

Towards rationality of critical values of the standard L -functions for $U(2, 1)$

Yoshi-hiro Ishikawa

岡山大学・自然科学研究科 石川 佳 弘

1 Problem and strategy : Zeta integral

この § 1 では, 問題の設定 と その解決への戦略を記しておく。総実代数体上でもパラレルに問題は定式化出来るが, 今回は Archimedean local なパーツが主結果であり, 基礎体 F の数論に関わる部分は考慮しないので, F は有理数体 $\mathbb{Q}$ とする。

<Group structure>

$E/\mathbb{Q}$ を虚二次拡大とする。 $\mathbb{Q}$ 上の準分裂ユニタリ群 $U_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$ を,

$$G := \{g \in GL(3, E) \mid {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \kappa & \\ -1 & & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \kappa & \\ -1 & & \end{pmatrix}\}.$$

と実現しておく。但し, $\kappa \in E^\times$ は トレース ゼロ元, $\bar{\cdot}$ は $E/\mathbb{Q}$ のガロア群の生成元である。 G の Borel 部分群 $B = MN$ は

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & z \\ & 1 & -\bar{b} \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G \mid b, z \in E, z + \bar{z} = -|b|_E^2 \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \bar{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} \in G \mid \alpha \in E^\times, \beta \in E^{(1)} \right\}$$

と表示できる。 § 2 で 局所対称空間を導入する際に G の similitude が必要となる。 G の定義に於いて, 条件の右辺に similitude norm の値 $\nu(g)$ を掛けたものが, $GU_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$ であった。これを $\tilde{G}$ と記すと, G は $\tilde{G}$ の部分群と見做せる。また Rankin-Selberg 型のゼータ積分を下で導入する際に, Euler 部分群として 次の H が必要となる。

$$H := \tilde{H} \cap G, \quad \tilde{H} := \text{Img} \left(i : GU_{E/\mathbb{Q}}(1, 1) \ni \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} * & * \\ & 1 \\ * & * \end{pmatrix} \in \tilde{G} \right).$$

H の Borel 部分群は, $B_H = Z_N A$ で与えられる。但し, Z_N, A は次の様に表示できる。

$$Z_N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G \mid z \in E, \operatorname{tr} z = 0 \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & a^{-1} \end{pmatrix} \in G \mid a \in \mathbb{Q}^\times \right\}.$$

また, § 2 で種々の cohomology の関係を記述する際に G, H とその similitude の包含関係が必要となるので, 埋め込み j を

$$\begin{array}{ccc} G := U_{E/\mathbb{Q}}(2, 1) & \subset & \tilde{G} := GU_{E/\mathbb{Q}}(2, 1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H \cong U_{E/\mathbb{Q}}(1, 1) & \xrightarrow{j} & \tilde{H} \cong GU_{E/\mathbb{Q}}(1, 1) \end{array}$$

と決める。縦の埋め込みは, $\tilde{H}$ の定義中の i である。以下, valued points は, $G_p := G(\mathbb{Q}_p)$ などと略記する。

<The standard L -function>

アデール群 $G(\mathbb{A}) = U(3)_{\mathbb{A}}$ の既約 cuspidal 保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ と E の Hecke 指標 ξ に対して, π の ξ -twisted L -関数は, Euler 積

$$L(s; \pi \times \xi) := \prod_v L_v(s; \pi_v \times \xi_v).$$

により定義される。

ここで, 非 Archimedes 素点 p での成分 ξ_p, π_p が共に不分岐であれば, 不分岐 L -因子は

$$L_p(s; \pi_p \times \xi_p) := L_{E,p}(s; \xi_p) L_p(2s; \xi_p \chi) L_p(2s; \xi_p / \chi).$$

で与えられる。但し, χ は π_p が $\operatorname{Ind}_{B_p}^{G_p}(\chi)$ の組成成分として現れる様な Borel 部分群 $B_p = N_p M_p$ の表現

$$\chi : n \cdot \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \bar{\alpha}^{-1}) \mapsto \chi_p(\alpha) \in \mathbb{C}^\times,$$

であり, χ_p は $E_p^\times$ の不分岐指標である。

Archimedes 素点 ∞ 上で, π_∞ が Harish-Chandra パラメタが $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \in \mathbb{Z}^3$ の離散系列表現 D_Λ で, ξ_∞ が $(t, m_\xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}$ により

$$(1.1) \quad \xi_\infty : \mathbb{C}^\times \ni \alpha \mapsto |\alpha|^{2t} \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^{m_\xi} \in \mathbb{C}^\times,$$

とパラメタ付けされている時, Archimedean L -因子は,

$$(1.2) \quad L_\infty(s; D_\Lambda \times \xi_{(t,m)}) := \prod_{i=1}^3 \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + t + |\Lambda_i| + \frac{|m_\xi|}{2}\right)$$

となる。

<Problem>

既約 cuspidal 保型表現 π と E の Hecke 指標 ξ に対して, ξ -twisted L -関数の臨界点 $s = s_0$ での特殊値

$$L(s_0; \pi \times \xi)$$

の代数性を調べたい。即ち、適切な方法で超越パート“ $p(s_0; \pi, \xi) \in \mathbb{C}^\times$ ”を定め、

$$\frac{L(s_0; \pi \times \xi)}{p(s_0; \pi, \xi)}$$

への $\text{Aut}(\mathbb{C})$ による作用を調べることが目標とする。

とは言え、無条件では何も出来ないので、Hecke 指標 ξ は algebraic 指標 (i.e. $t = 0$ in (1.1)), cuspidal 表現 π は generic 表現 即ち π_∞ が large 離散系列 $D_\Lambda^{(1,1)}$ (i.e. $\Lambda_1 > \Lambda_3 > \Lambda_2$) とする。

