

4次元多様体の Heegaard 分解について.

北大理(教養) 小林一章

3次元多様体の Heegaard 分解と同様にして、4次元多様体に Heegaard 分解を定義し、4次元多様体を研究する。

W^4 を向きづけ可能な 4次元多様体とし

$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2 \cup \gamma H^3 \cup H^4$ を W^4 のハンドル分解とする。すると $\bigcup \mu H^2$ は $\lambda \# S^1 \times S^2$ から $\gamma \# S^1 \times S^2$ の間のコボルディズムとなり、これを $C(\lambda, \mu, \gamma)$ とかく。

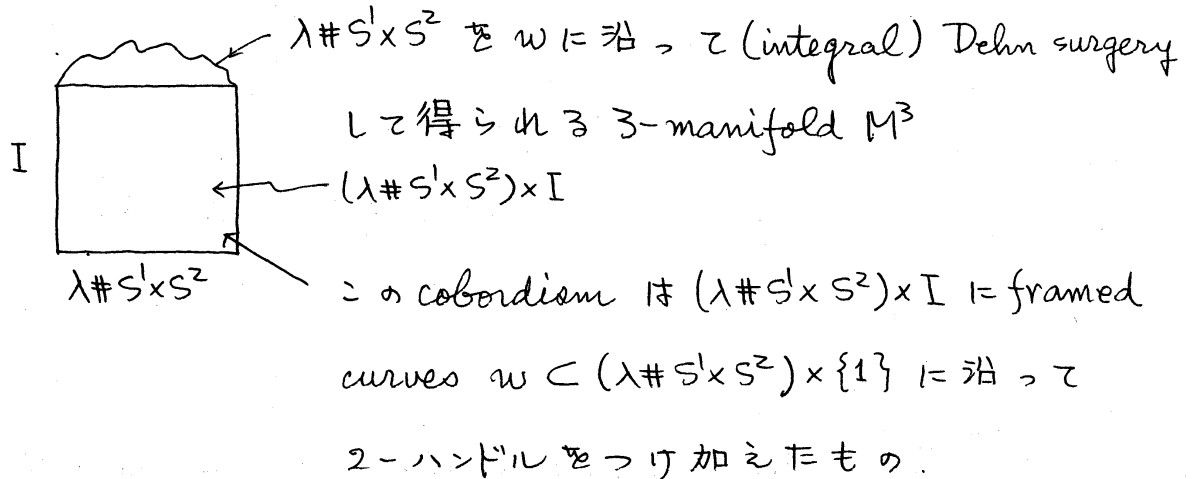
命題 (Montesinos). 全ての微分同相写像 $f: \lambda \# S^1 \times B^3 \longrightarrow \lambda \# S^1 \times B^3$ は拡大 $F: \lambda \# S^1 \times B^3 \longrightarrow \lambda \# S^1 \times B^3$ をもつ。

系. 上の W^4 は $H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2$ で完全に決定される。

系. コボルディズム $C^4(\lambda, \mu, \gamma)$ は W^4 を完全に決定する。

そこで $(W^4, C(\lambda, \mu, \gamma))$ を W^4 の Heegaard 分解という。

w を $\lambda \# S^1 \times S^2$ 内の framed link とし, $(\lambda \# S^1 \times S^2, w)$ に次のコボルディズムを対応させる。



この M^3 が $S^1 \times S^2$ の適当な同数の連結和に微分同相のとき, $(\lambda \# S^1 \times S^2, w)$ を 4 次元多様体の Heegaard diagram という。

問題. どんな pair $(\lambda \# S^1 \times S^2, w)$ が Heegaard diagram になるか。

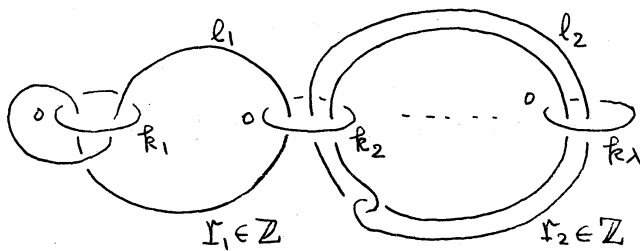
★ 「先ず Heegaard diagram $(\lambda \# S^1 \times S^2, w)$ が与えられたとき, それに対応する 4 次元多様体 W^4 の基本群 $\pi_1(W^4)$ の表示について」

