

On contribution of elliptic elements to trace formula

三重大教育 古関春隆 (Harutaka Koseki)

Selberg の跡公式 (trace formula) は Arthur によって数体上の一般の reductive 群の場合に拡張され, Arthur-Selberg の跡公式と呼ばれるものが得られた。しかしながらこの公式を (Hecke 作用素の跡の) explicit な計算の為に用いることは, 一般には極めて困難であろう。たとえば elliptic regular element の寄与には種々の torus の "volume factor" が現れるが, これは一般には (非円分拡大の) 相対類数などに帰着してしまう。しかし, 保型形式論における様々な "comparison の問題" に対しては, 拡張された跡公式は有効な道具となると思われる。この場合, 跡公式の一部または全体を, 何らかの仮定のもとで単純な形に変形しておくことが望ましい。

以下では跡公式の単純化に関する Kottwitz (+ Arthur) の仕事の一部を紹介する。既にそれほど "最近の話題" ではなく, ている事なので恐縮ですが, この方面に初めて接する方の参考になれば幸いです。

§ 1. elliptic term の記述

以下 G は代数体 F 上の連結かつ単連結な半単純代数群とする。アデール上の test-function $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, $f = \otimes_v f_v$, に対し Hecke 作用素 $\mathcal{I}(f) \in \text{End}(L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})))$ を

$$(\mathcal{I}(f)\varphi)(x) = \int_{G(\mathbb{A})} \varphi(xg) f(g) dg$$

により定義する。このとき跡公式の左辺の方を cusp form の空間 $L^2_{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ における $\mathcal{I}(f)$ の跡とするならば、右辺は truncated Eisenstein series や weighted orbital integral で表される種々の項の和になる。

(γ が半単純で)

さて $\gamma \in G(F)$ が F 上 elliptic であるとは、 γ の中心化群 G_γ の中心 $Z(G_\gamma)$ が F 上 anisotropic となることであつた。 $G(F)$ の共役類や安定共役類に対しても、 F 上 elliptic という概念を定義することができる。跡公式の右辺における $G(F)$ の elliptic elements の寄与は

$$\sum_o \tau(G_o) \mathcal{O}_o(f); \quad o \text{ は } G(F) \text{ の elliptic な共役類}$$

と表される。ここで G_o は $\gamma \in o$ の中心化群 (γ のとり方によらない) で $\tau(G_o)$ はその玉河数、また $\mathcal{O}_o(f)$ は軌道積分である:

$$\mathcal{O}_o(f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g) \frac{dg}{dt} \quad (\gamma \in o).$$

上の表示を安定共役類の言葉で書き直すことを考える。

$G(F)$ の安定共役類とは “ $\gamma_1, \gamma_2 \in G(F)$ について $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists x \in G(\overline{F})$ s.t. $x\gamma_1 x^{-1} = \gamma_2$ ” という同値関係に関する同値類のこ

とであつた ($\overline{F}$ は F の代数的閉包)。今後 $G(F)$ の elliptic な安定共役類を代表的に λ で表す。 F の各素点 v における $G(F_v)$ や アデール $G(\mathbb{A})$ においても安定共役類という概念が同様に定義されるが、上の λ を含む $G(F_v)$ の安定共役類と $G(\mathbb{A})$ の安定共役類をそれぞれ λ_v および $\lambda_{\mathbb{A}}$ で表す。さらに λ に含まれる $G(F)$ の共役類全体を $\lambda \bmod G(F)$ と書く。 $\lambda_v \bmod G(F_v)$ なども同様の意味で用いる。

以下 elliptic な λ に対し $\sum_{\sigma \in \lambda \bmod G(F)} \tau(G_{\sigma}) \mathcal{O}_{\sigma}(f)$ を考えるのであるが、簡単のため λ は regular と仮定する。 $\gamma_0 \in \lambda$ を固定しておく。仮定より $\gamma \in \lambda$ に対し G_{γ} は torus で常に G_{γ_0} と同型である。 $T = G_{\gamma_0}$ とおく。また F の絶対 Galois 群を Γ と書く。

