

振動固有値問題の有限要素解析

東大宇航研

菊地文雄

"

相澤龍彦

東大大学院

宇津野秀夫

1. はじめに

弾性体構造物の設計にあたっては、設計変更をしながらその挙動を解析する手順を繰返すが、その際の解析の道具として有限要素法は便利に使用される。ところで弾性体の自由振動解析にも有限要素法は適用可能であるが、その際に設計変更ごとに新たに計算をやりなると、膨大な計算時間が必要になる。これは振動解析に必要な固有値解析は静的解析に比較して、はるかに計算の手間が大きい^[1]ためである。設計変更があまり大きくない場合に、基準となる設計に対する固有値、固有モードの情報をできるだけ利用して、設計変更による変化分を効率的に計算できる手法が開発されるならば、実用上は大いに役に立つであろう。

このような考えに基づいて、ここでは偏微分方程式で記述されるような振動固有値問題の有限要素解析のためのアルゴリ

ズムを提出し、例題によりその妥当性と実用性を検証する。
 本手法は、振動パラメータに関する形式的べき級数展開に基づき古典的振動スキーム^[2]の考え方を元にして、それを計算機で計算しやすいように工夫を加え、反復的なスキームに変えたものである。特に本手法は縮重や空集固有値の場合にも相当程度まで適用可能なものである。以下では、アルゴリズムを明確にする目的と、一般の場合の収束・誤差評価等が完了していないこともあって、代数的な固有値問題を対象にして説明する。

2. 基礎理論

非振動問題は、構造物の有限要素法による振動解析などでよく出あう、次の形の一般固有値問題とする。

$$K u = \lambda M u \quad (1)$$

ただし、 K は m 次元実対称半正定値マトリックス、 M は m 次元実対称正定値マトリックスとする（ m は正整数）。良く知られているように、この場合には固有値は非負実数である。固有対を $\{\{\lambda_i, \phi_i\}\}_{i=1}^m$ と記すことにするが、次式が成立するよう^{に選んでおく}。

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{m-1} \leq \lambda_m \quad (2)$$

$$\phi_i^t M \phi_j = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq m; M \text{ 正規直交}) \quad (3)$$

我々は上記の非振動問題の固有対の情報をできるだけ利用して、振動問題の解を求めることを考える。そのため、非振動問題の固有対は必要に応じて一部（全部でなくてよい）求めておく。そのような目的には、例えばサブスペース法が利用できる。^[1]

振動問題としては、(1)と同様な次の形のものを考える。

$$(K + \delta K) u = \lambda (M + \delta M) u \quad (4)$$

ただし $\delta K, \delta M$ はそれぞれ K, M の変化（振動）分であり、共に m 次実対称とする。振動問題では、 $K + \delta K$ が半正定値、 $M + \delta M$ が正定値と考えるのが自然である。

いま l, n を $1 \leq l \leq n \leq m$ なる整数で次の条件を満たすものとする。

$$\lambda_l \neq \lambda_{l-1} \text{ (ただし } l \neq 1), \quad \lambda_n \neq \lambda_{n+1} \text{ (ただし } n \neq m) \quad (5)$$

このとき、振動問題の固有対を、 $1 \leq i \leq n$ に対して次の形で求めることを考える。

$$\lambda : \lambda_i + \mu_i \quad (6-1)$$

$$u : \sum_{j=l}^n \alpha_{ij} \phi_j + v_i ; \quad v_i^t M \phi_k = 0 \quad (6-2) \\ (l \leq k \leq n)$$

このように複数の固有対を利用しているのは、一応の可能性として、縮重や近接の場合も扱いたいからである。

ここで次の空間を定義する。

S : $\phi_l, \phi_{l+1}, \dots, \phi_n$ の線形包; サブスペース

$S^\perp$: $\mathbb{R}^m$ での M -直交の意味での S の直交補空間

これらの記号を用いれば、(6-2) の u は次の形に書くこともできる。

$$u : \phi_i^* + v_i ; \quad \phi_i^* \in S, \quad v_i \in S^\perp \quad (7)$$

結局、(6) あるいは (7) からわかるように、 $u_i, \{\alpha_{ij}\}_{j=l}^n, v_i$ ($l \leq i \leq n$) を求めればよい。その際に、(4) は固有値問題であるから、 u はスカラー倍の不定性があるが、その不定性を除去するための 正規化条件 については、後で課すことにする。

(6) を (4) に代入して整理すると次式を得る。ただし簡単のため i は省略する。

$$(IK - \lambda^* MI) \psi = (A + \mu B) \sum_{j=l}^n \alpha_j \phi_j + (A' + \mu B) \psi \quad (8)$$

