{C})$ の行列 ((7) に対応するもの) が $(-)$ 系であるか $(+)$ 系であるかに注意しながら座標変換することによって、一般の三角形分割に対する $SL(2, \mathbb{C})$ 表現空間の座標系を得ることができる。

参考文献

- [1] Maclachlan, C. and A. W. Reid, *The Arithmetic of Hyperbolic 3-manifolds*, Springer, GTM 219, Springer Verlag, 2003.
- [2] Nakanishi, T. and M. Näätänen, complexification of lambda length as parameter for $SL(2, \mathbb{C})$ representation space of punctured surface groups, J. London. Math. Soc., **70** (2004), 383-404
- [3] Nakanishi, T., A trace identity for parabolic elements of $SL(2, \mathbb{C})$, Kodai Math. J., **30** (2007), 1-18.
- [4] Penner, R. C. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces. Comm. Math. Phys. **113** (1987), 299-339.