λ の元 $\gamma = x \gamma_0 x^{-1}$ ($x \in G(\overline{F})$) に対し Γ 上の 1-cocycle ($\sigma \mapsto \sigma(x)^{-1} x$) を対応させることにより、集合として

$$\lambda \bmod G(F) \approx \text{Ker} (H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, G)).$$

$$\text{同様に } \lambda_v \bmod G(F_v) \approx \text{Ker} (H^1(F_v, T) \rightarrow H^1(F_v, G)).$$

そこで下の diagram を考える：

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, T) & \longrightarrow & H^1(F, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_v H^1(F_v, T) & \longrightarrow & \bigoplus_v H^1(F_v, G) \end{array}$$

(注意： E_8 に対する Hasse principle は Tchernousov によって証明された。) G の Hasse principle より、共役類の Hasse map

$\lambda_A: \mathcal{A} \bmod G(F) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$ の fibre の元の個数は常に $\Omega(T)$
 $:= \text{Ker}(H^1(F, T) \rightarrow \bigoplus_v H^1(F_v, T))$ の位数に等しい。他方 T の指標
 群 $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(T, \mathbb{G}_m)$ を $X^*(T)$ と書くと [Ono] より $\tau(T) =$
 $\#(H^1(F, X^*(T))) / \#(\Omega(T))$ 。以上よりひとまず,

$$(1) \quad \sum_{0 \in \mathcal{A} \bmod G(F)} \tau(G_0) \mathcal{O}_0(f) = \sum_{0 \in \text{Im } \lambda_A} \#(H^1(F, X^*(T))) \mathcal{O}_0(f).$$

さて $H^1(F, X^*(T))$ を $h(T/F)$ と書くことにすると, 中山-
 Tate duality よりその Pontryagin dual は $h(T/F)^D = H^1(F, T(\overline{\mathbb{A}})/T(\overline{\mathbb{F}}))$
 で与えられる。各 $\gamma \in \mathcal{A}_{\mathbb{A}}$ に対し

$$X_0(\gamma) = \{ (g, i) \in G(\overline{\mathbb{A}}) \times \text{Hom}_{\mathbb{F}}(T, G) \mid \textcircled{1}, \textcircled{2} \}$$

$$\textcircled{1} \quad i(\gamma_0) = g \gamma g^{-1}$$

$$\textcircled{2} \quad i \text{ は } T \hookrightarrow G \text{ と } G(\overline{\mathbb{F}}) \text{ の作用により同値}$$

とおくと $X_0(\gamma) \neq \emptyset$ で, $X_0(\gamma)$ には $G(\overline{\mathbb{F}})$ が左から作用する。

$X(\gamma) = G(\overline{\mathbb{F}}) \backslash X_0(\gamma)$ とおくとこれには $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ が左から,

$T(\overline{\mathbb{A}})/T(\overline{\mathbb{F}})$ が右から作用し, $X(\gamma)$ は $T(\overline{\mathbb{A}})/T(\overline{\mathbb{F}})$ に関する $\mathbb{F}$ -torsor

になる。そこで $X(\gamma)$ が定める $H^1(F, T(\overline{\mathbb{A}})/T(\overline{\mathbb{F}}))$ の元を $obs(\gamma)$ と

おくと作り方より $obs(\gamma)$ は γ を含む $\mathcal{A}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$ の元 0 により
 dependするので, これを $obs(0)$ と書く。すると

$$obs(0) = 0 \iff X(\gamma)^{\Gamma} \neq \emptyset \iff 0 \in \text{Im } \lambda_A.$$

よって (1) を書き直すと

$$(2) \quad \sum_{0 \in \mathcal{A} \bmod G(F)} \tau(G_0) \mathcal{O}_0(f) = \sum_{0 \in \mathcal{A}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})} \sum_{\kappa \in h(T/F)} \langle obs(0), \kappa \rangle \mathcal{O}_0(f).$$