ここに,

λ^* : シフト値。 $\{\lambda_j\}_{j=l}^n$ の何らかの代表値, 例えば
平均値を用いる。これによって値が異なる必要
はない。なお

$$\lambda^* \in]\lambda_{l-1}, \lambda_{n+1}[$$

を要請する ($l=1$ または $n=m$ であれば,
それぞれ $\lambda_{l-1}, \lambda_{n+1}$ の代りに $-\infty, \infty$ を許す)。

$$A = \lambda^* MI - IK + \lambda^* \delta MI - \delta IK$$

$$A' = \lambda^* \delta MI - \delta IK$$

$$B = MI + \delta MI$$

(8) の両辺を S に射影する。 IK, MI が対称であることに注意
しながら計算すると, 左辺の S における成分は 0 であること
がわかる。具体的には $\{\phi_j\}_{j=l}^n$ を順に転置をとり, 左側から
(8) の両辺に掛けてやると, 次式を得る。

$$A^* \alpha + \mu B^* \alpha + \beta + \mu \gamma = 0 \quad (9)$$

ここに,

$$\alpha^t = [\alpha_l \ \alpha_{l+1} \ \cdots \ \alpha_n]$$

$$A^* : \phi_j^t A \phi_k \text{ を } (j-l+1, k-l+1) \text{ 成分とする} \\ \text{マトリックス } (l \leq j, k \leq n)$$

$$B^* : \phi_j^t B \phi_k \text{ を } (j-l+1, k-l+1) \text{ 成分とする} \\ \text{マトリックス } (l \leq j, k \leq n)$$

$$\beta : \phi_j^t A^* v \text{ を } (j-l+1) \text{ 成分とするたてベクトル} \\ (l \leq j \leq n)$$

$$\gamma : \phi_j^t B v \text{ を } (j-l+1) \text{ 成分とするたてベクトル} \\ (l \leq j \leq n)$$

なお,

$$\left. \begin{aligned} \phi_j^t A \phi_k &= (\lambda^* - \lambda_i) \delta_{jk} + \phi_j^t (\lambda^* S M - S K) \phi_k \\ \phi_j^t B \phi_k &= \delta_{jk} + \phi_j^t S M \phi_k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

が成立する。(9)の条件は, (8)の右辺が $S^\perp$ の元になるための条件に他ならない。すでに見たように, (8)の左辺は $S^\perp$ の元であるから, (9)は(8)が意味を持つための両立条件, あるいは可解条件である。

さて $K - \lambda^* M$ を $S^\perp$ から $S^\perp$ への作用素に制限することができるが, $\lambda^* \in]\lambda_{l-1}, \lambda_{n+1}[$ を仮定しているから, こ

の作用素は逆を有する (これは $K - \lambda^* M$ の一種の 一般化逆作用素 と見なせる)。この逆を $(K - \lambda^* M)^\dagger$ と書くと, (8) は次のようになる。

$$v = (K - \lambda^* M)^\dagger \left\{ (A + \mu B) \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j + (A' + \mu B) v \right\} \quad (11)$$

以上により, $v, \{\alpha_j\}_{j=1}^n, \mu$ を決定するには, (9) を考慮した上で (11) を用いればよいと考えられる。(11) の右辺には v が入っているから, $\mu, \{\alpha_j\}$ がわかったとしても, v は (11) から直ちに決定できるわけではなく, 反復的な計算が必要となる。また逆に v がわかっていたとしても, (9) を用いて μ と $\{\alpha_j\}$ をどのように決定するかについては, かなりの任意性があるように思われる。以下にこれらの量の決定法について考えることにしよう。

3. 計算法の提案

(9), (11) を具体的に解くための方法の一つを提案する。そのため, まず (9) をどう扱うかを考える。その際, v は一変与えられているものとして, α と μ を決定することを目指そう。以下に述べる方法は可能な様々な方法のうちの一つにすぎないが, 内部反復的な余分な方向は不要で, 実用上からも比較的扱いやすいものと考えられる。

通常の摂動法において（非摂動問題での）縮重固有値を扱う場合には，まず（次数が縮重度に等しい）小さな固有値問題を解き，非摂動問題の固有関数の組みかえを行なう。^[2] 同時にヒントを得て，(9)における支配項のみを残し， α に関する非支配項を落した次の一般固有値問題をまず考える。

$$A^* \alpha = \mu^* B^* \alpha \quad (12)$$

マトリックス，ベクトルの次数は $(n-l+1)$ である。(12)を解いてその固有対を $\{\mu_i^*, \psi_i\}_{i=1}^{n-l+1}$ とする。ただし，これらの固有対はすべて単純（非縮重）と仮定する。また固有ベクトルは次の意味で正規直交（ B^* -正規直交）とする。

$$\psi_j^t B^* \psi_k = \delta_{jk} \quad (1 \leq j, k \leq n-l+1) \quad (13)$$

(12)の形の小さい固有値問題の解法には，例えば一般化Jacobi法^[1]を使用することができる。

(9)に戻って， ψ はとりあえず与えられているものとして， β , γ も既知と見なす。その上で α を

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-l+1} \alpha_j^* \psi_j \quad (14)$$