$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2 \cup \gamma H^3 \cup H^4$ をハンドル分解とし, その 2-ハンドルの部分迄 $H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2$ を V とすると,

$$\pi_1(W^4) \cong \pi_1(V^4) \quad \text{である。}$$

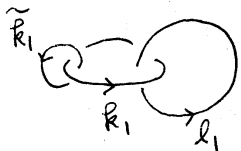
$u = k_1 \cup \dots \cup k_\lambda$ を λ 個の成分をもつ $\overbrace{S^3 \text{ 内の}}^{\text{自明な}}$ リンクとし, その framing の係数は全て 0 とする。

w を $\lambda \# S^1 \times S^2$ 内のリンクとし, その成分は μ 個とする。今 u によって S^3 を Dehn surgery すると $\lambda \# S^1 \times S^2$ となるので $(\lambda \# S^1 \times S^2, w)$ を考える事は $(S^3, u \cup w)$ を考えるのと同じ事である。そこで w を S^3 内で考えたとき framing が考えられるから, この framing をそのまま $\lambda \# S^1 \times S^2$ 内で考えることにする。そして w の framing は全て整数とする。先ず $k_1, \dots, k_\lambda$



に向きをつけ, $k_1, \dots, k_\lambda$ に non-singular disjoint discs $B_1^2, \dots, B_\lambda^2$ を張り, B_i^2

に k_i と coherent に向きをつける。 $l_1, \dots, l_\mu$ に向きをつける。 $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_\lambda$ を $k_i \cup \tilde{k}_i$ が Hopf link で $k_1 \cup \tilde{k}_1 \cup k_2 \cup \tilde{k}_2 \cup \dots \cup$



$k_\lambda \cup \tilde{k}_\lambda$ が λ 個の Hopf link の union でこれらの Hopf links は completely splittable にな

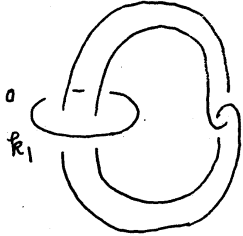
っているようなものとする。 $\tilde{k}_j$ の向きは右手系で $\text{Int}(\tilde{k}_i, B_j^2) = \delta_{ij}$ となるように取る。今 l_i と $\bigcup_{j=1}^{\lambda} B_j^2$ との intersection を考え, その intersection number を順に $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{i\lambda}$ ($\varepsilon_{ij} = \pm 1$) とする。 $l_i \simeq \tilde{k}_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \tilde{k}_{i2}^{\varepsilon_{i2}} \dots \tilde{k}_{i\lambda}^{\varepsilon_{i\lambda}}$

$\tilde{k}_i$ に a_i , l_j に R_j を対応させると $\pi(V)$ は $\langle a_1, \dots, a_\lambda \mid R_1, \dots, R_\mu \rangle$ という表示をもつ。

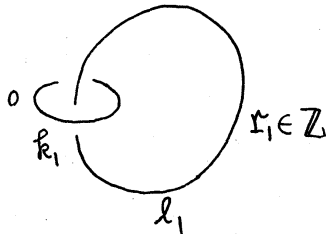
注. $\pi(V)$ の計算の時は w の方の framing 係数は関係しない。



例 $\pi_1(V) = \langle a | a \rangle = \{1\}$ (この時 W にして考えると 3-handle は有り得ない。)



$$\pi_1(V) = \langle a | aa^{-1} \rangle = \langle a | - \rangle \cong \mathbb{Z}$$



$$\partial V = (\lambda \# S^1 \times S^2 - \bigcup \overset{\dot{B}^2 \times B^2}{\cup} \overset{\parallel}{U}(l_i)) \cup_{h_i} (B^2 \times \dot{B}^2)$$