Kottwitz は λ が singular の場合にも (2) の形の等式を証明したのであるが、その場合には、固定された $\gamma_0 \in \lambda$ に対し、 $I_0 = G_{\gamma_0}$ とおき、 I_0 の L 群の連結成分を $\hat{I}_0$ 、 $\hat{I}_0^\Gamma$ の中心をその単位元の連結成分で割った群 $\pi_0(\mathbb{Z}(\hat{I}_0^\Gamma))$ を $k(I_0/F)$ として、 $k(I_0/F)^D$ の中に $ob_\lambda(0)$ を構成している：

定理 1. elliptic (singular) な安定共役類 $\lambda \in G(F)$ に対し、

$$\sum_{0 \in \lambda \bmod G(F)} \tau(G_0) \mathcal{O}_0(f) = \sum_{0 \in \lambda_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})} \sum_{\kappa \in k(I_0/F)} \langle ob_\lambda(0), \kappa \rangle e(0) \mathcal{O}_0(f).$$

 ここで $e(0)$ は $[K_0, \pm 1]$ で定義された符号因子 (± 1) である。

この定理と (2) では符号因子 $e(0)$ の部分が見かけ上ズレている。実は各素点における $0_v \in \lambda_v \bmod G(F_v)$ に対して $e(0_v) = \pm 1$ が定義され、 $0 = (0_v)_v \in \lambda_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$ に対しては $e(0) = \prod_v e(0_v)$ であるが、 $0 \in \text{Im } \lambda_\lambda$ のときは積公式 $\prod_v e(0_v) = 1$ が成立するので、結局ズレは生じない。

次に λ が regular のとき、 $H^1(F, X^*(T)) \approx \pi_0(\hat{T}^\Gamma)$ となることを確認しておく。実際 T の 1-parameter subgroups の群を $X_*(T)$ とすると、 $\hat{T} = \text{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^\times)$ 。完全列 $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathbb{C}^\times \rightarrow 1$ より

$$1 \rightarrow \text{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}^\times) \rightarrow 1 \quad (\text{exact}).$$

よって

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_T(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}) & \rightarrow & \text{Hom}_T(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}^\times) & \rightarrow & H^1(F, \text{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{Z})) & \rightarrow & 0 \\ \parallel & & & & \parallel & & \\ \text{Lie}(\hat{T}^\Gamma) & \xrightarrow{\exp} & \hat{T}^\Gamma & & H^1(F, X^*(T)) & & \end{array}$$

§2. elliptic term の単純化

$G(F)$ の (elliptic な) 安定共役類 λ と F の素点 v に対して,
local な stable orbital integral $SO_{\lambda_v}(f_v)$ を

$$SO_{\lambda_v}(f_v) = \sum_{O_v \in \lambda_v \bmod G(F_v)} e(O_v) O_{O_v}(f_v)$$

と定義する。 $G(F_v)$ 上の調和解析において distribution SO_{λ_v} は,
 O_{O_v} そのものよりも基本的な役割りを果たすことが多い。しか
し global な跡公式における λ の寄与は, 一般には $SO_{\lambda_v}(f_v)$ 達
の積には分解しない (定理1参照)。だが test-function f が
都合のよい成分をもつ場合には, 実際そのように分解する:

定理2. $\lambda \in G(F)$ を elliptic (singular) な安定共役類とする。 F の
ある有限素点 y において, test-function f の y -成分 f_y が任
意の $O_y \in \lambda_y \bmod G(F_y)$ において

$$e(O_y) O_{O_y}(f_y) = \begin{cases} C \cdots \lambda_y \text{ が } F_y \text{ 上 elliptic,} \\ 0 \cdots \text{otherwise} \end{cases}$$