と展開し，(9)に代入して各 ψ_j の係数を比較すると次式を得る（固有関数展開の利用）。

$$\mu_j^* \alpha_j^* + \mu \alpha_j^* + \beta_j^* + \mu \gamma_j^* = 0 \quad ; \quad 1 \leq j \leq n-l+1 \quad (15)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j^* &= \psi_j^t B^* \alpha \quad , \quad \beta_j^* = \psi_j^t \beta \\ \gamma_j^* &= \psi_j^t \gamma \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで α を次の形に仮定する。

$$\alpha = \psi_i + \delta \quad ; \quad \delta^t B^* \psi_i = 0 \quad (17)$$

これは各 i ($1 \leq i \leq n-l+1$) に対して可能であり, 計算にあたっては, いずれかの i に注目して計算を実行する。この操作により, $\{\alpha_j^*\}_{j=1}^{n-l+1}$ 中の $\alpha_i^* = \psi_i^t B^* \alpha$ は 1 に固定されたことになる。さかのぼると, これにより u に一種の 正規化条件 を課したものと見なせる。なお (17) のように選んだのは, 振動問題の u の支配項が各 ψ_i であると予想されることと, また (17) の形の正規化条件は計算上の取扱いが容易なためである。

(17) のように α を選ぶと, (15) は次のように解けてしまう。

$$\mu = -(\mu_i^* + \beta_i^*) / (1 + \gamma_i^*) \quad (18-1)$$

($j=i$ の式から)

$$\alpha_j^* = \frac{-(\beta_j^* + \mu \gamma_j^*)}{\mu_j^* + \mu} \quad (j \neq i \text{ の式から}) \quad (18-2)$$

これにより、 ψ が与えられたとして α, μ を定める際には、余分な内部反復を避けることができる。もちろん、実際には ψ は未知である。なお (18-1) の分母において、 γ_i^* は系の摂動が微小であれば微小量と予想される。よって分母は通常は零にならないであろう。また分子の β_i^* も微小量と考えられるので、 $\mu \doteq -\mu_i^*$ であろう。すると (18-2) の分母はほぼ $\mu_j^* - \mu_i^*$ となるが、(12) の固有値が非縮重であれば、この分母も普通は零にはならないであろう。この辺の議論を精密に実行するには、摂動項に適切な仮定を課した上で、縮小写像の原理等も適用する必要がある。

以上で計算スキームの基礎が確立できた。あとは ψ が未知で、しかも (8) の両辺に現れることを考慮して反復法で解けばよい。具体的な反復スキームの一例を与えておく。なお i は $1 \leq i \leq n-l+1$ の範囲で 1 つ固定した上で下記の計算を実行する。

(i) 第 0 近似: $\psi_i^{(0)}$, 例えば $\psi_i^{(0)} = 0$

(ii) $\psi_i^{\tau} B^* \alpha^{(k)} = 1$ として,

$$A \alpha^{(k)} + \mu^{(k)} B \alpha^{(k)} + \beta^{(k-1)} + \mu^{(k)} \gamma^{(k-1)} = 0 \quad (19)$$

を (17), (18) に従って $\alpha^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ について解く。

$\beta^{(k-1)}$, $\gamma^{(k-1)}$ は $v_i^{(k-1)}$ に対する β , γ を意味する。

(iii) (11) に基づき,

$$v_i^{(k)} = (K - \lambda^* M)^{\dagger} \left\{ (A + \mu^{(k)} B) \sum_{j=1}^{n-l+1} \alpha_j^{(k)} \phi_{j+l-1} \right. \\ \left. + (A' + \mu^{(k)} B) v^{(k-1)} \right\} \quad (20)$$

により $v_i^{(k)}$ を計算する。

(iv) 適当な打ち切り条件により反復の収束を判定する。収束不十分であれば、 $l+1 \rightarrow l$ として (ii) に戻り計算を続ける。なお $l = 1, 2, \dots$ である。

上記の反復を見ると, $\{\mu_i^*, \phi_i\}_{i=1}^{n-l+1}$ は各振動について一度求めておけばよいので, 各反復で新たに再計算する必要はない。また非振動系の $\{\lambda_i, \phi_i\}_{i=1}^m$ は一度求めれば全振動問題を通じて共通であり, $(K - \lambda^* M)^{\dagger}$ も同様である。結局, 各反復では, ベクトル, マトリックスの線形演算や内積演算が大きな割合を占める。