L_i, M_i を S^3 内の l_i の longitude と meridian

としたとき $h_i(B^2 \times (*)) = \pm L_i + \epsilon_i M_i$ によって h_i は定義されているとする (以下の $h_i(*) \times \dot{B}^2$ も関係している)。

∂V の場合 $\pi_1(\partial V)$ の表示の relator R_j は l_j に対応するのでなく curve $\alpha_j \equiv \pm L_j + \epsilon_j M_j \subset \partial U(l_j)$ に対応するものとする。又 $h_i = h_i(*) \times \dot{B}^2 = \gamma_i L_i + \delta_i M_i$ とする。

$$\text{ただし } \begin{vmatrix} \pm 1 & \epsilon_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{vmatrix} = \pm 1$$

すると van-Kampen の定理より $\pi_1(\partial V)$ は次の表示をもつ。

$$\pi_1(\partial V) = \pi_1(S^3 - (k_1 \cup \dots \cup k_\lambda \cup l_1 \cup \dots \cup l_\mu)) / \langle h_i(\dot{B}^2 \times \{*\}) \cup \tilde{L}_i \rangle$$

ただし $\tilde{L}_i$ は k_i の longitude.

★次に W^4 の Heegaard genus が簡単な場合を考察する。

$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2 \cup \gamma H^3 \cup H^4$ のとき W^4 の H-genus は (λ, μ, γ) であるという。双対ハンドル分解を考えることにより、 $\equiv$ 対として $(\lambda, \mu, \gamma) = (\gamma, \mu, \lambda)$ である。

$(0, \mu, 0)$ のとき $V^4 = H^0 \cup \mu H^2$ とおくと

$$V^4 \simeq \underbrace{S^2 \vee \dots \vee S^2}_{\mu} \quad \text{ホモトピー-同値}$$

M_α を次で定義される $\mathbb{Z}$ 上の行列とする。 $M_\alpha = (\alpha_{ij})$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} lk(l_i, l_j) & i \neq j \\ \text{framed coefficient } i=j. & \text{(各 } l_i \text{ が 2-handle の attaching sphere という事から } \alpha_{ii} \in \mathbb{Z} \text{)} \end{cases}$$

注: $a_1, \dots, a_\mu$ を W^4 のハンドル分解から定まる標準的な $H_2(W^4; \mathbb{Z})$ の基とすると $lk(l_i, l_j) = \text{Int}(a_i, a_j)$ であり、各 l_i が S^3 の中でめて自明な結び目の時は $V = H^0 \cup \mu H^2$ に plumbing structure が入る。

命題. $\partial V \cong S^3$ であるから $\det M_\alpha = \pm 1$ である。

2-handles のないとき $W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \gamma H^3 \cup H^4$

このとき $\partial(H^0 \cup \lambda H^1) = \partial(\gamma H^3 \cup H^4) \cong \lambda \# S^1 \times S^2$ より

$\lambda = \gamma$ となる。そして Montesinos により $\lambda \# S^1 \times S^2$ の pasting

homeomorphism によらず W^4 は unique に定まるから

$$W^4 \cong \lambda \# S^1 \times S^3 \quad \text{である。}$$

3-handles のないとき (双対ハンドル分解を考える事により、これは 1-handles が無いのと同じ)。

$W^4 = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2 \cup H^4$ 双対ハンドル分解を考える
と W^4 は 1-handles を持たないから、従って $\pi_1(W^4) = \{1\}$ 。

$$W^4 = \bar{H}^0 \cup \mu \bar{H}^2 \cup \lambda \bar{H}^3 \cup \bar{H}^4 \quad (\text{双対ハンドル分解})$$