<Zeta integral of Gelbart-Piatetski-Shapiro>

φ を cuspidal 表現 π に属する generic 形式とする時、Gelbart と Piatetski-Shapiro のゼータ積分

$$(1.3) \quad Z(s; \varphi, \xi) := \int_{H(F) \backslash H(\mathbb{A})} \varphi|_H(h) E^H(s; h, \xi) dh.$$

(cf. [Ge-PS]) を考える。ここで、 E^H は $H(\mathbb{A})$ の主系列表現 $\text{Ind}_{B_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(1_{N_H} \otimes \xi \otimes e^{2s})$ のセクション $f_\xi^{(s)} = \otimes_v f_{\xi,v}^{(s)}$ から作られる Eisenstein 級数

$$E^H(s; h, \xi) := \sum_{\gamma \in B_H(\mathbb{Q}) \backslash H(\mathbb{Q})} f_\xi^{(s)}(\gamma h),$$

である。Langlands の一般論により、上の積分は全 s -平面に有理型に解析接続される。

§ 3 に於いて、ゼータ積分 (1.3) を コホモロジー類間のカップリングと見做す。このことで、一つの $\mathbb{Q}$ -構造 を得る。

<Unfolding and local integrals>

局所化可能な generic カスプ形式 $\varphi = \otimes_v \varphi_v$ を採る。Whittaker 模型の一意性により、ゼータ積分 (1.3) は局所積分の積に分解する；

$$Z(s; \varphi, \xi) = \prod_v Z_v(s; W, f_\xi^{(s)}),$$

但し、

$$Z_v(s; W, f_\xi^{(s)}) := \int_{Z_{N,v} \backslash H_v} W_{\varphi_v}|_{H_v}(h_v) f_{\xi,v}^{(s)}(h_v) dh_v$$

である。ここで、 $Z_{N,v}$ は G_v の極大冪零部分群 N_v の中心であり、 W_{φ_v} は $\varphi_v \in \pi_v$ に付随する Whittaker vector

$$W_{\varphi_v}(g_v) := \ell_\psi(\pi_v(g_v) \cdot \varphi_v)$$

を表す。 ℓ_ψ は Whittaker 模型 $\text{Hom}_{G_v}(\pi_v, \text{Ind}_{N_v}^{G_v} \psi_{N_v})$ の非零元である。残る $f_{\xi,v}^{(s)}$ は、 H_v の Borel 部分群 $i(\begin{smallmatrix} * & * \\ & * \end{smallmatrix})$ からの誘導である主系列表現 $I_v^H(s; \xi) := \text{Ind}_{B_{H,v}}^{H_v}(\xi|\cdot|^s)$ の特別なセクションである。この局所積分表示により、ゼータ積分は カスプ形式 φ が generic でなければ、消えてしまうことに注意する。

Gelbart と Piatetski-Shapiro は、Casselman-Shalika 公式を使うことで、全てのデータが不分岐である様な非 Archimedes 素点 $v = p$ に於いて、上の局所積分が L -関数の不分岐 Euler 因子に一致することを示した；

Proposition 1.1 ([Ge-PS] §4) G_p の不分岐表現 (i.e. $K_p := G(\mathbb{Q}_p)$ -spherical 表現) π_p に対して, $f_{\xi,p}^{(s)}$ を不分岐セクションに採ると

$$Z_p(s; W, f_{\xi}^{(s)}) = L_p(s; \pi_p \times \xi_p).$$

が成り立つ。 □

<Strategy to attack the Problem>

如くして, S を $\{v: \mathbb{Q} \text{ の素点} \mid G_v, \pi_v, \xi_v \text{ の何れかが分岐}\}$ とする時, 臨界 L -値は

$$L(s_0; \pi \times \xi) \times \prod_{v \in S} \frac{Z_v(s; W, f_{\xi}^{(s)})}{L_v(s; \pi_v \times \xi_v)} \Big|_{s=s_0} = Z(s; \varphi, \xi) \Big|_{s=s_0}$$

と表せることが判った。

ここで, 非 Archimedes 素点 v 上で $\mathbb{Q}$ -値をとる Whittaker vector からなる部分空間を考えることで, 局所 Whittaker 模型 $Wh_{\psi_v}(\pi_v) := \text{Img } \ell_{\psi}$ に もう一つの $\mathbb{Q}$ -構造 を導入する。

「二つの $\mathbb{Q}$ -構造のズレとして, Harder 周期 $p(s_0; \pi, \xi)$ を取り出そう」というのが, 我々の基本戦略である。

しかし, "the Bad places" S の中には, Archimedes 素点 ∞ も含まれている。そこで

<Archimedean zeta and its new vector>

Cayley 変換により, G_{∞} の極大コンパクト群 K_{∞} は 対角部分群として $U(2) \times U(1)$ に同型となり, $\pi_{\infty} \cong D_{\Lambda}$ の K_{∞} -type は 整数の三組

$$\mu = [\mu_1, \mu_2; \mu_3] \in \{\Lambda + m[1, -1; 0] + n[1, 0; -1] \mid m, n \in \mathbb{N}\},$$