4. 使用にあたっての注意

(i) サブスペース $\mathcal{S}$ の選び方について 振動問題においては、最低次から順に数個の固有対のみ求めれば大抵は十分である。その場合には、 $\mathcal{S}$ としては、最低次から順に必要な個数より少し多めの番号までの（非振動系の）固有関数が基底になるように選ぶと反復の収束の速からは有利であろう。反復計算自体は必要な個数のものだけ実行すればよい。一般に $\mathcal{S}$ を広くすればするほど反復の収束は良好となり、同一の振動状態に対する反復回数は減少し、また大きな振動でも収束するようになる。また後で述べる λ^* の選び方も比較的楽になる。反面、計算の手間は増大するから、両方の要因の *trade off* が必要になる。

(ii) $(K - \lambda^* M)^{\dagger}$ の実行について λ^* が非振動問題のいずれの固有値にも一致していなければ、 $K - \lambda^* M$ は可逆であって、 $(K - \lambda^* M)^{-1}$ を利用できる。具体的には $K - \lambda^* M$ に Gauss の消去法を用いて上三角化すればよい。その際に、多くの場合は *pivot* の選択は不要と思われる。そうであれば、通常の有限要素法の *solver* がそのまま使用できる。また λ^* が固有値に一致している場合には、 $K - \lambda^* M$ のある行と対応する列とを除去し（その数は固有値の重複度に等しい）、そうして得られる縮小されたマトリックスの逆

を利用する。どの行(列)を除去するかについては注意が必要である。^[3,4] いずれにせよ、逆演算(あるいは一般化逆演算の実行)は一度だけでよく、しかもマトリックスのバンド性なども利用できるので、演算の効率化が可能となる。

(iii) $(K - \lambda^* M)^{\dagger}$ の実行に伴う再直交化 : $(K - \lambda^* M)^{\dagger}$ は $\mathcal{S}^{\perp}$ の中の作用素であるが、(ii) に述べたような方法ではどうしても $\mathcal{S}$ の成分が混入する。よって再直交化の手続きが必要になる。できたら $(K - \lambda^* M)^{\dagger}$ の実行毎に再直交化することが望ましい。

(iv) λ^* の選び方 λ^* は求めたい番号の(非振動問題での)固有値に比較的近い値に選ぶのがよいであろう。 $\mathcal{S}$ が広ければ、反復の性質は λ^* にそれほど鋭敏に依存はしない。ここでは一般には求めたい固有対は複数であるから、それらの(非振動系での)固有値の平均的な値に選ぶのが普通であろう。番号ごとに λ^* を変える必要はない。

(v) サブスペース法との関連 本手法で用いる技術はほとんどサブスペース法で用いるものと共通である。例えば(12)のような小さな一般固有値問題の解法には一般化Jacobi法が使用できるし、その他のマトリックス演算、内積演算等もほとんど共通である。各ステップでのマトリックス演算等は本方法の方が多いが、逆演算はサブスペース法では振動ご

とに新しくやり直す必要があるのに対し、本方法では不要である。また小さい固有値問題を解くのは本方法では摂動ごとに一回でよいが、サブスペース法では反復の各ステップで必要である。反復回数は状況により異なる。いずれの手法でもサブスペースを用いるため、似た点が少ない。

(vi) Rayleigh-Ritz法との関連 本方法で(12)を解くことは、 $\phi_1, \dots, \phi_n$ を用いた Rayleigh-Ritz法 により(4)を近似的に解くことと同一である。したがって、反復の1近似で求まる固有値等は、それだけでも一定の意味を有することがわかる。

(vii) 理論解析 本方法においては摂動パラメータは陽には現れていない。最終的なSK, SMIのみ与えられれば計算は実行できる。しかし反復の収束、有限要素法に適用した場合の誤差解析などにおいては、何らかの摂動パラメータを導入するべきであろう。この種の解析では、縮小写像の原理（あるいは陰関数定理）や有限要素法の誤差解析の理論等を活用する必要がある。

(viii) 本方法の実用性 序文でも述べたように、固有値問題を解くにはかなりの計算が必要である。設計変更のような場合には、基準設計の情報を利用する本法は有効である可能性があるが、その評価は今後の課題である。

5. 数値例

数値例として図.1に示すような、横辺長1、高さ1の一般的な平行四辺形膜の振動を扱う。平行四辺形の傾斜角を α とし、膜は一般的な張力で張られているものとする。問題を α によらず同一の領域で扱うため、次の座標変換を導入する。