(C は λ_y で決まる定数) をみたすならば,

$$(*) \quad \sum_{O \in \lambda \bmod G(F)} \tau(G_O) O_O(f) = \prod_v SO_{\lambda_v}(f_v).$$

この定理も一般の場合の証明は長くなるので, λ が
regular の場合の証明を述べることにする。 §1 と同じく, $\gamma_0 \in \lambda$
を固定して $T = G_{\gamma_0}$ とおく。定理1において 0 に関する和と γ
に関する和は交換できることがわかるので, (*) の左辺は

$$\sum_{\kappa \in k(T/F)} \left(\sum_{0 \in \Delta \bmod G(A)} \langle \text{ob}_{\Delta}(0), \kappa \rangle e(0) \mathcal{O}_0(f) \right)$$

と表される。ここで $\kappa \neq 0$ のとき 0 に関する和が消えることが言えれば、定理 2 は証明されたことになる。

そこで $\kappa \in k(T/F)$, $\kappa \neq 0$, を固定し、上の表示の κ に対応する項を $Q(\kappa)$ とおく。 F の素点 v に対し、 $k(T/F) = H^1(F, X^*(T))$ から $H^1(F_v, X^*(T))$ への局所化による κ の像を κ_v と書く。固定された $\delta_0 \in \Delta$ を通じて $\text{Ker}(H^1(F_v, T) \rightarrow H^1(F_v, G))$ は $\Delta_v \bmod G(F_v)$ と同一視される (P. 3 参照)。前者の元 x_v に対応する後者の元を $x_v(\delta_0)$ と表す。すると容易にわかるように、 δ_0 を含む $\Delta \bmod G(F)$ の元を 0_0 とし、

$$Q(\kappa) = \langle \text{ob}_{\Delta}(0_0), \kappa \rangle \prod_v \sum_{x_v} \langle x_v, \kappa_v \rangle e(x_v(\delta_0)) \mathcal{O}_{x_v(\delta_0)}(f_v).$$

ここで v が有限素点のときは x_v の変域 $\text{Ker}(H^1(F_v, T) \rightarrow H^1(F_v, G))$ は $H^1(F_v, T)$ そのものに一致する。よって定理 2 の仮定と次の lemma より $Q(\kappa) = 0$ が示された。 Q.E.D.

[Lemma. torus T が F_y 上 anisotropic ならば, localization $H^1(F, X^*(T)) \rightarrow H^1(F_y, X^*(T))$ は injective である。

(証明)

$X^*(T)$ は torsion-free ゆえ $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ に tensor して

$$0 \rightarrow X^*(T) \rightarrow X^*(T) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow X^*(T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (\text{exact}).$$

これに伴う (F および F_y 上の) Galois cohomology の長完全列にお

いて、仮定より $H^0(F, X^*(T) \otimes \mathbb{Q}) = H^0(F_y, X^*(T) \otimes \mathbb{Q}) = 0$ だから、

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & H^0(F, X^*(T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(F, X^*(T)) & \rightarrow & H^1(F, X^*(T)) \otimes \mathbb{Q} = 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & H^0(F_y, X^*(T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(F_y, X^*(T)) & \rightarrow & H^1(F_y, X^*(T)) \otimes \mathbb{Q} = 0
\end{array}$$

横列は exact で左縦列は明らかに injective. よって右縦列も injective. Q.E.D.

§3. Euler-Poincaré 関数と simple trace formula

F の有限素点 y を固定する. $G(F_y)$ の Tits building を $\mathcal{B}$ とおくと $G(F_y)$ は $\mathcal{B}$ に, そして $\mathcal{B}$ の facet 達の集合に, 作用する. $\{\text{facets of } \mathcal{B}\}$ の $G(F_y)$ -作用に関する基本領域 $\mathcal{Y}$ をひとつ取っておく. $\mathcal{Y}$ は有限集合である.