でパラメタ付けされる。ここで, (μ_1, μ_2) は $U(2)$ -表現の最高ウェイト, μ_3 は $U(1)$ -指標 ($u \mapsto u^{\mu_3}$) のパラメタである。各々の基底を Gel'fand-Zetlin basis $\{ \begin{smallmatrix} \mu_1, \mu_2 \\ k \end{smallmatrix} \mid \mu_1 \geq k \geq \mu_2 \}$, 及び $\mathbf{1}_{\mu_3}$ と書く。ここで, large 離散系列 $D_{\Lambda}^{(1,1)}$ の K_{∞} -type τ_{μ} に属する K_{∞} -finite vector w に対して, 付随する Whittaker vector を

$$W_{\Lambda}^{(\mu, w)}(g) := \ell_{\psi}(\pi_{\Lambda}(g).w)$$

と定める。また, H_{∞} の主系列の Jacquet section を, Schwartz 関数 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ から,

$$f_{\xi, \Phi}^{(s)}(h) := \int_{\mathbb{C}^{\times}} \Phi(h^{-1} \cdot [z, z]) \xi(z) |z|^{2s} d^{\times} z \in I_{\infty}^H(s; \xi)$$

と構成する。

Theorem 1.2 ([Ish], §2) Large 離散系列 $D_{\Lambda}^{(1,1)}$ の Harish-Chandra パラメタが, $\Lambda_1 + \Lambda_3 < 0$ を満たす時, Schwartz 関数を

$$\Phi^{good}(z_1, z_2) := \prod_{i=1}^2 z_i^{m_i} \bar{z}_i^{n_i} \times \exp(-\pi |z_i|^2),$$

$$\text{with} \quad n_1 - m_1 = m_{\xi} + \Lambda_3, \quad n_2 - m_2 = -\Lambda_3.$$

の様に採ると,

$$\mu = [m_\xi - |\Lambda|, |\Lambda| + \Lambda_3; |\Lambda| - \Lambda_3 - m_\xi]$$

として, $k = \Lambda_1 + \Lambda_2 - m_\xi$ 番目の *Gel'fand-Zetlin base* $w = \left| \begin{smallmatrix} \mu_1, \mu_2 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \otimes 1_{\mu_3}$ に付随する

$$W_\Lambda^{(\mu, w)} \left(\begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix} \right) = c \times y^{\mu_1 - \mu_2 - 1/2} W_{0, k - \mu_1 - \mu_2 + \mu_3}(2\pi y) \times \left(\left| \begin{smallmatrix} \mu_1, \mu_2 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \otimes 1_{\mu_3} \right),$$

は, *Gelbart-PS* ゼータ積分に対する *Whittaker new vector* を与える ;

$$\mathcal{Z}_\infty(s; W_\Lambda^{(\mu, w)}, f_{\xi, \Phi}^{(s)}) = c \times L_\infty(s; D_\Lambda^{(1,1)}, \xi_{(0, m_\xi)})$$

となる。但し, 定数 c は明示可能で, 二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{N})$, $N \in \mathbb{Z}[\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, m_\xi]$ に含まれる。□

<Critical set>

この § を終える前に, (1.2) と 上の Theorem 1.2 により,

$$\mathcal{Z}_\infty(0; W, f_{\xi, \Phi}^{(s)}) = A/(2\pi)^B, \quad \text{with}$$

$$A \in \mathbb{Q}(\sqrt{N}), \quad B = \frac{3}{2}|m_\xi| + |\Lambda_1| + |\Lambda_2| + |\Lambda_3| > 0$$

となることに注意する。ここで, s_0 として 0 を採っているが, これは不自然なことではない。実際, 複素変数 s は Hecke 指標 ξ のパラメタ m_ξ によりシフトされるので, algebraic Hecke 指標 ξ を我々が調べたい cuspidal 表現 π に対する"変数" と見做す方が自然である。そこで, π に対して critical な ξ の集合を

$$\text{Crit}(\pi) := \{E^\times \text{ の alg. Hecke 指標 } \xi \mid L_\infty(0; \pi_\infty \times \xi_\infty), L_\infty(1; \pi_\infty^\vee \times \xi_\infty^{-1}) \text{ 共に regular } \}$$

と定めると, (1.2) により,

$$\text{Crit}(\pi) = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2\ell_\Lambda < m < 2\ell_\Lambda \text{ or } m \text{ is odd}\}$$

と判る。但し, $\ell_\Lambda := \min\{|\Lambda_i|; i = 1, 2, 3\}$ とした。この設定下では我々の問題は, 各 $\xi \in \text{Crit}(\pi)$ に対して, $L(0; \pi \times \xi)$ の超越パート" $p(\pi) \in \mathbb{C}^\times$ を定め,

$$\frac{L(0; \pi \times \xi)}{p(\pi)}$$

の $\text{Aut}(\mathbb{C})$ -作用に対する振る舞いを調べることとなる。

2 Foundation : Companion of π

この § 2 では, § 3 に於いて $p(\pi)$ を導入する際に 基礎となる結果を説明する。

<Aut(C)-action on π >

ここでは, G は 総実代数体 F 上の連結簡約群として, $G(\mathbb{A})$ の保型表現への $\text{Aut}(\mathbb{C})$ -作用に