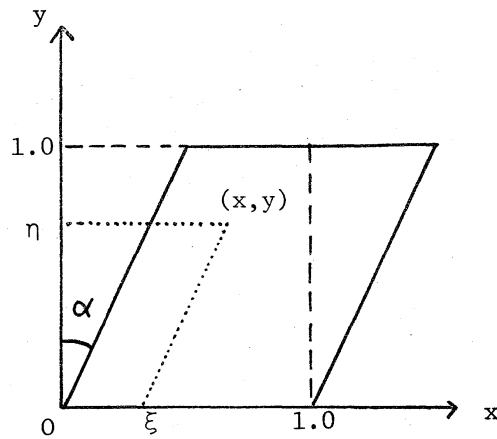


図.1 平行四辺形領域

$$\xi = x - y \tan \alpha, \quad \eta = y \quad (21)$$

これにより、問題は $0 < \xi, \eta < 1$ なる ξ, η に関する単位正方形領域で扱える。

振動方程式は、 x, y 座標で見ても次のように記述される。

$$-\Delta u = \lambda u \quad (\text{領域内}), \quad u = 0 \quad (\text{境界上}) \quad (22)$$

(21)の座標変換を施し、かつ弱形式で表示すると、問題は次式を満たす非自明な $u \in H_0^1(\Omega)$ (Ω は単位正方形) と実数 λ の対を見出すことである。

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \tan^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right. \\
& \quad \left. - \tan \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi d\eta \\
& = \lambda \int_0^1 \int_0^1 u v d\xi d\eta \quad ; \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (23)
\end{aligned}$$

上式中で $\sim$ を引いた部分が, $\alpha = 0$ を非振動状態としたときの振動項である。有限要素法を適用する際に, 左辺からは K (剛性マトリックス), 右辺からは M (質量マトリックス) が得られる。この例では $\delta M = 0$ である。

有限要素モデルとしては, ξ, η に関する長方形双1次 (区画) 多項式要素を用いた。すなわち, 各長方形要素内では u を次の形で近似する。

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \quad (24)$$

要素分割としては, Ω を $N \times N$ の一様な正方形に分割した。 N は各辺上の要素数である。(Ω 全体を分割し, 対称性等は考慮しない)

使用する非振動系 ($\alpha = 0$) での固有関数は, 厳密な固有関数 (三角関数の積で表わされる) の補間関数がそのまま厳密な有限要素解になっている。よってスカラー倍して正規化するだけで (3) を満たすようにできる。また固有値は Rayleigh 商を用いて計算できる。

(12)の計算にあたっては、この例では B^* が単位マトリックスであるので、通常の Jacobi 法を用いることができた。^[1] Jacobi 法の反復は、後の計算の誤差に比較して反復の打ち切りによる誤差が無視できる程度に、十分に多数回反復を実行した。

本計算自体の反復の打ち切りは次の条件によった。

$$\|u_h^{(k)} - u_h^{(k-1)}\| / \|u_h^{(k)}\| \leq 10^{-10} \quad (25)$$

ただし $u_h^{(k)}$ は反復途中 (k 回目) の u の近似関数、 $\|\cdot\|$ は $L_2(\Omega)$ のノルムである。 $\|\cdot\|$ は M を用いて計算できる。

計算は α , N , λ^* , サブスペース等をいろいろに変えて実行した。計算においては、非振動問題での単純固有値の場合については、サブスペースとして対応する固有関数 1 個のみからなる 1 次元のサブスペースを用いた計算が可能である。これは理論的には複数次元のサブスペースを用いたスキームの特殊な場合にすぎないが、実用上は複数次元の場合に比較してプログラム等も簡単に計算の手間も少なく、それ自体として価値があると考えられる。もちろん、反復の収束性は悪くなるであろう。

図. 2 には 2 重 Fourier 級数を用いた Ritz-Galerkin

法による固有値の計算結果を示す。ただし項数は20で、最低次の非振動固有値を与えるモードから順に20を選んだ。計算にはJacobi法を用いたが、図中にSとAとで示したように、固有モードには Ω の図心について点対称(S)のもの