$H^0 \cup \lambda H^1 \cong \lambda \# S^1 \times B^3$ だが $\bar{H}^0 \cup \mu \bar{H}^2$ は 2-handles の attaching ~~■~~ sphere に依存し、一般には $\bar{H}^0 \cup \mu \bar{H}^2 \neq \mu \# S^2 \times B^2$ 。

しかし $\bar{H}^0 \cup \mu \bar{H}^2 \cong \mu \# S^2 \times B^2$ が成立する特別な場合は次の定理が成り立つ。

定理 (Laudenbach and Poénaru). $X_p = p \# S^2 \times B^2$, $Y_p = p \# S^1 \times B^3$ とすると貼り付けの微分同相写像 $\bar{h}: \partial X_p \rightarrow \partial Y_p$ によらず

$$X_p \cup_{\bar{h}} Y_p \cong S^4 \quad \text{となる。}$$

$V = H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2$ とおくと $\partial V = \partial H^4 \cong S^3$ である。

$u = k_1 \cup \dots \cup k_\lambda$ を $\lambda \# S^1 \times S^2$ を作るための $\partial H^0 \cong S^3$ 内の自明な link, $w = l_1 \cup \dots \cup l_\mu$ を 2-handles μH^2 の attaching spheres とする。

命題 全ての k_α , l_β ($\beta \neq \delta$) の linking number が 0 となるような成分 l_δ は存在しない。 ($\alpha = 1, 2, \dots, \lambda$; $\beta = 1, \dots, \delta^*, \dots, \mu$)

証). もしそういう l_r があるなら $l_r \sim 0$ in $S^3 - (k_1 \cup \dots \cup k_\lambda \cup l_1 \cup \dots \cup l_\mu)$. 従って l_r が bound する 2-ハンドル と $l_r \sim 0$ から得られる 2-cycle ($\cong$ surface) があるが, これは ∂V でホモロークゼロでない. 従って $H_2(\partial V) \neq 0$ となり, $\partial V \cong S^3$ に矛盾. $\square$

上と同様の議論によって次の事が言える.

命題. l_i の framing $\tilde{l}_i$ と l_j の framing $\tilde{l}_j$ ($i \neq j$) が $S^3(uvw)$ の中でホモロークになる事は無い.

定理. 2-handles の attaching spheres である $\{l_1, \dots, l_\mu\}$ は次の性質をもつ少なくとも 1 個のグループに分かれる.

① $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_{m_1}^{(1)}$

② $l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \dots, l_{m_2}^{(2)}$

⋮

① $l_1^{(\lambda)}, l_2^{(\lambda)}, \dots, l_{m_\lambda}^{(\lambda)}$

① $l_1^{(\lambda+1)}, l_2^{(\lambda+1)}, \dots, l_{m_{\lambda+1}}^{(\lambda+1)}$

ここで $m_i \geq 1$ ($i=1, 2, \dots, \lambda$), $m_1 + m_2 + \dots + m_{\lambda+1} = \mu$.

従って $\lambda > \mu$ という事は起らない.

性質: α ($1 \leq \alpha \leq \lambda$) 番目のグループは次の性質をもつ.

$$lk(\langle k_j \rangle, \langle l_1^{(\alpha)} \rangle + \dots + \langle l_{m_\alpha}^{(\alpha)} \rangle) = \delta_{j\alpha}$$

$$lk(\langle k_\alpha \rangle, \langle l_i^{(\alpha)} \rangle) \neq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m_\alpha).$$

$\lambda+1$ 番目のグループは ①, ..., ② 以外のグループ.

この定理の証明は $\partial(H^0 \cup \lambda H^1 \cup \mu H^2) = \partial H^4 \cong S^3$ という事実と k_i の 0-framing $\tilde{k}_i$ が 2-handles をつけ加えることにより, 少なくともホモロジーの段階で消える必要がある事から示される。

注. 最後の $\lambda+1$ 番目のグループに代しては $(0, \mu, 0)$ の場合の行列が適用出来る。

References.

J. M. Montesinos : Heegaard diagrams for closed 4-manifolds
(preprint).