関する一般論を思い出す。既約保型表現 $\pi \cong \otimes_{v|\infty} \pi_v \otimes \pi_{\text{fin}}$ に対して、その $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ による作用は ${}^\sigma \pi := \{ \prod_{v|\infty} {}^\sigma \pi_v \} \otimes {}^\sigma \pi_{\text{fin}}$ として、各成分への作用は次で与えられる。

$$\begin{aligned} {}^\sigma \pi_v(g_v) &:= \pi_{\sigma^{-1}.v}(g_{\sigma^{-1}.v}) && \text{for } \forall v|\infty, \\ {}^\sigma \pi_{\text{fin}}(g_{\text{fin}}) &:= t \cdot \pi_{\text{fin}}(g_{\text{fin}}) \cdot t^{-1}, && \text{with } t: V_{\pi_{\text{fin}}} \rightarrow V': \sigma\text{-lin.isom.} \end{aligned}$$

但し、Archimedes 素点 $v|\infty$ は、 $F \hookrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ と同一視している。

我々の戦略では、 L -臨界値の超越パート (:Harder 周期) の導入に当たり、 $L(s; \pi \times \xi)$ のゼータ積分表示 $\mathcal{Z}(s; \varphi, \xi)$ に依拠する。従って、 $\text{Aut}(\mathbb{C})$ -作用による カスピダリティーの保存：

$$\pi : \text{generic cuspidal} \implies {}^\sigma \pi : \text{generic } \underline{\text{cuspidal}}$$

を示すことが、出発点となる。

L^2 -保型形式の空間の構造論によると、

$$\begin{aligned} L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) &\cong L^2_{\text{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \oplus L^2_{\text{cont}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})), \\ L^2_{\text{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) &\cong L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \oplus L^2_{\text{res}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})). \end{aligned}$$

と分解する。これに応じて、ユニタリ保型表現 π を

$$\begin{aligned} \pi \subset L^2_{\text{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) &\text{ なら } \pi: \text{discrete 保型表現} \\ \pi \subset L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) &\text{ なら } \pi: \text{cuspidal 保型表現} \\ \pi \subset L^2_{\text{res}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) &\text{ なら } \pi: \text{residual 保型表現} \end{aligned}$$

と呼ぶのであった。Clozel により示された次の事実は、我々にとって基本的である。

Lemma 2.1 (Clozel; [Clo]) .

$G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 π が、"cohomological" であるとする。この時、

- (1) π が *cuspidal* なら、 ${}^\sigma \pi$ は *discrete* である。
- (2) π が *cuspidal* かつ *generic* なら、 ${}^\sigma \pi$ も *generic* である。 □

Clozel は、更に 一般線形群 に対して、カスピダリティーの保存を示している；

Proposition 2.2 (Clozel; [Clo]) .

群 G が 一般線形群 $\text{GL}(n)$ の時には、 π が *cuspidal* なら、 ${}^\sigma \pi$ も *cuspidal* である。 □

しかし、上のステートメントは 一般の簡約群 G では成り立たない。"cohomological" な π の定義を思い出した後に、準分裂ユニタリ群 $G = \text{U}_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$ の場合の remedy を述べる。

<cohomological representations>

ここでの議論は標準的であり、適切に修正すれば 一般の G でも通用するが、以下 $G = \text{U}_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$, $\tilde{G} = \text{GU}_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$ として説明する。

$\tilde{G}(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群、中心を其々 $\tilde{K}_\infty$, Z_{G_∞} とする時、無限レベル Picard modular surface を

$$(2.1) \quad \mathcal{S}^{\tilde{G}} := \varprojlim \tilde{G}(\mathbb{Q}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A}) / (\tilde{K}_\infty Z_{G_\infty}) \tilde{K}_{\text{fin}}$$

と定める。但し、逆極限は開コンパクト部分群 $\tilde{K}_{\text{fin}} \subset \tilde{G}(\mathbb{A})_{\text{fin}}$ に関してとっている。ここで、最高ウェイトが Λ である $\tilde{G}(\mathbb{C})$ の既約代数表現 M_Λ に付随する $S^{\tilde{G}}$ 上の層を $\mathcal{M}_\Lambda$ とすると、松島-村上同型は

$$(2.2) \quad H^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \cong H^i(\mathfrak{g}, \tilde{K}_\infty; C^\infty(\tilde{G}(\mathbb{Q}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A})) \otimes_{\mathbb{C}} M_\Lambda^\vee)$$

を主張する。ここで、 $M_\Lambda^\vee$ は反傾表現、 $\mathfrak{g}$ は複素 Lie 環 $(\text{Lie } \tilde{G}(\mathbb{R})) \otimes \mathbb{C}$ を表す。

この同型により、様々な $(\mathfrak{g}, \tilde{K}_\infty)$ -stable な埋め込み $\iota_V : C^\infty(\tilde{G}(\mathbb{Q}) \backslash \tilde{G}(\mathbb{A})) \hookrightarrow V$ 毎に、層係数 cohomology の中に $\text{Img } \iota_V^*$ を考えることが出来る。 V として L^2_{disc} の smooth vector 全体をとった時、 $S^{\tilde{G}}$ の L^2 -cohomology を得るが、それは

$$\text{Img } \iota_{(L^2_{\text{disc}})^\infty}^* =: H_{(2)}^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \cong \bigoplus_{\pi' \in L^2_{\text{disc}}, \chi_{\pi'} = \chi_\Lambda} H^i(\mathfrak{g}, \tilde{K}_\infty; \pi'_\infty \otimes_{\mathbb{C}} M_\Lambda^\vee) \otimes \pi'_{\text{fin}}$$