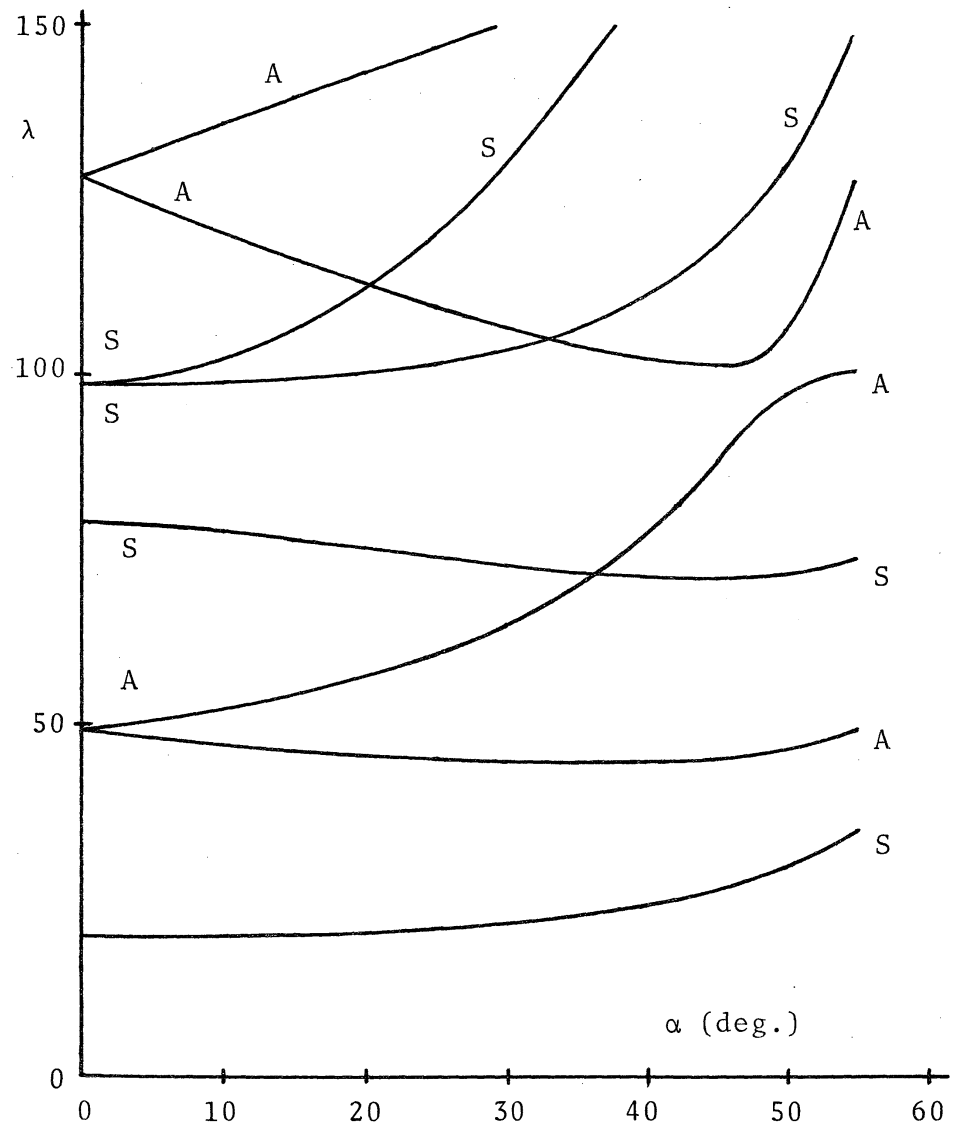


図. 2 固有値 λ の α に対する依存性 (Fourier展開による)

と共逆対称 (A) のものがあり、それらは (23) の両辺に現われる内積のいずれに關しても直交しているので、実際には S モード、 A モードの範囲で計算すればよく、その結果として、 S 、 A それぞれ 10 項で計算できた。図からわかるように、各固有値の経路は所により互に交差しており、かなり複雑である。グラフの精度は $\alpha \leq 40^\circ$ 位まではほぼ厳密解に一致していると思われる。

まず単純 (非縮重) 固有値について、対応する固有対を 1 つのみ用いた計算を実行した。この例題では非摂動系での λ_1 、 λ_4 等が相当する。表 1 に $N = 10, 20$ の場合について λ_1 、 λ_4 を求めるに必要な反復回数をまとめた。なお、これ

らの固有値は数値解においても単純であった。また λ^* としては、それぞれ非摂動系の数値解の λ_1 と λ_4 を用いた。表からわかるように、 α の増加と共に反復回数は増加する。また反復回数は N (すなわち離散化の程度) にはあまり大きく依存しないようである。

eigenvalue	λ_1		λ_2	
N	10	20	10	20
$\alpha = 5^\circ$	9	9	10	11
10°	12	12	18	20
15°	16	17	35	48
20°	22	24	140	--
25°	33	37	--	--
30°	61	74	--	--
35°	--	--	--	--

(単純固有値)

表 1 収束に必要な反復回数

次に複数次元のサブスペースを用いた計算結果を示す。表2には非摂動系の $\{\phi_i\}_{i=1}^{10}$ を用いた結果を示す。 $\lambda^* = 20$ としたが、これは非摂動系の λ_1 に近い。結果は λ_1 から λ_6 までのみを示す。ただし順番は大きさの順にしてあるので、経路の交差による順序の入れがわりは表からはわかりにくい。また分割の影響を見るため、 $N=10$ と $N=20$ の両方を示す。なお、数値解においても厳密解と同様、非摂動系の λ_2 と λ_3 , λ_5 と λ_6 は縮重している(縮重度2)。これは要素分割の規則性、対称性のため、数値的な方程式も厳密な方程式と同様な中心に關する対称性を有するためと思われる。表からわ

eigen-value	λ_1		λ_2		λ_3		λ_4		λ_5		λ_6	
N	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
$\alpha = 5^\circ$	8	8	11	12	10	11	21	22	28	29	27	28
10°	11	11	13	14	13	13	24	26	30	31	30	32
15°	14	15	15	16	15	17	27	29	34	37	38	42
20°	19	21	17	19	18	20	30	33	39	44	49	58
25°	28	33	20	25	21	25	33	38	44	52	38	46
30°	46	62	32	46	30	37	36	43	50	64	41	--
35°	131	--	69	--	56	--	52	--	57	80	--	81