各 $\sigma \in \mathcal{Y}$ に対し その $G(F_y)$ 内での stabilizer を $G(F_y)_\sigma$ と表す. 各 $G(F_y)_\sigma$ は $G(F_y)$ の開 compact 部分群になる. このとき $G(F_y)$ の Euler-Poincaré 関数 f_{EP} を次の様に定義する:

$$f_{EP} = \sum_{\sigma \in \mathcal{Y}} (-1)^{\dim \sigma} \text{vol}(G(F_y)_\sigma)^{-1} (\text{特性関数}).$$

定義より $f_{EP} \in C_c^\infty(G(F_y))$. ただし $\text{vol}(\cdot)$ は $G(F_y)$ 上の Haar 測度に関する体積で, f_{EP} はこの Haar 測度の取り方に依存する. これを modify した $\tilde{f}_{EP} := (-1)^q f_{EP}$ ($q = \text{rank}_{F_y} G$) を, ここでは仮に, 正值 Euler-Poincaré 関数と呼ぶことにする.

Euler-Poincaré 関数という名称は, f_{EP} が $G(F_y)$ の Euler-Poincaré 測度と結びつくことに由来していると思われる。すなわち f_{EP} が $G(F_y)$ の Haar 測度 dg に関して定義されている時測度 $f_{EP}(1) dg$ は dg および $\mathcal{P}$ のとり方によらず, $G(F_y)$ の Euler-Poincaré 測度となる。(つまり $G(F_y)$ の cocompactかつ torsion-free な^(離散)部分群 Γ の Euler-Poincaré 標数は

$$\chi(\Gamma) := \sum_p (-1)^p \dim_{\mathbb{Q}} H^p(\Gamma, \mathbb{Q}) = \int_{G(F_y)/\Gamma} f_{EP}(1) dg$$

で与えられる (Serre)。

また表現論的には $\tilde{f}_{EP}$ は $G(F_y)$ の Steinberg 表現の pseudo-coefficient になる (Casselman)。すなわち $G(F_y)$ の既約 tempered 表現 π に対し,

$$\text{trace } \pi(\tilde{f}_{EP}) = \begin{cases} 1 & \dots \pi: \text{Steinberg 表現}, \\ 0 & \dots \text{otherwise.} \end{cases}$$

さて $\tilde{f}_{EP}$ は §2 定理 2 の “ f_y の条件” をみたす。実はより強く, 次が成立する:

定理 3. $\tilde{f}_{EP}$ の軌道積分は dg および $\mathcal{P}$ のとり方によらない。
さらに λ を $G(F_y)$ の安定共役類, $0 \in \lambda \bmod G(F_y)$ とするとき,

$$e(0) \mathcal{O}_0(\tilde{f}_{EP}) = \begin{cases} c & \dots \lambda \text{ が } F_y \text{ 上 elliptic,} \\ 0 & \dots \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで c は λ で決まる定数である。

(この定理や定理 2 における $G_0(F_y)$ の測度のとり方については

[K. 4] 参照。)

よってある有限素点 $\mathfrak{p}$ において test-function の $\mathfrak{p}$ -成分を $G(F_{\mathfrak{p}})$ の正值 Euler-Poincaré 関数にすれば、跡公式の“右辺”における elliptic elements の寄与は定理 2 の (*) の形に単純化される。さらに、定理 3 を眺めていると、elliptic でない元の寄与が消えるとも言えそうな気がしてくるが、これは(少なくとも現在のところ)“ $\mathfrak{p}$ における仮定”だけからは証明できない。

定理 4. F のある有限素点 $\mathfrak{p}$ において $f_{\mathfrak{p}}$ は $G(F_{\mathfrak{p}})$ の正值 Euler-Poincaré 関数で、 $\mathfrak{p}$ と異なるある有限素点 $\mathfrak{l}$ において $f_{\mathfrak{l}}$ は $G(F_{\mathfrak{l}})$ の supercuspidal 表現の行列成分であるとする。このとき

$$\text{trace}(\chi(f) | L^2_{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(A))) = \sum_{\Delta} \prod_v S_{\Delta_v}(f_v).$$