と、直和分解することが知られている。ここで、 $\chi_{\pi'}$ は π'_∞ の無限小指標である。この分解により、ユニタリ保型表現 π が

$$H^i(\mathfrak{g}, \tilde{K}_\infty; \pi'_\infty \otimes_{\mathbb{C}} M_\Lambda^\vee) \neq 0 \quad \text{for } \exists \Lambda, i \text{ の時} \quad \pi: \text{cohomological 保型表現}$$

と呼ぶのであった。

後の準備のために、もう少し思い出しておく。 V として L^2_{cusp} の smooth vector 全体をとると、 $S^{\tilde{G}}$ の cuspidal cohomology を得るが、Borel の定理により、それは

$$\text{Img } \iota_{(L^2_{\text{cusp}})^\infty}^* =: H_{\text{cusp}}^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \hookrightarrow H_c^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee)$$

と、compact support cohomology に埋め込まれている。更に interior cohomology

$$H_i^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) := \text{Img} \left\{ H_c^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \rightarrow H^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \right\}$$

を考えれば、三つの cohomology

$$H_{\text{cusp}}^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \quad H_i^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \quad H_{(2)}^i(S^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee)$$

を得るが、これらの包含関係により Proposition 2.1 (1) が示される。

実際、Borel-Serre コンパクト化の性質により、 $H_{\text{cusp}}^i \subset H_i^i$ となるが、今 π は cuspidal cohomological なので、 $\pi \subset H_{\text{cusp}}^i$ である。ここで、interior cohomology H_i^i が rational であることにより、 $\sigma\pi \subset H_i^i$ となるが、 $H_i^i \subset H_{(2)}^i$ により $\sigma\pi$ が discrete と判る。

<Residual representations of $\text{U}_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)(\mathbb{A})$ >

ここでは、 $G = \text{U}_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$ の場合に Clozel の結果 Proposition 2.2 に当たる カスピダリ ティ保存定理を示す。これは、 $G(\mathbb{A})$ の保型 Spectrum の構造を完全に記述した Gelbart-Rogawski の深い結果に依っている。

ユニタリ Hecke 指標 $\tau : \text{U}_{E/\mathbb{Q}}(1)(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^{(1)}$ と $E^\times$ の Hacke 指標 ξ により、 G の Levi M の表現を $\text{diag}(\alpha, \beta, 1/\bar{\alpha}) \mapsto \tau(\beta)\xi(\alpha)$ と決める。これから誘導される $G(\mathbb{A})$ の主系列表現 $\text{Ind}_{B(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(1_N \otimes \tau\xi \otimes e^{2s})$ のセクション $f_{\tau\xi}^{(s)}$ から作られる Eisenstein 級数を

$$E^G(s; g, \tau\xi) := \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} f_{\tau\xi}^{(s)}(\gamma h),$$

と書く。すると

Proposition 2.3 (Gelbart-Rogawski) .

- (1) $G(\mathbb{A})$ の Eisenstein 級数 $E^G(s; g, \tau\xi)$ は, $s = 1$ と $s = \frac{1}{2}$ に possible poles を持つ。
 (2) $s = 1$ での留数は, 保型 character になる。即ち, $G(\mathbb{A})$ の一次元表現を生成する。
 (3) $s = \frac{1}{2}$ で pole を持つ $\iff L(\frac{1}{2}; \mu \times (\frac{\chi_1}{\chi_2})_E) \neq 0$
 (4) (3) の時, $s = \frac{1}{2}$ での留数形式は, $G(\mathbb{A})$ の 到る処 non-tempered な無限次元既約保型表現 $\pi^{nt}(\chi)$ を生成する。 $\square$

という事が知られている。ここで, 指標の右下 E は その Base Change : $\chi_E(\alpha) := \chi(\alpha/\bar{\alpha})$ を表す。また, μ, χ_1, χ_2 及び, non-tempered な residual 表現 $\pi^{nt}(\chi) := \otimes_v \pi^{nt}(\chi_v)$ の各成分は, 以下で与えられる。

素点 v が非 Archimedean かつ $E/\mathbb{Q}$ で惰性する時,

$$0 \rightarrow \pi^{nt}(\chi_v) \rightarrow \text{Ind}_{B_v}^{G_v}(\tilde{\chi}_v \otimes 1_{N_v}) \rightarrow \pi^{(2)}(\chi_v) \rightarrow 0 \quad : \text{exact},$$

但し, $\tilde{\chi}_v$ は $\chi_v : H_v \times U_{E/\mathbb{Q}}(1) \ni (h_2, h_1) \mapsto \chi_2(\det h_2)\chi_1(h_1) \in \mathbb{C}^{(1)}$ と $\mu_v|_{\mathbb{Q}_v} = \omega_{E_v/\mathbb{Q}_v}(:\text{CFTchr.})$ なる指標 $\mu_v : E_v^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ から次の様に作った, Levi M_v の表現である。

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_v : M_v &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ \text{diag}(\alpha, \beta, 1/\bar{\alpha}) &\mapsto \mu_v(\alpha)|\alpha|_v^{1/2} \chi_{2,E}(\alpha)\chi_1(\alpha) \end{aligned}$$

素点 v が非 Archimedean かつ $E/\mathbb{Q}$ で分解 (i.e. $v = ww'$) する時,

$$\pi^{nt}(\chi_v) := \text{Ind}_{P_{(2,1)}(E_w)}^{\text{GL}_3(E_w)}(\tilde{\chi}_w \otimes 1_{N_{(2,1)}})$$

但し, $\tilde{\chi}_w$ は 分割 $(2, 1) \vdash 3$ に付随する放物部分群 $P_{(2,1)}$ の Levi $M_{(2,1)}$ の表現である ;