(-- は非収束, もしくは 100 回以内に収束しないことを示す)

表. 2 サブスペースを用いた計算例 (分割の差)

かるように, λ_1, λ_4 等については, 1次元サブスペースを用いた場合に比較して収束はかなり良くなっている。また, λ_2, λ_6 あるいは λ_5, λ_6 のような元来は縮重していた固有値の振動による分離も, 数値的に無理なく計算されているようである。また反復回数が分割数にそれほど敏感でないこともわかる。

eigen-value	λ^*	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$\alpha = 5$	0	10	13	12	25	32	31
	20	8	11	10	21	28	27
	50	14	8	8	16	22	21
10	0	12	15	14	28	34	33
	20	11	13	13	24	30	30
	50	18	10	11	18	24	24
15	0	14	17	17	31	38	42
	20	14	15	15	27	34	38
	50	24	13	15	21	28	31
20	0	15	19	20	34	43	55
	20	19	17	18	30	39	49
	50	35	18	20	24	32	41
25	0	21	20	23	37	49	41
	20	28	20	21	33	44	38
	50	59	24	28	27	37	33
30	0	32	27	27	40	55	44
	20	46	32	30	36	50	41
	50	184	49	46	46	42	--
35	0	64	50	41	43	63	--
	20	131	69	56	52	57	--
	50	--	--	121	149	65	--

$N=10$.
 λ^* は
 0, 20,
 50 の
 3通り
 に選ん
 でみた。

表. 3 シフト値 λ^* の選び方による反復回数之差

次にシフト値 λ^* の選び方を見るため、 $\lambda^* = 0, 20, 50$ の3通りの場合についての結果を求め、表.3 にまとめた。 N はすべて10とする。ちなみに、非摂動系において、 $\lambda_1 \doteq 20, \lambda_2 = \lambda_3 \doteq 50$ である。表からわかるように、 λ^* の選び方により収束性にある程度の影響がある。大まかにいって、 λ^* に近い固有値の収束は速くなる。しかし α が小さければ、 λ^* のいずれの値に対しても収束回数はずっと α 値であって、あまりに λ^* の選び方に神経質になる必要はないようである。

次にサブスペースの選び方の差を見るため、 $\{\phi_i\}_{i=1}^{10}$ を用

eigen-value	λ_1		λ_2		λ_3		λ_4		λ_5		λ_6	
dimension of S	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20	10	20
$\alpha = 5^\circ$	8	7	11	9	10	8	21	12	28	12	27	13
10°	11	9	13	10	13	9	24	13	30	14	30	15
15°	14	11	15	12	15	11	27	14	34	16	38	17
20°	19	14	17	13	18	14	30	16	39	18	49	19
25°	28	19	20	18	21	19	33	18	44	21	38	23
30°	46	28	32	27	30	27	36	24	50	24	41	24
35°	131	51	69	51	56	48	52	42	57	39	--	38

($N=10, \lambda^*=20$)

表.4 サブスペースの選び方による差

いた場合と、 $\{\phi_i\}_{i=1}^{20}$ を用いた場合を比較してみた。結果を表4にまとめておく。ただし $N=10$, $\lambda^*=20$ とした。サフスペースを上げることにより収束は明らかに速くなる。しかし計算の半増は増大するので、両方の要因を合わせて考慮することが実用上は大切である。

表5には有限要素法によって求めた固有値の収束のようすを示す。これは本方法の反復の収束とは全く別のことであるが、有限要素解の精度を見る上の参考にまとめておいた。当然ながら、本方法は収束すれば厳密な有限要素解に一致する数値解を与えると考えてよい。表中には $N=10$ と $N=20$ の結果を示す。また Fourier と書いてあるのは、先に述べた20項の Fourier 級数を利用した Ritz-Galerkin 法による数値解で、 $\alpha=0^\circ$ であれば厳密解であるが、 α が増加するにつれしだいに厳密解との誤差は大きくなっていくものと考えられる。ただし Rayleigh-Ritz 法の原理により、数値解は必ず厳密解の上界を与えている（これは有限要素解でも同様である）。項数を増加させれば、数値解は単調に厳密解に収束する。また表中で Extrapolation と書いているのは、ここで用いた有限要素モデルにおいては、固有値の有限要素解の誤差が $n=1/N$ の2乗に比例する程度で上からおさえられることを考慮して、^[5] 漸近的に誤差が n^2 に比例すると仮