ここで Δ は $G(F)$ の $(F_{\mathfrak{p}} \text{ 上})$ elliptic な安定共役類を動く。

さて、今までの F -group G に対し、その quasi-split inner F -form G' をとり、inner-twisting $\psi/\bar{F}: G \xrightarrow{\sim} G'$ を固定する。1-cocycle ($\sigma \mapsto \psi(\psi^\sigma)^{-1}$) の定める $H^1(F, G'_{\text{ad}})$ の元を C_ψ とおく。 G'_{ad} は仮定より連結であるから、 F の素点の有限集合 S で、 $v \notin S$ ならば C_ψ の $H^1(F_v, G'_{\text{ad}})$ への像が 0 となるようなものが存在する。必要ならば S を拡げて、 S は 1 個以上の有限素点を含むと仮定してよい。 $v \notin S$ ならば ψ を少しひねった写像によって G は G' と F_v 上同型になる。以後 $v \notin S$ では $G(F_v)$ を $G'(F_v)$ と

同一視する。

G の跡公式を G' の跡公式と比較するため, test-function $f = \otimes_v f_v \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ と $f' = \otimes_v f'_v \in C_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ について以下の仮定を設ける:

- ① $v \notin S$ ならば $f_v = f'_v$,
- ② 任意の有限素点 $y \in S$ において f_y は $G(F_y)$ の, f'_y は $G'(F_y)$ の正值 Euler-Poincaré 関数,
- ③ 任意の無限素点 $v \in S$ において f_v と f'_v の stable orbital integral の間に "matching" が成立している,
- ④ ある有限素点 $l \in S$ において $f_l = f'_l$ は $G(F_l) = G'(F_l)$ の supercuspidal 表現の行列成分。

ここで③の意味については [Shel] などを見られたい。

[定理 5. 上の①~④のもとで]

$$\text{trace}(X(f) | L^2_{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))) = \text{trace}(X(f') | L^2_{\text{cusp}}(G'(F) \backslash G'(\mathbb{A}))).$$

これは定理 4 と Selberg principle などから従う。

さて, ある無限素点 $w \in S$ において $G(F_w)$ が compact であると仮定する。このとき $G'(F_w)$ は compact Cartan subgroup を持ち, 従って離散系列表現を持つ。 $G(F_w)$ の (有限次元) 既約 unitary 表現 π_w をとると, π_w との間には "character relation" が生じるような $G'(F_w)$ の離散系列表現が $[W: W_c]$ 個存在する。ただし W は $G'(\mathbb{C})$ の Weyl 群, W_c は $G'(F_w)$ の, compact Cartan 部分群

に関する Weyl 群である。これらの中の任意のひとつを π'_w とおく。

予想. π'_w の Harish-Chandra parameter がある程度以上 "regular" なとき, 上の ④ を次の ④' でおきかえても定理 5 は成立する:

④' 上の無限素点 $w \in S$ において, f_w は π_w の character で f'_w は π'_w の pseudo-coefficient.

この方向では伊吹山氏, 橋本氏, 筆者などの研究があるが, 一般には未解決と思われる。

— References —

- [Kot1] R. Kottwitz, Sign changes in harmonic analysis on reductive groups, Trans. AMS 278 (1983), 289-297
- [Kot2] —, Stable trace formula: cuspidal tempered terms, Duke Math. J. 51 (1984), 611-650
- [Kot3] —, Stable trace formula: elliptic singular terms, Math. Ann. 275 (1986), 365-399
- [Kot4] —, Tamagawa numbers, Ann. Math. 127 (1988), 629-646
- [Ono] T. Ono, On the Tamagawa number of algebraic tori, Ann. Math. 78 (1963), 47-73
- [Shel] D. Shelstad, Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$, Compos. Math. 39 (1979), 11-45