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_w : M_{(2,1)} &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ \text{diag}(m_2, m_1) &\mapsto \chi_2(\det m_2)|\det m_2|_w^{1/2} m_1 \end{aligned}$$

素点 v が Archimedean の時は, Harish-Chandra 加群として

$$\pi^{nt}(\chi_\infty) \cong A_q(\lambda)$$

となる non-tempered unitarizable 表現である。但し, $q := (\text{Lie } P_{(2,1)})_{\mathbb{C}}$ つまり, $A_q(\lambda)$ は $H^1(\mathfrak{g}, K_\infty; A_q(\lambda) \otimes M_\lambda) \neq 0$ なる Zuckerman 導来関手加群である。

上の構造定理を使うと, 我々の研究方針の出発点となる次の事実を得る。

Theorem 2.4 三変数準分裂ユニタリ群 $G(A) = U_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)(\mathbb{A})$ の既約保型表現 π が, generic cohomological cuspidal であれば, その companion $\sigma\pi$ も そうである。 $\square$

実際, Lemma 2.1 (1) により, $\sigma\pi$ は 既約 generic cohomological discrete である。従って, $\sigma\pi$ が residual であると仮定して, 矛盾を導けば良い。 $\sigma\pi$ の genericity により, 保型 character の可能性は排除され, $\sigma\pi \cong \pi^{nt}(\chi)$ でなくてはならない。しかし, その Archimedes 成分は $\pi^{nt}(\chi_\infty) \cong A_q(\lambda)$ なので, $\sigma\pi_\infty$ の genericity に反する。 $\blacksquare$

この結果により, Harder のレシビに訴えて $L(0; \pi \times \xi)$ の超越パート " $p(\pi)$ " $\in \mathbb{C}^\times$ が定義できる様になった。

3 Result : Period and rationality

この § 3 では, § 1 の <Strategy> の項で述べた, 二つの $\mathbb{Q}$ -構造を導入し, それらを比較することで Harder 周期 $p(\pi)$ を定義する. この周期により, $G = \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$ の既約 generic cohomological cuspidal 表現 π に対して critical な ξ について, $L(0; \pi \times \xi)/p(\pi)$ の rationality を述べる.

<Cohomological interpretation>

ここでは, Gelbart-PS のゼータ積分 (1.3) の cohomological な解釈を与える. その為に, Harder-Mahnkopf cycle を導入する:

$$F^{\tilde{H}} := \varprojlim F^{\tilde{H}}(\tilde{K}_{\mathrm{fin}}^H), \quad F^{\tilde{H}}(\tilde{K}_{\mathrm{fin}}^H) := \tilde{H}(\mathbb{Q}) \backslash \tilde{H}(\mathbb{A}) / \tilde{K}_{\infty}^H \tilde{K}_{\mathrm{fin}}^H$$

逆極限は 開コンパクト部分群 $\tilde{K}_{\mathrm{fin}}^H \subset \tilde{H}(\mathbb{A})_{\mathrm{fin}}$ に関してとっている. $\tilde{H}$, H に付随する局所対称多様体 $\mathcal{S}^{\tilde{H}}$ (:無限レベル modular curve) 及び, $\mathcal{S}^H$ を (2.1) と同様に定義すると, $F^{\tilde{H}} \cong \mathcal{S}^{\tilde{H}} \times \mathbb{R}_{>}^{\times}$ なので,

$$p: F^{\tilde{H}} \cong \mathcal{S}^{\tilde{H}} \times \mathbb{R}_{>}^{\times} \longrightarrow \mathcal{S}^{\tilde{H}}$$

と射影を決める. また, j と i から 自然に $j: \mathcal{S}^H(K_{\mathrm{fin}}^H) \rightarrow \mathcal{S}^{\tilde{H}}(\tilde{K}_{\mathrm{fin}}^H)$, $i: F^{\tilde{H}}(\tilde{K}_{\mathrm{fin}}^H) \rightarrow \mathcal{S}^{\tilde{H}}(\tilde{K}_{\mathrm{fin}}^H)$ が定まるが, i は proper map になる.

さて, 既約 cuspidal 表現 π が cohomological とすると, $H_{\mathrm{cusp}}^2(\mathcal{S}^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_{\Lambda}^{\vee})$ に現れるが, 更に π が generic であるとする Baruch による強重複度一定理 ([Bar], Thm.7.2.13) により, π_{fin} -isotypic 成分との同型

$$\pi \cong H_{\mathrm{cusp}}^2(\mathcal{S}^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_{\Lambda}^{\vee})(\pi_{\mathrm{fin}})$$

を得る. そこで, ゼータ積分 (1.3) の被積分形式 $\varphi \in \pi$ の像を $[\omega_{\varphi}]$ とすると, cuspidal 類を得る. 再び Borel の定理により, compact support cohomology に埋めて, i で引き戻せば, i の proper 性により

$$[\omega_{\varphi}] \in H_{\mathrm{cusp}}^2(\mathcal{S}^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_{\Lambda}^{\vee}) \subset H_c^2(\mathcal{S}^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_{\Lambda}^{\vee}) \longrightarrow H_c^2(F^{\tilde{H}}; i^* \mathcal{M}_{\Lambda}^{\vee}) \ni i^*[\omega_{\varphi}]$$

を得る. これが $\varphi|_H(h)$ の解釈である.