eigenvalue		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$\alpha = 0^\circ$	N = 10	19.902	50.745	50.745	81.587	105.527	105.527
	N = 20	19.780	49.694	49.694	79.608	100.372	100.372
	Fourier	19.739	49.348	49.348	78.957	98.696	98.696
	Extrapolation	19.739	49.344	49.344	78.948	98.654	98.654
5°	N = 10	19.950	49.623	52.120	81.347	105.619	106.436
	N = 20	19.826	48.560	51.060	79.274	100.447	101.283
	Fourier	19.786	48.214	50.714	78.619	98.780	99.622
	Extrapolation	19.785	48.206	50.707	78.583	98.723	99.565
10°	N = 10	20.099	48.709	53.815	80.718	105.910	109.117
	N = 20	19.968	47.614	52.719	78.399	100.681	103.924
	Fourier	19.929	47.265	52.377	77.742	99.049	102.298
	Extrapolation	19.924	47.249	52.354	77.626	98.938	102.193
15°	N = 10	20.359	47.972	55.920	79.896	106.435	113.517
	N = 20	20.217	46.824	54.758	77.240	101.106	108.163
	Fourier	20.180	46.470	54.426	76.583	99.553	106.577
	Extrapolation	20.170	46.441	54.371	76.355	99.330	106.378
20°	N = 10	20.751	47.395	58.567	79.065	107.269	119.705
	N = 20	20.593	46.173	57.298	76.005	101.783	114.009
	Fourier	20.560	45.811	56.986	75.339	100.384	112.465
	Extrapolation	20.540	45.766	56.875	74.985	99.954	112.110
25°	N = 10	21.313	46.975	61.941	78.356	108.538	120.366
	N = 20	21.131	45.654	60.516	74.818	102.817	111.794
	Fourier	21.103	45.282	60.235	74.118	101.686	109.937
	Extrapolation	21.070	45.214	60.041	73.639	100.910	108.937
30°	N = 10	22.099	46.729	66.315	77.859	110.453	118.480
	N = 20	21.884	45.276	64.668	73.748	104.388	-----
	Fourier	21.863	44.899	64.431	72.987	103.683	106.954
	Extrapolation	21.812	44.792	64.119	72.378	102.366	-----

----- は本方法で有限要素解を決定できなかったことを示す。

[有限要素解自体は存在。

表5 有限要素解の収束の様子(離散化の影響)

定して, $N=10$ と $N=20$ の結果から次の補外公式を用いて求めたものを示している(この式は $N_2 = 2N_1$ の関係にある任意の2つの N に対して適用できる)。

$$\lambda_{\text{extrapolation}} = \frac{4}{3} \lambda_{N=20} - \frac{1}{3} \lambda_{N=10} \quad (26)$$

表で $\alpha = 0^\circ$ では厳密解が知られているので、上式の妥当性をチェックできる。この式の使用により比較的良い値を得ることができる。しかし他の α については表からは確定的なことは何も言えない。全般に高次の固有値ほど数値解の誤差は小さくなっている。これは一般的な事実と一致する。Fourier 展開による結果と補外による結果とは高次になるにつれ、また α が大きくなるにつれ、一致しなくなる。これは両者に原因があり、それぞれの誤差が大きくなっているためかと思われる。

6. 結言

有限要素法で現われるようなマトリックス型の固有値問題の振動問題につき、サブスペースを利用した反復的スキームを提案し、数値例によりその妥当性を検証した。本方法は問題によっては有効に利用でき、計算を効率化できる可能性がある。他の手法、特にサブスペース法などとの比較が今後必要とされよう。また反復法の収束や誤差解析等の数学的考察も重要であり、さらに適用問題の種類を増加させていくことも大切であろう。いずれにせよ、本手法には実用的にも理論的にも興味深い点がたくさんあるように思われる。

参考文献

- [1] K.-J. Bathe and E. L. Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall (1976). (訳) 菊地：有限要素法の数値計算，科学技術出版社（1980）.
- [2] 量子力学Ⅰ（現代物理学の基礎・3），第2版，岩波（1978）
- [3] 菊地，相澤： 部分的に設計変更された構造物の自由振動解析法，日本機械学会講演論文集 No. 810-3（'81-4） pp. 163-165
- [4] F. Kikuchi, T. Aizawa, and H. Utsuno: A numerical method for perturbation analysis of eigenvalue problems in structural mechanics, presented at the 6th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT-6) to be held in Paris, France, on August 17th-21st in 1981. paper number; M6/3 (1981).
- [5] G. Strang and G. J. Fix: An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall (1973).