

指数マルチンゲールの一様可積分性について

富山大 風巻 紀彦 (Norihiko Kazamaki)

富山大 関口 健 (Takeshi Sekiguchi)

指数マルチンゲールが、一様可積分マルチンゲールとなるための、いくつかの判定条件は、Novikov, 風巻等により与えられている。ここでは、彼等の結果を改良し、新しい十分条件について報告する。詳しくは、次の論文

N. Kazamaki and T. Sekiguchi, Uniform integrability of continuous exponential martingales, Tôhoku Math. J. 35 (1983)

を参照せよ。

$M = (M_t)_{t \geq 0}$ を連続マルチンゲールで、 $M_0 = 0$ をみとくとする。このとき指数マルチンゲール $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ は、

$$Z_t = \exp \left\{ M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t \right\}, \quad t \geq 0,$$

により定義される局所マルチンゲールである。ここで $\langle M \rangle$ は M に随伴する連続増加過程とする。

$\varphi(0) = 0$ をみたす連続関数 $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ と実数 α に対し

$$G_t(\alpha, \varphi) = \exp\left\{\alpha M_t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \langle M \rangle_t - |1 - \alpha| \varphi(\langle M \rangle_t)\right\},$$

$$g(\alpha, \varphi) = \sup_{T \in \mathcal{J}_0} E[G_T(\alpha, \varphi)]$$

とおく。ここで $\mathcal{J}_0$ は有界な停止時の全体とする。

また、原点から出発する Brown 運動 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ に対し

$$P(B_t < \varphi(t), t \rightarrow \infty) = 0$$

となるとき、 φ を下級関数という。

定理 φ を下級関数とする。ある $\alpha \neq 1$ に対し $1 \leq g(\alpha, \varphi) < \infty$ ならば、 Σ は一様可積分マルチンゲールである。

証明の概略 連続な時刻変更により

$$M_t = B_{t \wedge \tau}, \quad t \geq 0,$$

と仮定してよい。ここで $B = (B_t)_{t \geq 0}$ は Brown 運動で、 τ は停止時である。

最初に $\alpha < 1$ の場合を考える。

$$\begin{aligned} \tau_j &= \inf \{ t \geq 0 ; B_t \leq t - \varphi(t) - j \} , \\ \tilde{\tau}_j &= \inf \{ t \geq 0 ; B_t \leq -\varphi(t) - j \} , \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

とおく。このとき Brown 運動の性質を用いて、次のことが言える。

$$E[\exp(B_{\tau_j} - \frac{1}{2}\tau_j) ; \tau_j < \infty] = P(\tilde{\tau}_j < \infty) ,$$

φ が下級関数である $\Leftrightarrow$ 各 j について $P(\tilde{\tau}_j < \infty) = 1$ 。

このことから、等式

$$\begin{aligned} 1 &= E[\exp(B_{\tau_j \wedge \zeta} - \frac{1}{2}\tau_j \wedge \zeta)] \\ &= E[\exp(B_{\zeta} - \frac{1}{2}\zeta) ; \tau_j \geq \zeta] + E[\exp(B_{\tau_j} - \frac{1}{2}\tau_j) ; \tau_j < \zeta] \end{aligned}$$

を得る。明らかに

$$E[\exp(B_{\tau_j \wedge \zeta} - \frac{1}{2}\tau_j \wedge \zeta)] \leq E[Z_\infty] .$$

また τ_j の定義より、 $\{\tau_j < \infty\}$ 上で

$$B_{\tau_j} - \frac{1}{2}\tau_j = \alpha B_{\tau_j} + (\frac{1}{2} - \alpha)\tau_j - (1 - \alpha)\varphi(\tau_j) - (1 - \alpha)j$$

だから

$$E[\exp(B_{\tau_j} - \frac{1}{2}\tau_j) ; \tau_j < \zeta] \leq E[G_{\tau_j}(\alpha, \varphi) e^{-(1-\alpha)j} ; \tau_j < \infty]$$

$$\leq g(\alpha, \varphi) e^{(1-\alpha)j}.$$

したがって $j \rightarrow \infty$ として $E[Z_\infty] \geq 1$ を得る。

すなわち、 Z は一様可積分マルチンゲールである。

$\alpha > 1$ の場合は、 τ_j と $\tilde{\tau}_j$ の代りに

$$\nu_j = \inf \{ t \geq 0 ; B_t \geq t + \varphi(t) + j \}.$$

$$\tilde{\nu}_j = \inf \{ t \geq 0 ; B_t \geq \varphi(t) + j \}$$

を用いて、同様に示すことができる。

注意. 定理の条件の特別な場合として、例えば $\alpha = \frac{1}{2}$ のときは Novikov の判定条件を、 $0 \leq \alpha < 1$, $\varphi = 0$ のときは Lépinle - Mémin の判定条件を得る。更に、我々の条件は、彼等の条件を真に含むとも言えるが、十分条件でないことも確かめることができる。