もう一方の被積分形式 $E^H(s; h, \xi)$ は, section $f_{\xi}^{(s)}$ の Archimedes 成分を Proposition 1.2 の様に Jacquet section $f_{\xi, \Phi}^{(s)}$, with $\Phi = \Phi^{\mathrm{good}}$ と採り, Harder の Eisenstein map ([Har]) により $[\omega_{\xi}] := \mathrm{Eis}(f_{\xi, \mathrm{fin}}^{(0)})$ と定めると, $\mathcal{S}^H$ 上の 1-Eisenstein 類を得る. これを j で $\mathcal{S}^{\tilde{H}}$ 上の 1-類に延ばし, p で引き戻すと

$$[\omega_{\xi}] \in H^1(\mathcal{S}^H, \mathcal{N}_{\mu}^{\vee}) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}^{\tilde{H}}, \mathcal{N}_{\mu}^{\vee}) \longrightarrow H^1(F^{\tilde{H}}, \mathcal{N}_{\mu}^{\vee}) \ni p^* j_* [\omega_{\xi}]$$

を得る. ここで, $\mathcal{N}_{\mu}^{\vee}$ は 最高ウェイトが μ である $\tilde{H}(\mathbb{C})$ 既約代数表現 N_{μ} の反傾に付随する層である.

ここで, $M_{\Lambda}|_{\tilde{H}(\mathbb{C})} \subset N_{\mu}$ と仮定して, その間の $\tilde{H}(\mathbb{C})$ -同変縮約を $\langle \cdot, \cdot \rangle_M: i^* M_{\Lambda}^{\vee} \times N_{\mu}^{\vee} \longrightarrow \mathbb{C}$ とする. これとウェッジ積を繋ぐとカップリング

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H_c^2(F^{\tilde{H}}; i^* \mathcal{M}_{\Lambda}^{\vee}) \times H^1(F^{\tilde{H}}, \mathcal{N}_{\mu}^{\vee}) \longrightarrow H_c^3(F^{\tilde{H}}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

を得るので、これにより $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -同変写像

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{I}(\pi_{\text{fin}}, \xi_{\text{fin}}) : H_{\text{cusp}}^2(\mathcal{S}^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_{\Lambda}^{\vee}) &\longrightarrow C(G(\mathbb{A}_{\text{fin}})) \\ [\omega_{\varphi}] &\mapsto \left(g \mapsto \langle i^* R_g^*[\omega_{\varphi}], p^* j_*[\omega_{\xi}] \rangle \right) \end{aligned}$$

が定義される。ここで

$$C(G(\mathbb{A}_{\text{fin}})) := \{ f : G(\mathbb{A}_{\text{fin}}) \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists K \subset G(\widehat{\mathbb{Z}}) \text{ s.t. } f : \text{右 } K\text{-inv.} \},$$

R_g は $g \in G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ による右移動である。 $g = e$ の時、右辺のカップリングは ゼータ積分の特殊値である； $\langle i^*[\omega_{\varphi}], p^* j_*[\omega_{\xi}] \rangle = \mathcal{Z}(0; \varphi, \xi)$ ことに注意せよ。ここで重要なことは、

Proposition 3.1 上の $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -同変写像 (3.1) は、 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されている。 $\square$

<Local integral>

ここでは、Whittaker 模型を用いて、 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されているもう一つの $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -同変写像を導入する。

一般に、 $\mathbb{C}$ -線形空間 V に対して、その $\overline{\mathbb{Q}}$ -線形部分空間 $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ が V の $\overline{\mathbb{Q}}$ -構造であるとは、 $V_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes \mathbb{C} \rightarrow V$ が同型となることであつた。 $C(G(\mathbb{A}_{\text{fin}}))$ の元で $\overline{\mathbb{Q}}$ -値なもの全体 $C(G(\mathbb{A}_{\text{fin}}))_{\overline{\mathbb{Q}}}$ は、 $\overline{\mathbb{Q}}$ -構造を与える。同様に、 π_{fin} の Whittaker 模型

$$\mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}}) := \prod_{v < \infty} \mathcal{W}h_{\psi_v}(\pi_v)$$

にも、 $\overline{\mathbb{Q}}$ -値 Whittaker 関数全体を考えることで、 $\overline{\mathbb{Q}}$ -構造 $\mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}})_{\overline{\mathbb{Q}}}$ を考えることが出来る。ここで、Proposition 1.1 により、もう一つの $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -同変写像を

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}(\pi_{\text{fin}}, \xi_{\text{fin}}) : \mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}}) &\longrightarrow C(G(\mathbb{A}_{\text{fin}})) \\ W_{\text{fin}} &\mapsto \left(g \mapsto \prod_{v < \infty} \frac{\mathcal{Z}(s; g_p W_p, f_{\xi, p})}{L_p(s; \pi_p \times \xi_p)} \right) \end{aligned}$$

と定義すると、その決め方から

$$\mathcal{T}(\pi_{\text{fin}}, \xi_{\text{fin}}) : \mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}})_{\overline{\mathbb{Q}}} \longrightarrow C(G(\mathbb{A}_{\text{fin}}))_{\overline{\mathbb{Q}}}$$

なので

Proposition 3.2 上の $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -同変写像 (3.2) も、 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されている。 $\square$

これで、二つの $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -同変写像を得たが、これらを繋ぎ合わせる為に 第三の $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -同変写像を導入する。

<Fourier Whittaker coefficient>

$G = \text{U}_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$ の既約 generic cohomological cuspidal 表現 π に対し、cuspidal cohomology の π_{fin} -isotypic 成分は、松島-村上同型 (2.2) により、

$$H_{\text{cusp}}^2(\mathcal{S}^{\tilde{G}}; \mathcal{M}_{\Lambda}^{\vee})(\pi_{\text{fin}}) \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, \tilde{K}_{\infty}; \mathcal{W}h_{\psi_{\infty}}(\pi_{\infty}) \otimes M_{\Lambda}^{\vee}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}})$$

という射をもつ。また, Proposition 1.2 で求めた Whittaker new vector $W_{\Lambda}^{(\mu,w)}$ から定まる, $H^2(\mathfrak{g}, \tilde{K}_{\infty}; \mathcal{W}h_{\psi_{\infty}}(\pi_{\infty}) \otimes M_{\Lambda}^{\vee})$ の 2-類を $\eta_{W,\infty}^{new}$ とする時,

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathfrak{g}, \tilde{K}_{\infty}; \mathcal{W}h_{\psi_{\infty}}(\pi_{\infty}) \otimes M_{\Lambda}^{\vee}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}}) & \longleftarrow & \mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}}) \\ \eta_{W,\infty}^{new} \otimes W_{\text{fin}} & \longleftarrow & W_{\text{fin}} \end{array}$$

なる射を得る。これらから定まる $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -同変写像

$$\mathcal{F}(\pi_{\text{fin}}) : H_{\text{cusp}}^2(\mathcal{S}^{\tilde{G}}; M_{\Lambda}^{\vee})(\pi_{\text{fin}}) \longrightarrow \mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}})$$

で cuspidal cohomology の $\overline{\mathbb{Q}}$ -構造送ると, $\overline{\mathbb{Q}}$ -値 Whittaker 関数 $\mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}})_{\overline{\mathbb{Q}}}$ とは別に,

$$\mathcal{F}(\pi_{\text{fin}})(H_{\text{cusp}}^2(\mathcal{S}^{\tilde{G}}; M_{\Lambda}^{\vee})(\pi_{\text{fin}})_{\overline{\mathbb{Q}}}) \subset \mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}})$$

も $\mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}})$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ -構造を与える。しかし,

Proposition 3.3 (Clozel; [Clo], Prop.3.1) .

V が $G(\mathbb{A}_{\text{fin}})$ -加群として 既約なら, V の $\overline{\mathbb{Q}}$ -構造は $\mathbb{C}^{\times}$ -倍を除いて一意である。 $\square$

により, $\mathcal{W}h_{\psi_{\text{fin}}}(\pi_{\text{fin}})$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ -構造は一つなので,

$$\exists p(\pi) \in \mathbb{C}^{\times} \quad \text{s.t.} \quad p(\pi)\mathcal{F}(\pi_{\text{fin}}) \text{ が } \overline{\mathbb{Q}} \text{ 上で定義される}$$

なる $p(\pi)$ が定まる。このスカラーを π の Harder 周期とよび, rational な Fourier Whittaker map を $\mathcal{F}'(\pi_{\text{fin}}) := p(\pi)\mathcal{F}(\pi_{\text{fin}})$ と記す。さすれば,

Theorem 3.4 $G = \text{U}_{E/\mathbb{Q}}(2, 1)$ の保型表現 π を 既約 *generic cohomological cuspidal* とする。 π に対し *critical* な Hecke 指標 $\xi \in \text{Crit}(\pi)$ 毎に,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\pi_{\text{fin}}, \xi_{\text{fin}})([\omega_{\varphi}]) &= \left[A/(2\pi)^B \times \left\{ \prod_{p \in S, p \nmid \infty} \frac{Z_p(0; W_p, \xi_p)}{L_v(0; \pi_p \times \xi_p)} \right\} \times \frac{L(0; \pi \times \xi)}{p(\pi)} \right] \\ &\quad \times \mathcal{F}'(\pi_{\text{fin}}) \cdot \mathcal{T}(\pi_{\text{fin}}, \xi_{\text{fin}})([\omega_{\varphi}]) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に, [] 内の比例定数は, $\overline{\mathbb{Q}}$ に属する。 $\square$

参考文献

- [Bar] Baruch, E.M., On the gamma factors attached to representations of $\text{U}(2, 1)$ over a p -adic field, *Israel J. Math.*, **102** (1997), 317-345.
- [Clo] Clozel, L., *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Vol.I, Academic Press (1990), 77-159
- [Ge-PS] Gelbart, S. and Piatetski-Shapiro, I., *Automorphic forms and L-functions for the unitary groups*, *Lie Group Representations II*, Springer Lecture Notes in Math., **1041** (1984), 141-184.

- [Gel] Gelbart, S., On theta-series liftings for unitary groups, *Theta functions: from the classical to the modern*, CRM Proc.Lec.Notes, **1** (1993), 129–174.
- [Har] Harder, G., Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL_2 , *Inv. Math.*, **89** (1987), 37–118.
- [Ish] Ishikawa, Y., Whittaker new vectors for discrete series representations of real Lie group $U(2, 1)$, 数理解析研究所 講究録 **1826** (2013) 18–23.
- [Ro1] Rogawski, J., *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Math. Studies **123**, Princeton Univ.Press (1990).
- [Ro2] Rogawski, J., The multiplicity formula for A -packets, *The zeta functions of Picard modular surfaces*, Univ. Montréal (1992), 395–419.

Yoshi-hiro Ishikawa

The Graduate School of Natural Science and Technology,

Department of Mathematics, Okayama University,

Naka 3-1-1 Tushima Okayama, 700-8530, Japan